



5 min

مجلة Maths

stay at home

من انجاز الأستاذ: شعبان أسامة

2AS

السنة الثانية ثانوي

الشعب العلمية

محاور الفصل الثالث

نموذج اختبار

الهندسة في الفضاء

المتباينات العددية

الجداء السلمي

4

3

2

1

تلمسان < أبريل 2020

Fb/5min Marths

chbnoussama@gmail.com

Instagram/5minmaths



وفقني الله عز و جل في اتمام هذا العمل البسيط خلال فترة عطلة الربيع ليكوه
لكم مرجعا متواضعا .

أتمنى لكم من صميم قلبي النجاح و التوفيق في المشوار الدراسي خاصة تلامذتي
في ثانوية "بوحميد الطاهر"

أقدم هذا العمل كهدية علمية لجميع محبي للمادة
تحياتي لعائلتي الحبيبة

أ.شعبان

شكر خاص للزملاء النساذخة على الأعمال الهقدمة

أ.خيار هلال

أ.خاتر الياس

أ.شيبورو ابراهيم

5 min

Maths 2AS

stay at home

محاور الفصل الثالث

تجدون فيها:

4

نماذج امتحانات

3

الهندسة الفضائية

2

المتتاليات العددية

1

الجداء السلمي



Alaâ Ourmassi

لم أستطع انتظار النجاح إذا ذهبت اليه ، والله غير الصفحة 5 min math عاوتتي بزاف .



Lahcen Ben Kassem

كنتم في خدمة العلم والانسان 1



Super fan

Mī Lā

انت لست متأخر بل في الوقت المناسب



Sel MA

ما دمت تستطيع أن تحلم، فأنت قادر على تحقيق حلمك و جعله حقيقة.



ريم الساعدي

آخر واحدة وسأتوقف

لا تتخلي ولا تتوقف عن فعل الاشياء التي تحبها



Sel MA

صوب دائما نحو القمر، فإن لم تصب القمر ستصيب أحد النجوم



إبراهيم بوسكين

كن أنت النسخة الوحيدة من نفسك و لا تكن مجرد نسخة مقلدة لشخص آخر كن أنت الأساس، أنت الأصل، أنت الشخص الذي ينمى الجميع أن يكونوا مثله و اترك التقليد للأشخاص الأقل شأنا، للأشخاص الأقل طموحا للأشخاص الذين لا يملكون هدفا في حياتهم.



ريم الساعدي

لا شيء يعوق الارادة والعزيمة



Hilba Lr

لا تضع حدودا لأحلامك، و إسع لتحقيقها دون تردد.



Super fan

طه ياسين

إذا كانت النفوس كبارا ** تعبت في مرادها الأجسام



Super fan

Khatarr Julin

من كبوة إلى كبوة حتى نصل للقمة



Super fan

Flø Rā

قم و بادر بالعمل فلا مستحيل بالأمل



فارسة القرآن

لا حياة مع اليأس و لا يأس مع الحياة



Ōŋ Jīŋe

سواء قلت اقدر او لا اقدر ..في كلا الحالتين انت محق انت وحدك من تحدد مصيرك ارادتك هي وقودك وحافزك للنجاح ضح حلمك

نصب عينيك
سننجح باذن الله



El Āmāl Elākħīr

شدة و نزول و ربي ان شاء الله يوفقكم



Amjad Loulou

استعدوا للبيكالوريا و اعتمدوا على انفسكم



ماري صدام

الشيء الجميل في العلم ان لا احد يستطيع اخذه منك.



Sou Mia

على قدر حلمك تتسع الارض



Sondos Fadwa

الحلم هو مجرد حلم اما الهدف فهو حلم له خطة و موعد نهائي لتحقيقه



Alwasim Elghali

تأكد أن الله لن يضع حلما في عقلك إلا وقد زدك بالقدرات التي تمكّنك من تحقيقه
أتم أملنا للسنة القادمة BAC 2021



Super fan

Gherdaoui A-lazize

إن لم تتألم لن تتعلم .



ريم الساعدي

الفشل اول خطوات النجاح



Super fan

Ad Is Kivök

لا تجعل خوفك من الفشل يؤثر على رغبتك في النجاح.



Abd Eldjalil Euldji

إن الشباب إذا سما بطموحه ****
جعل النجوم مواطني الأقدام



مريم البتول

إياك و الرضى عن نفسك فإنه يضطرك للخمول، و إياك و العجب فإنه يورطك في الحمق و إياك و الغرور فإنه يظهر للناس نقائصك كلها و لا يخفيها إلا عليك



Hilba Lr

لا تضع حدودا لأحلامك، و إسع لتحقيقها دون تردد.



Sondos Fadwa

لقد خلقنا لنمارس الإصرار ..هكذا نستطيع معرفة من نحن



Bembac Bembac

إذا كنت تملك قلما وعقلا فإنه بإمكانك النجاح لكن إذا كان لديك إرادة فإنك ستنجح باذن الله

جرعة أمل

جرعة أمل



Super fan

Accompagnateur Pedago

السلام عليكم...
كيف حالك الأستاذ ش.أ؟
اخترت هذه المقولة لأنها تعجبك:
16. سر نحو الأعلى دائما، فأصحاب الهمم ليس لهم قعر.

...

تحية لجميع الاساتذة...
اللهم ارفع عنا الوباء والبلاء...



Di Niz

الصبر مفتاح الفرج .. اعمل .. واصبر .. وانتظر النجاح .. ولا تنسى ان الله معك
يا امر ملائكته بوضع اجنتها رضا لك يا طالب العلم فلا تيأس من قضاء الله
وقدره انه لا ييأس منه الا القوم الفاسقون ❤️



شروق صياح

ابدأ الآن ولا تنتظر الوقت المناسب ؛ لأنه لن يأت أبدا ما دمت لم تبدأ .



Super fan

رزوف رزوف

استعدوا للبكالوريا من الآن 😊



Sondos Fadwa

❤️ الحلم هو مجرد حلم اما الهدف فهو حلم له خطته و موعد لهائي لتحقيقه



Ines Bzgt

❤️ ستجح عندما تؤمن انك حقا ستجح



شروق صياح

ابدأ الآن ولا تنتظر الوقت المناسب ؛ لأنه لن يأت أبدا ما دمت لم تبدأ .



Hadjer Safa

ارسم مستقبلك بحبر من ذهب وسافر اليه بخطوات قوتك الداخلية واسرارك



Super fan

Soumia Khelifi

Vous devez croire que vous pouvez le faire, mais soyez fort et n'abandonnez pas 🙌

الكاشي 839هـ / 1436 م



هو غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشاني و المدعو الكاشي. ولد في أواخر القرن الثامن الهجري في مدينة كاشان (إيران). درس الكاشي النحو و الصرف و الفقه و المنطق، ثم درس الرياضيات و تفوق فيها. و لا غرابة في ذلك فإن والده كان من أكبر علماء الرياضيات و الفلك. و قد عاش الكاشي معظم حياته في مدينة سمرقند و فيها بنا مرصدا سماه " مرصد سمرقند ".

مؤلفاته: وضع الكاشي مصنفات في علوم مختلفة نذكر منها:

- كتاب " الزيج الخقاني " و فيه ضبط لجداول النجوم.
- "رسالة في الحساب"، "رسالة في الهندسة"، "رسالة الجيب و الوتر" و "رسالة عن إهليجي القمر و عطارد".
- و كان كتابه " مفتاح الحساب " منهلا استقى منه علماء الشرق و الغرب على حد سواء و اعتمدوا عليه في تعليم أبنائهم في المدارس و الجامعات عدة قرون، كما استخدموا كثيرا من المبرهنات و القوانين التي أتى بها و برهنها و ابتكرها.

الجداء السلمي

Produits Scalaires



1. الجداء السلمي لشعاعين

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و المعروف بـ:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{إذا كان} \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{أو} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{إذا كان} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

حالات خاصة:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \quad \text{لأن} \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \quad \text{إذا كان} \quad \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مرتبطين خطيا وكان لهما نفس الاتجاه فإن}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \quad \text{لأن} \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \quad \text{إذا كان} \quad \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مرتبطين خطيا وكانا اتجاهاهما متعاكسين فإن}$$

• نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ بـ $\vec{u}^2$ ونسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ وهكذا $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ وبصفة خاصة إذا كانت A و B نقطتين فإن

$$\overline{AB}^2 = \|\overline{AB}\|^2 = AB^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \quad \text{برهان: إذا كان} \quad \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ شعاعين فإن:}$$

2. العبارة التحليلية للجداء السلمي

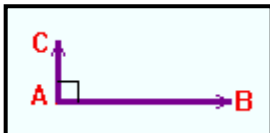
برهان: إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إحداثيات $\vec{u}$ هي (x, y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x', y') فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

البرهان:

إذا كان $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلما متعامدا و متجانسا و كان $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{v}(x', y')$ شعاعين فإن:

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2, \quad \|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2, \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{بعد التعويض في} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \quad \text{و بعد إجراء حسابات بسيطة نجد:}$$



الأشعة المتعامدة:

تعريف: القول أن الشعاعين غير المدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان:

$$\overline{AB} = \vec{u} \quad \text{و} \quad \overline{AC} = \vec{v} \quad \text{يكون المستقيمان} \quad (AB) \quad \text{و} \quad (AC) \quad \text{متعامدين.}$$

ملاحظة: نلاحظ على أن الشعاع المعلوم عمودي على كل الأشعة.

مبرهنة: القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

البرهان:

• إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فمن الواضح أن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

• إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فالقول أن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ يعني $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ أي $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح

و هذا يدل على أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

3. خواص الجداء السلمي

مبرهنة: من أجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقي λ لدينا

$$(1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (2) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (3) \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(4) \quad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (5) \quad \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

البرهان:

نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$ و $\vec{w}(x'', y'')$

$$1. \quad \text{لدينا} \quad \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \\ \vec{v} \cdot \vec{u} = x'x + y'y \end{cases} \text{ و بما أن } xx' = x'x \text{ و } yy' = y'y \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. إحداثيات الشعاع $\vec{v} + \vec{w}$ هي $(x' + x'', y' + y'')$. لدينا إذن:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' \\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + xx'' + yy'' = xx' + xx'' + yy' + yy'' \end{cases}$$

3. إحداثيات الشعاع $\lambda \vec{u}$ هي $(\lambda x, \lambda y)$. لدينا إذن:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda x)x' + (\lambda y)y' = \lambda(xx' + yy') = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

ملاحظة: يتم، يأتبع نفس الطريقة، البرهان على الخاصيتين (3) و (5).

$$\bullet \text{ أمثلة: } 2\vec{u} \cdot \left(-3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}\right) = (2\vec{u}) \cdot (-3\vec{v}) + (2\vec{u}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{w}\right) = -6\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\bullet (2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - 3\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 5\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad \bullet \text{ لدينا:}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad \bullet \text{ لدينا:}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \quad \bullet \text{ لدينا:}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{أو} \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{أو} \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \quad \text{أو} \quad (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

4. الجداء السلمي و الإسقاط العمودي

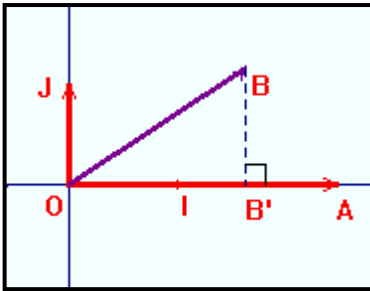
أ-المسقط العمودي لشعاع على محور أو شعاع

تعريف: شعاع $\vec{v}$ حيث $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ و C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على محور $(O; \vec{u})$.

يسمى الشعاع $\vec{v}'$ ، المعروف بـ $\vec{v}' = \overrightarrow{C'D'}$ ، المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O; \vec{u})$ (أو على الشعاع $(\vec{u})$)

ب-الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$



البرهان: نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ بحيث يكون الشعاعان

$\vec{i}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطيا و يكون لهما نفس الاتجاه.

نضع $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ و لتكن B' المسقط العمودي لـ B على (OA) .

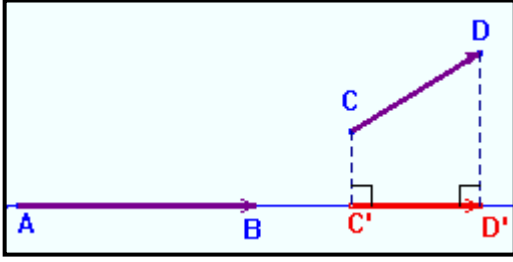
إذن $\vec{v}' = \overrightarrow{OB'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ على الشعاع $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$

لدينا هكذا: $O(0,0)$ ، $A(x_A, 0)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $B'(x_B, 0)$ و منه

$$\overrightarrow{OA}(x_A, 0), \overrightarrow{OB}(x_B, y_B) \text{ و } \overrightarrow{OB'}(x_B, 0)$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_A x_B + 0 \times y_B = x_A x_B \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = x_A x_B + 0 \times 0 = x_A x_B \end{cases} \text{ و منه } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} \quad \text{أي: } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

نتيجة: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير معدومين و كانتا



C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D

على المستقيم (AB) فإن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$

حالات خاصة: • إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و من نفس الاتجاه يكون: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$

• إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين يكون: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

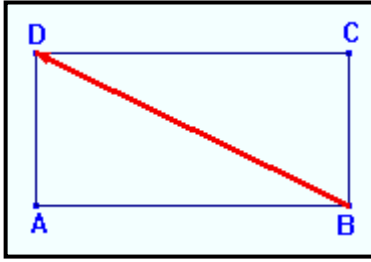
مثال: إذا كان $ABCD$ مستطيلا حيث $AB = 5$ و $CB = 3$ فإن:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -25$$

لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = 3$$

لأن المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BD}$ على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو $\overrightarrow{BC}$.



5. تطبيقات الجداء السلمي

أ- الشعاع الناطمي لمستقيم

تعريف: القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه له (D)

ب- معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. $\vec{n}(a, b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0, y_0)$ نقطة من المستوي

و ليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له. (D) هي إذن مجموعة النقط M

من المستوي بحيث: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. إذا فرضنا $M(x, y)$ يكون لدينا $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$

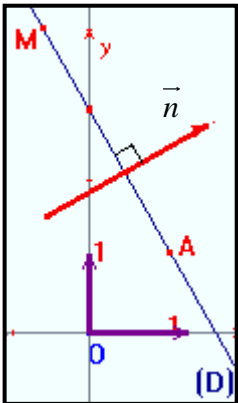
$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

إذن تكون $M(x, y)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$$\text{أي } 0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \text{ أو } ax + by + c = 0 \text{ بوضع } c = -(ax_0 + by_0)$$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a, b)$ شعاع ناظمي له معادلة

من الشكل: $ax + by + c = 0$ حيث c عدد حقيقي.

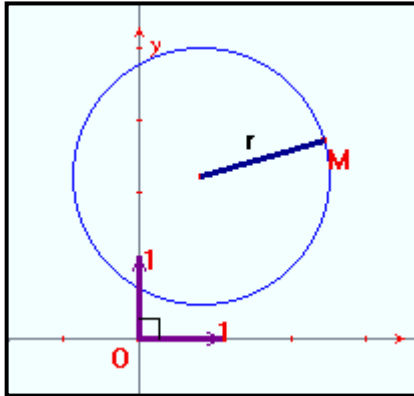


ملاحظة: إذا كانت $ax + by + c = 0$ معادلة لمستقيم (D) فإن $\vec{u}(-b, a)$ شعاع توجيه له و منه الشعاع $\vec{n}(a, b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D) لأنه فعلا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان مادام $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

ج. معادلة دائرة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Ω



* معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ و نصف قطرها $r (r > 0)$.

(C) هي مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث: $\Omega M = r$ أي $\Omega M^2 = r^2$

و هذا يعني أن: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

مبرهنة:

في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ و نصف قطرها $r (r > 0)$

هي: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

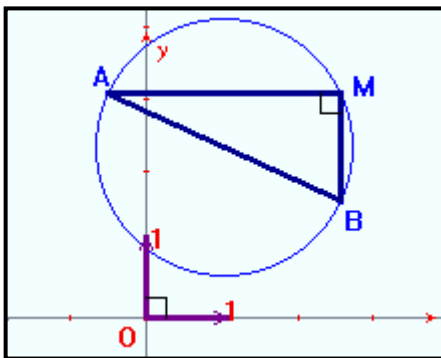
* معادلة دائرة علم قطر لها

لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$. باستثناء A و B هي مجموعة

النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

لدينا كذلك $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B .

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.



6. حساب أطوال و أقياس زوايا

أ- مبرهنة المتوسط

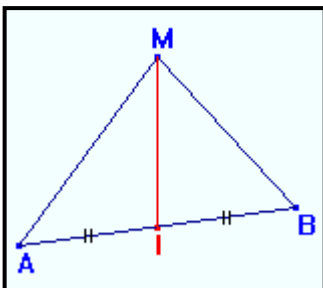
A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. M نقطة كيفية من المستوي.

لدينا: $MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2$

و منه: $MA^2 + MB^2 = 2\vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2$

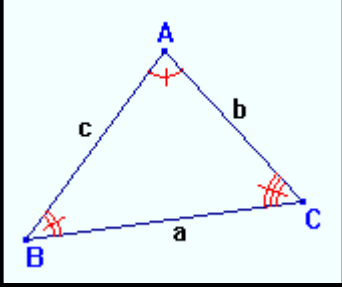
و بما أن: $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ و $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ أي $\vec{IA}^2 = \vec{IB}^2 = \frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$



مبرهنة: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



ب-العلاقات المتريية في مثلث

ABC مثلث. نضع $CBA = B$, $BAC = A$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,

$ACB = C$ و لتكن S مساحة المثلث ABC .

*مبرهنة الكاشي

لدينا: $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

و بما أن: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \cos A$, $\overrightarrow{AC}^2 = b^2$ و $\overrightarrow{AB}^2 = c^2$ فإن: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

و بإتباع نفس الطريقة نثبت أن $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ و $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB = c$, $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (1) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad (2) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (3)$$

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB = c$, $AC = b$ و $BC = a$ و S مساحة المثلث ABC . لدينا العلاقات التالية:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB = c$, $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

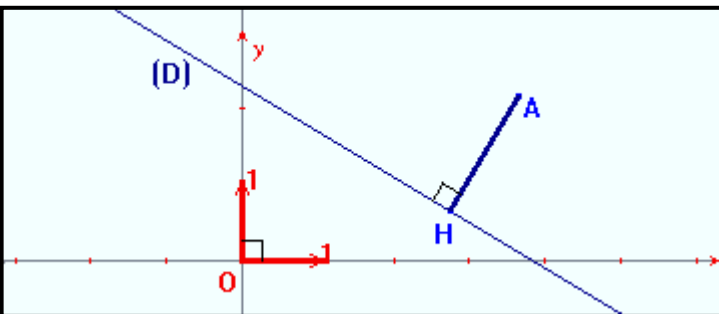
المسافة بين نقطة و مستقيم

تعريف: المسافة بين نقطة A و مستقيم (D) هي المسافة AH بين A و النقطة H مسقطها العمودي على (D) .

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; I, J)$ نقطة $A(x_0, y_0)$ و مستقيما (D) معادلته

$$ax + by + c = 0 \quad \text{حيث} \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) وليكن $\vec{n}$ الشعاع الناطمي للمستقيم (D) الذي إحداثياته هما (a, b) .



مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0, y_0)$

و مستقيم (D) معادلته $ax + by + c = 0$ هي: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ و } \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$



نص التمرين

رقم

1. ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB = AC = BC = 3$ ولتكن النقط A' ، B' و C' منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب. أحسب الجداءات السلمية الآتية:
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2. $ABCD$ مربع. I و J هما منتصفا القطعتين المستقيمتين $[AD]$ و $[DC]$ على الترتيب. برهن أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدان.

3. 1. A ، B و C ثلاث نقط. بين أنه من أجل كل نقطة M : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
 2. استنتج أن ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة H .

4. $ABCD$ مربع طول ضلعه a . I و J هما النقطتان المعرفتان بـ: $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
 1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ}$ ، $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ}$.
 2. بكتابة $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$ أثبت أن $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$. ماذا تستنتج؟

5. ABC مثلث قائم في A . A' نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$. المستقيم المار من A' و الموازي للمستقيم (AC) يقطع المستقيم (BC) في النقطة B' .
 قارن بين العددين $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C}$.

6. ABC مثلث متساوي الساقين حيث $AB = AC = 4$ و $BC = 5$. ولتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.
 1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
 2. لتكن K المسقط العمودي للنقطة B على (AC) . أحسب المسافة CK .

7. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A(1,1)$ ، $B(-2,3)$ و $C(3,2)$.
 أكتب معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

8. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس.
 1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
 2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2,-1)$ و $B(-3,2)$.
 3. بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
 4. هل (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = 0$ دائرة؟

9

ABC مثلث حيث: $AB = 5$ ، $AC = 8$ ، و $BC = 7$.

1. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MC^2 = 38$
2. أحسب A و عين قيمة مقربة إلى 0.1 لكل من B و C .
3. أحسب المسافة BH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

10

ABC مثلث حيث: $BC = 8$ ، $B = 50^\circ$ و $C = 70^\circ$.

1. أحسب A .
2. أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2} .

1

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $B(1,1)$ و $\vec{n}(2,1)$ شعاع ناظمي له.

1

1. عين معادلة للمستقيم (D) ثم بين أنه إذا كانت $M(x, y)$ نقطة من (D) فإن إحداثيها تحقق:
 $x = -k + 1$ و $y = 2k + 1$ حيث k عدد حقيقي كافي.
2. عين القيمة الحدية الصغرى للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(k) = 5k^2 - 10k + 10$
3. لتكن النقطة $A(2;4)$. أحسب AM^2 بدلالة k ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) .

1

ABC مثلث. نضع $AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a$ ، $BAC = A$ ، $CBA = B$ ، $ACB = C$.

2

نرمز بالرمز S إلى مساحة المثلث ABC و بالرمز p إلى نصف محيطه.

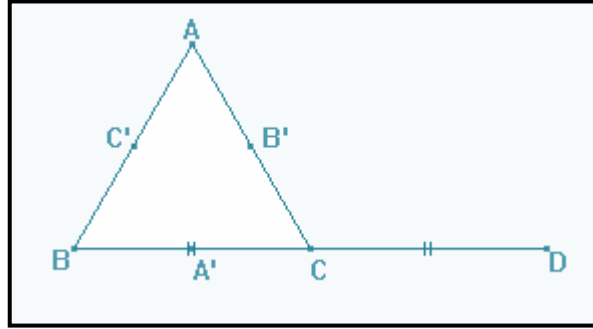
1. بين أن $1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}$ وأن $1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$
2. استنتج $\sin A$ بدلالة p ، a ، b و c ثم بين أن: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
3. نفرض: $a = 15 \text{ cm}$ ، $b = 9 \text{ cm}$ و $c = 11 \text{ cm}$

• أحسب بـ cm^2 المساحة S ثم عين قيمة مقربة لها إلى 0.01

• عين قيمة مقربة لـ A إلى 0.01



حل التمرين 1:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos BAC = 3 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ و منه $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = CD \times CA \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{9}{2}$

(CC') هو ارتفاع في المثلث ABC و منه $(CC') \perp (AB)$ و بالتالي فإن $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

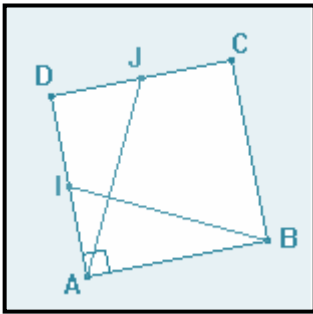
نعلم أن $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً و اتجاههما متعاكسين و بالتالي فإن:

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AB} = -A'B' \times AB = -\frac{3}{2} \times 3 = -\frac{9}{2}$$



حل التمرين 2:

طريقة: لإثبات أن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ متعامدان يمكن إثبات أن (AB) و (CD) متعامدان بمثلث $(A; B, D)$



لنبين أن $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ و من أجل ذلك نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A; B, D)$

لدينا: $A(0,0)$, $J\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B(1,0)$ و $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ و منه $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = \left(\frac{1}{2}\right)(-1) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{و هكذا:}$$

نستنتج إذن أن الشعاعين $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعامدان و منه المستقيمان (AJ) .

1. نضع: $\alpha = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB}$

لدينا: $\alpha = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AB}$ و منه:

$$\alpha = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

و بما أن: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ و $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ فإن $\alpha = 0$

2. إذا كان ABC مثلثا فإن (مثلا) ارتفاعيه اللذين يشملان A و B متقاطعان في نقطة H لأنهما عموديان على

مستقيمين متقاطعين. لنبين أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C .

لدينا حسب السؤال 1 و بأخذ $M = H$: $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

و بما أن $(AH) \perp (BC)$ و $(BH) \perp (AC)$ فإن $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ و $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

و منه: $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ و هذا يعني أن $(CH) \perp (AB)$

نستنتج هكذا أن النقطة H تنتمي إلى الارتفاع الذي يشمل النقطة C .

تعريف: تسمى النقطة H نقطة ارتفاعات " orthocentre " المثلث ABC .

1. لدينا $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ بينما

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}^2 = \frac{a^2}{3}$$

و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{CD} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AB}) = -\frac{a^2}{3}$

2. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ})$ و منه

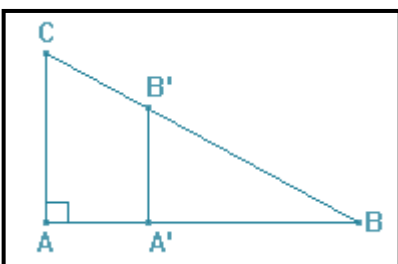
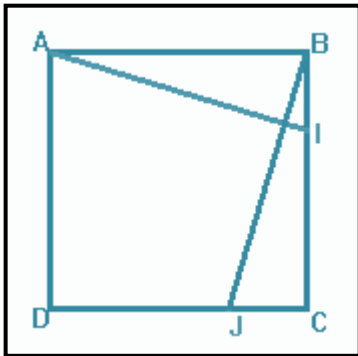
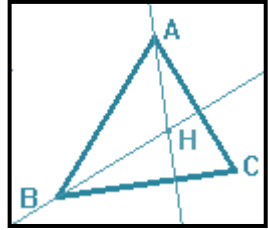
$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ}$$

و بالتالي: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0 - \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 0 = 0$. نستنتج أن $(AI) \perp (BJ)$.

المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AB'}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AA'}$

و منه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = AB \times AA'$ أن للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AA'}$ نفس الاتجاه.

المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{A'C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{A'A}$

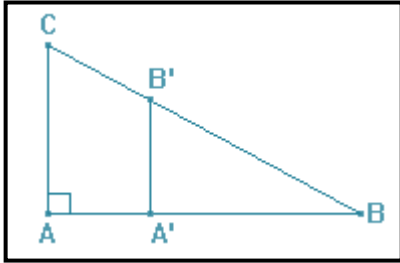


و منه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'A} = -AB \times AA'$ لأن اتجاهي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متعاكسان.

نستنتج مما سبق أن العددين $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C}$ متعاكسان أي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C}$



حل التمرين 6:



المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AB'}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AA'}$

و منه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = AB \times AA'$

لأن للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AA'}$ نفس الاتجاه.

المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{A'C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{A'A}$

و منه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'A} = -AB \times AA'$

لأن اتجاهي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متعاكسان.

نستنتج مما سبق أن العددين $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C}$ متعاكسان أي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C}$



حل التمرين 7:

ليكن (D) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC . إذن (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و شعاع $\overrightarrow{BC}$ ناظمي له. و بما أن

إحداثيات $\overrightarrow{BC}$ هي $(5, -1)$ فإن معادلة (D) هي من الشكل: $5x - y + c = 0$

و بما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن: $5(1) - 1 + c = 0$ و منه $c = -4$

إذن $5x - y - 4 = 0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.



حل التمرين 8:

1. معادلة (C) هي $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2$ أي: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

2. $M(x, y) \in (C')$ يعني أن $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ أي: $(-2-x)(-3-x) + (-1-y)(2-y) = 0$

و منه معادلة (C') هي $x^2 + y^2 + 5x - y + 4 = 0$

3. لتكن (C'') مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ (*)

لدينا $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ و منه نكتب (*) على الشكل: $(x-1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0$

لدينا إذن $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$. (C'') هي إذن الدائرة التي مركزها النقطة $I(1, 0)$ و نصف قطرها 2.

4. نكتب $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = 0$ على الشكل $(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) + 8 = 0$

و بما أن $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ و $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$ يكون لدينا: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = -3$

الطرف الأول للمساواة موجب بينما طرفها الثاني سالب و بالتالي لا توجد نقط $M(x, y)$ إحداثياتها تحقق هذه المساواة.

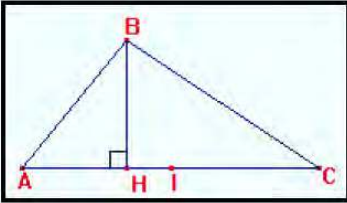
المجموعة (Γ) هي إذن مجموعة خالية.

حل التمرين 9:

1. لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا:

$$2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 38$$

$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2$$
أي $2MI^2 + 32 = 38$ أو $MI^2 = 3$ و بالتالي فإن (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة I و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. بتطبيق مبرهنة الكاشي في المثلث ABC يكون لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$
أي $49 = 64 + 25 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos \hat{A}$ و منه $\cos \hat{A} = \frac{1}{2}$ و بما أن $0 < \hat{A} < 180^\circ$ فإن: $\hat{A} = 60^\circ$.
بتطبيق مبرهنة الكاشي و بعد الحساب نجد: $\cos \hat{B} = \frac{1}{7}$ و باستعمال آلة حاسبة نقرأ: $\hat{B} \approx 81.2^\circ$.
نعلم أن $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ و منه $\hat{C} \approx 38.8^\circ$.
3. لدينا من جهة $S = \frac{1}{2}AC \times BH$
و لدينا حسب قاعدة المساحة $S = \frac{1}{2}AB \times AC \sin \hat{A}$
و منه $AH = AB \sin \hat{A}$ أي $AH = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ لأن $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



حل التمرين 10:

1. من $A + B + C = 180^\circ$ نجد $A = 60^\circ$.
 2. بتطبيق قانون الجيوب في المثلث ABC يكون لدينا:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$
و منه $AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{8 \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ}$ و $AC = \frac{BC \sin B}{\sin A} = \frac{8 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ}$
- نجد هكذا باستعمال آلة حاسبة أن مدور AB إلى 10^{-2} هو 8.68 بينما مدور AC إلى 10^{-2} هو 7.08.

حل التمرين 11:

1. معادلة المستقيم (D) هي من الشكل: $2x + y + c = 0$ لأن $\vec{n}(2, 1)$ شعاع ناظمي له.
بما أن النقطة $B(1, 1)$ تنتمي إلى (D) فإن إحداثياتها تحقق معادلة (D) أي: $2(1) + 1 + c = 0$ و منه: $c = -3$

نستنتج أن $2x + y - 3 = 0$ هي معادلة للمستقيم (D) .

القول أن النقطة $M(x, y)$ تنتمي إلى المستقيم (D) يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (D) . نأخذ مثلا $\vec{u}(-1, 2)$.

$$\overrightarrow{BM} \text{ و } \vec{u} \text{ مرتبطان خطيا يعني أنه يوجد عدد حقيقي } k \text{ بحيث: } \overrightarrow{BM} = k\vec{u} \text{ أي } \begin{cases} x - 1 = -k \\ y - 1 = 2k \end{cases}$$

$$\text{نجد هكذا أن إحداثيات النقطة } M(x, y) \text{ تحقق } \begin{cases} x = -k + 1 \\ y = 2k + 1 \end{cases}$$

2. لدينا: $f(k) = 5k^2 - 10k + 10$ و منه: $f'(k) = 10(k - 1)$ لدينا:

k	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $f'(k)$	-	0	+

بما أن f' تتعدم مغيرة إشارتها عند القيمة 1 فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند 1 هي $f(1)$

لدينا: $5 = f(1) = 5(1)^2 - 10(1) + 10 = 5$. إذن القيمة الحدية الصغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ هي 5.

$$3. \text{ لدينا: } AM^2 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2$$

و منه بعد تعويض x بـ $-k + 1$ و تعويض y بـ $2k + 1$

$$\text{يكون لدينا: } AM^2 = (-k - 1)^2 + (2k - 3)^2 \text{ أي } AM^2 = 5k^2 - 10k + 10$$

لا تنسى أن: المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية مع هذا المستقيم

نلاحظ أن $AM^2 = f(k)$ و منه أصغر قيمة تأخذها AM^2 هي 5

نستنتج هكذا أن المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) هي: $\sqrt{5}$.



حل التمرين 12:

$$1. \text{ لدينا بتطبيق مبرهنة الكاشي: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ و منه } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{cases} 1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} \\ 1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} \end{cases} \text{ و بالتالي:}$$

$$\begin{cases} p(p-a) = \frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c) = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] \\ (p-b)(p-c) = \frac{1}{4}[a-(b-c)][a+(b-c)] = \frac{1}{4}[a^2 - (b-c)^2] \end{cases} \text{ لدينا } p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ و منه:}$$

$$1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \quad \text{و} \quad 1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc} \quad \text{نجد بعد التعويض:}$$

$$2. \text{ نعلم أن } \cos^2 A + \sin^2 A = 1 \text{ و منه } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1 - \cos A)(1 + \cos A)$$

$$\sin^2 A = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2} \quad \text{نجد هكذا}$$

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ أي } S^2 = \frac{1}{4}b^2 c^2 \sin^2 A \text{ و منه } S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{و بما أن الأعداد } p, p-a, p-b, p-c \text{ موجبة فإن}$$

تسمى النتيجة السابقة " قاعدة هيرون - Héron -

$$3. \bullet \text{ لدينا: } p = \frac{35}{2} \text{ و منه بتطبيق قاعدة هيرون يكون لدينا: } S = \sqrt{\frac{35 \times 5 \times 17 \times 13}{16}} = \frac{\sqrt{38675}}{4} \text{ cm}^2$$

$$\text{نجد هكذا: } S \approx 49,16 \text{ cm}^2$$

$$\bullet \text{ نعلم حسب مبرهنة الكاشي أن } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ و منه } \cos A = -\frac{23}{198}$$

$$\text{باستعمال آلة حاسبة نجد: } A \approx 96,67^\circ$$



1. $ABCD$ معين حيث : $AB = 2$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ أحسب الجداءات السلمية التالية :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} ; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

لتكن النقط التالية : $A(4, 2)$; $B(1, 5)$; $C(-1, -1)$

(1) أحسب طويلة كل شعاع من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$

(2) أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

(3) عي $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ وقيس للزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

(4) لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC) ، أحسب AH و CH بتقريب $\frac{1}{10}$.

3. $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \text{ و } \|\vec{u}\| = 3 \text{ و } \|\vec{v}\| = 3$$

(1) احسب ، $(\vec{u} - \vec{v})^2$ ، $(\vec{u} + 2\vec{v})(4\vec{u} - 3\vec{v})$ ،

$$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) \text{ ، } (3\vec{u} - 2\vec{v})^2$$

(2) نضع $\vec{u}(3; -2)$ و $\vec{v}(2; 4)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ ، } \|\vec{u}\| \text{ ، } \|\vec{v}\| \text{ ، } \vec{u}^2$$

4. نعتبر النقط $A(2, -1)$; $B(5, -2)$; $C(4, 3)$

I / * جد معادلة محور القطعة المستقيمة $[BC]$ ،

* جد معادلة الارتفاع المتعلق بالظل $[BC]$ ، * عين نقطة تقاطع

أعمدة المثلث ABC

II / * أكتب معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\omega(-2, -3)$ وتمس المستقيم (AB) في نقطة H

* عين تقاطع الدائرة (C) مع كل من محور الفواصل ومحور الترتيب

* عين تقاطع الدائرة (C) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x + y - 1 = 0$

5. عين معادلة للدائرة (C) في كل حالة من الحالات التالية :

(1) الدائرة التي مركزها $\Omega(1; 2)$ ونصف قطرها 2

(2) الدائرة التي قطرها $[AB]$ حيث $A(-1, 1)$; $B(-3, 2)$ (بطريقتين)

6. أذكر إن كانت المعادلات التالية تمثل دائرة في حالة الإجابة نعم عين مركزها ونصف قطرها :

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y + 5 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y - \frac{9}{2} = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \quad (4)$$

7.

نعتبر النقط التالية : $A(1, 2)$; $B(1, -2)$; $C(-3, -2)$

أ - أثبت أن المثلث ABC قائم في B

ب- أحسب $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ثم عين قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ج- أكتب معادلة الدائرة (S) التي تشمل النقط A, B, C ،

هل تعرف طرق أخر لكتابة معادلة الدائرة (S)

د- عين معادلة لمماس هذه الدائرة في النقطة A ، أذكر طريقة أخرى يمكنك من كتابة معادلة هذا المماس

8.

عين شعاع ناظم لكل من المستقيمين : $(\Delta): x - 2y = 0$; $(\Delta'): -3x + y - 1 = 0$

(1) هل (Δ) و (Δ') متعامدان ؟ هل هما متوازيان ؟

(2) أكتب معادلة للمستقيم الموازي لـ (Δ') ويقطع محور

الفواصل عند $x_0 = 4$

9.

نعتبر النقط :

$A(1; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ و $D(1; 0)$.

(1) أ- أحسب $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

ب- أحسب $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ و $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(2) أ- بين أن المعادلة : $y = -x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- أحسب المسافة $d((AB); C)$

ج- استنتج مساحة المثلث ABC .

(3) لتكن (C) الدائرة التي مركزها A و المارة من النقطة C .

أ- تحقق من أن : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للدائرة (C) .

تحقق من أن : $B \in (C)$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للدائرة (C) في النقطة B

10.

نعتبر النقط : $B(0; \sqrt{3})$, $C(0; -\sqrt{3})$

(1) بين ان مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق : $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ هي دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها وقطر لها .

(2) اكتب معادلة المماسين (T_1) , (T_2) للدائرة (C) في النقطتين B, C على الترتيب

(3) انشئ كل من (T_1) , (T_2) و (C)

11.

نعتبر النقطتين : $A(0; 2)$, $B(-4; -2)$

(1) اوجد احداثيا النقطة A' صورة A بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته 2

(2) جد احداثيا G مركز التحاكي الذي نسبته 2- ويحول A الى B

(3) جد معادلة الدائرة (C') صورة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1; 2)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$ بالتحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2

12.

نعتبر النقط : $A(-1; -3)$, $B(2; 1)$, $C(6; -2)$

(1) جد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

(2) بين ان : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25$ واستنتج $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

(3) (Δ) مجموعة النقط من المستوي بحيث:

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 - 5$, عين طبيعة (Δ)

$D_m : m^2x - (2m + 1)y - 3 = 0$

(4) نعتبر المستقيم (D_m) الذي معادلته الديكارتية

عين قيم m حتى يكون (D_m) و (AB) متعامدان

(C) الدائرة التي معادلتها : $x^2 + y^2 = 4$ و (C') الدائرة التي معادلتها : $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$.
 (1) أرسم (C) و (C') .

(2) تحقق أن (C) و (C') دائرتان متماستان .

(3) لتكن I النقطة ذات الإحداثيين (2;0) .

برهن أن (C') هي صورة (C) بتحكي مركزه I ونسبته k يطلب تعيينها .

(C) الدائرة التي مركزها A(2;3) ونصف قطرها 2

h التحكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{1}{2}$.

(1) أنشئ (C') صورة (C) بواسطة h .

(2) أكتب معادلة للدائرة (C') .

ب) ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) = 0 \quad ?$$

$$(2) \quad \overrightarrow{(MA - MB)} \cdot (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \quad ?$$

لتكن A و B نقطتين من المستوي حيث $AB = 5$

عين ومثل مجموعة النقط M التي تحقق :

$$MA^2 - MB^2 = -15$$

1. أحسب المسافة بين النقطة A(2,3) والمستقيم (D) ذو المعادلة: $y = 2x + 1$

2. عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2,1)$ وتمس المستقيم (D) ذو المعادلة: $x + y - 2 = 0$

3. لتكن (C') مجموعة النقط $M(x, y)$ والتي تحقق المعادلة: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$

أ- بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب- هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x + 2y + 4 = 0$ مماس للدائرة (C') ؟

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد المتجانس $O; \vec{i}, \vec{j}$

لتكن النقط : A 1, 2 ; B -2, 1 ; C 2, 4

الجزء الأول :

(1) أحسب الأطوال OA , OB , AB

(2) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ استنتج طبيعة المثلث OAB

(3) احسب قياس الزاوية $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}$

(4) نسمي G مركز ثل المثلث OAB

احسب مساحة المثلث ABG

الجزء الثاني :

نعتبر المستقيم (Δ) الذي $3x - 4y + 10 = 0$ معادلة له

(1) تحقق أن (Δ) هو نفسه (BC)

(2) احسب بعد النقطة A عن (Δ)

(3) اكتب معادلة للمستقيم (D) المار من A ويعامد (Δ)

(4) جد احداثيا نقطتي تقاطع (D) و حاملي محوري الاحداثيات

الجزء الثالث :

نسمي (Γ_1) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$

و(Γ_2) الدائرة التي (AB) قطر لها

(1) تحقق ان دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

(2) اكتب معادلة للدائرة (Γ_2)

(3) بين ان المستقيم (D') الذي $y = -3x - 5$ معادلة له. مماس للدائرة (Γ_2) في نقطة F يطلب تعيين احداثيها

(4) ادرس الوضع النسبي للدائرتين (Γ_1) و (Γ_2) معيننا احداثي نقط تقاطعهما (ان وجدت).

متتالية فيبوناتشي

1240 / 1170 فيبوناتشي



ليوناردو بيزانو (1170-1250) الملقب بفيبوناتشي أعظم رياضي أوروبا في عصره. ارتبط اسمه بمتتالية عددية عرضها عام 1228 في كتابه المسمى *Liber Abaci* نمذجة وحلا للمشكلة التالية:

نضع في حظيرة زوجا من أرنبين (ذكر وأنثى).

يلد كل زوج عمره شهران على الأقل، كل شهر، زوجا جديدا من أرنبين (ذكر وأنثى).

إذا فرضنا أن ليس هناك أرنب يموت، ما هو عدد أزواج الأرانب بعد n شهرا ؟

وهكذا، إذا كان u_n هو عدد أزواج الأرانب الموجودة خلال الشهر من المرتبة n ، فنحصل على متتالية معرّفة بالشكل:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad n > 1 \quad \text{حيث } u_1 = u_2 = 1$$

في هذه المتتالية، يكون كل حد هو مجموع الحدين السابقين له مباشرة وهي تشرح انتظام توالد الأرانب كما ذكر فيبوناتشي، وقد اكتشف توافقها كذلك مع بعض الظواهر الطبيعية كتفرّع بعض الأشجار التي تنبت في بعض البلدان الباردة وتوجّه بعض النباتات (زهرة الأقحوان، عباد الشمس،...) نحو الشمس.

كما ساهمت هذه المتتالية في إثراء العديد من مواضيع الرياضيات وحلّ الكثير من المعضلات.

المتتاليات العددية

Les Suites Numériques



1. متتالية عددية

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة: • المتتالية (u_n) حيث : $u_n = -5n^2 + 2$ معرفة على $\mathbb{N}$.

• المتتالية v حيث : $v_n = \frac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N} - \{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n \geq 1}$.

• المتتالية w حيث : $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ و نكتب $(w_n)_{n \geq 6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b ($b \in \mathbb{N}$) من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b - a + 1$.

2. طرق توليد متتالية عددية. (يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

1- توليد متتالية عددية بالحد العام:

• إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . ولحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = -n^2 + 3$ معرفة بحددها العام . ويمكن حساب أي حد من الحدود .

📌 **ملاحظة:** يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n = f(n)$ حيث $f: x \mapsto -x^2 + 3$.

ب- توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

• لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحددها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$.
الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u .

📌 **مثال:** نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n$.

لدينا $u_0 = 1$ و منه $u_1 = 3u_0 = 3$ ، $u_2 = 3u_1 = 9$ ، $u_3 = 3u_2 = 27$ و هكذا ...

📌 **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3n^2 + 1$.

(1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

(2) أكتب بدلالة n الحدود u_{3n+2} ، u_{2n} ، u_{n+1} .

📌 **ملاحظة:** المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها. وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -3x^2 + 1$.

حل: (1) $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$ ، $u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ، $u_3 = -3(3)^2 + 1 = -26$

، $u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$ ، $u_{134} = -3(134)^2 + 1 = -53867$.

(2) $u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$ ، $u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$

، $u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1 = -27n^2 - 36n - 11$.

📌 **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{2+u_n}$.

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

(2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} . ثم ضع تخميناً

📌 **ملاحظة:** المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها. و من أجل عدد حقيقي موجب x

: $f(x) = \frac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0, +\infty[$ وبما أنه $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$.

(1) $u_1 = \frac{3}{2+u_0} = \frac{3}{4}$ ، $u_2 = \frac{3}{2+u_1} = \frac{3}{2+\frac{3}{4}} = \frac{12}{11}$ ، $u_3 = \frac{3}{2+u_2} = \frac{3}{2+\frac{12}{11}} = \frac{33}{34}$

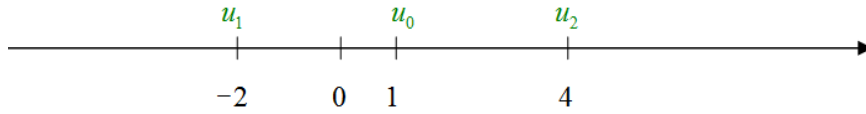
(2) الحاسبات تبين أن $u_{10} \approx 1$ ، $u_{11} \approx 1$ و $u_{12} \approx 1$. نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 انطلاقاً من $n = 10$.

3. التمثيل البياني لمتتالية عددية.

1. متتالية معرفة بالحد العام.

• يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحددها العام على محور

□ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = (-2)^n$.



• يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحددها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).

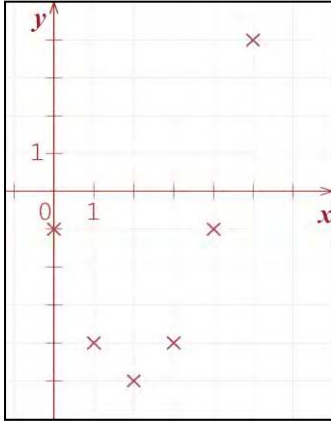
□ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - 4n - 1$.

معرفة (u_n) كذلك $u_n = f(n)$ حيث $f: x \mapsto x^2 - 4x - 1$ نعرف f على المجال

$[0, +\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقاط الممثلة إحداثياتها $(n, f(n))$

من أجل $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$ و $n = 5$ في المستوي المنسوب

إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. مجموعة النقاط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .



2. متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقاط $M(u_n, f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة).

4. اتجاه تغير متتالية عددية.

1. **متتالية متزايدة:** تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

2. **متتالية متناقصة:** تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

3. **متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} = u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

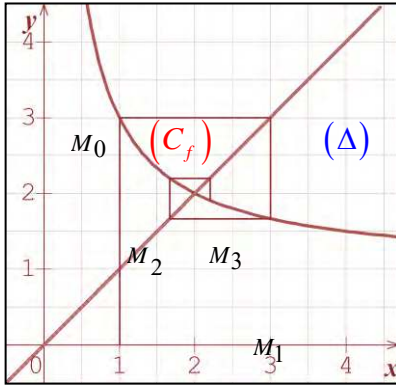
4. **متتالية رتيبة:** المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب).

□ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, I, J) .

◀ **طريقة:** لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة

$$y = x. \text{ لأن المتتالية من الشكل } u_{n+1} = f(u_n) \text{ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط } M(u_n, u_{n+1}).$$



$$\text{حل: } (C_f) \text{ هو الرسم البياني للدالة } f \text{ المرفقة بالمتتالية } (u_n). \text{ أي } f(x) = \frac{2+x}{x}$$

نعرف الدالة f على المجال $]0, +\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. النقطة

$$M_0(u_0, u_1) \text{ أي } M_0(1, 3) \text{ هي أول نقطة نحصل عليها. نسط } M_0 \text{ على } (\Delta) \text{ وفق}$$

(Ox) ثم نسط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على

$$\text{النقطة } M_1(u_1, u_2) \text{ أي } M_1\left(3, \frac{5}{3}\right). \text{ نكرر العملية للحصول على } M_2 \text{ ثم } M_3 \text{ إلى آخره.}$$

□ **مثال:** لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1 = 1$

$$\text{و العلاقة التراجعية } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + u_n.$$

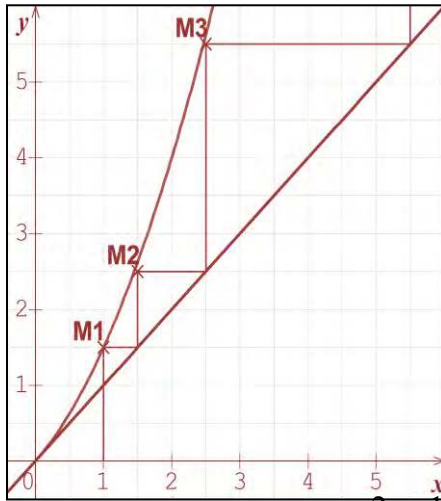
- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, I, J) .

حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) . أي

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \text{ المعرفة على }]0, +\infty[. (\Delta) \text{ المستقيم ذو المعادلة}$$

$$y = x. \text{ نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3}$$

□ **مثال:**



$$\text{أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ المعرفتين على } \mathbb{N} \text{ كما يلي } u_n = \frac{n+1}{3^n} \text{ و } v_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

◀ **طريقة:** لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

$$(1) \text{ ندرس إشارة } u_{n+1} - u_n \text{ أو}$$

$$(2) \text{ نقارن بين } \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ و } 1.$$

$$(3) \text{ إذا وجدت دالة } f \text{ حيث من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = f(n) \text{ ندرس تغيرات الدالة } f.$$

$$\text{حل: } \bullet \text{ اتجاه تغير المتتالية } (u_n). u_{n+1} - u_n = \frac{-2n-1}{3^{n+1}}. \text{ إذن } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ و منه } (u_n) \text{ متناقصة على } \mathbb{N}$$

$$\bullet (v_n) \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{N} \text{ لأن الدالة } f \text{ حيث } f(x) = \frac{2x-1}{x+3} \text{ متزايدة تماما على }]0, +\infty[.$$

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$ عبارة الحد العام إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p + (n - p)r$ حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n - 1)r$ حساب المجموع إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن: $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ عدد الحدود = دليل الالحد الأخير - دليل الحد الأول + 1 الوسط الحسابي تكون الأعداد a, b و c بهذا الترتيب <u>حدودا متتابعة</u> من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c . اتجاه التغير (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها r لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = r$ ، ومنه: • إذا كان r سالبا تماما $r < 0$ فإن المتتالية متناقصة. • إذا كان r موجبا تماما $r > 0$ فإن المتتالية متزايدة. • إذا كان r معدوما $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$. 1. أحسب u_0 و u_1 . 2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r . 3. أحسب ، بدلالة n ، المجموع : $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$. الحل: 1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$ 2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$ نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$. 3. لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$	تعريف نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \text{أو} \quad u_{n+1} = u_n \times q$ عبارة الحد العام إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ حساب المجموع إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن: $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$ عدد الحدود = دليل الالحد الأخير - دليل الحد الأول + 1 حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن: $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$ الوسط الهندسي تكون الأعداد غير المعدومة a, b و c بهذا الترتيب <u>حدودا متتابعة</u> من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c . اتجاه التغير (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها q . نعلم أن: $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه: * إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة . * إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة . * إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة . * إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة . * إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة . * إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد 2 . مثال (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$. 1. أحسب v_2 و v_3 . 2. أحسب ، بدلالة n ، الحد العام v_n . 3. أحسب ، بدلالة n ، المجموع $S = v_1 + v_2 + ... + v_n$. الحل: 1. $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$ ، $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$

$.v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1} \quad .2$ $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$ $S = 3 \times \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) = -3(1-2^n) = 3(2^n - 1) \quad \text{و منه:}$	$.S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2} \quad \text{و منه}$
--	---

6. نهاية متتالية عددية

1. متتالية عددية متقاربة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة. ونكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ أو $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظة: • إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

• إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة).

2. نهاية متتالية عددية معرفة بدالة.

مبرهنة: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$

حيث α عدد حقيقي . إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

3. نهاية غير منتهية لمتتالية عددية.

تعريف: (u_n) متتالية عددية .

• المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $[\alpha, +\infty[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نرمز : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نرمز : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = n^2$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماماً من α لدينا $[\alpha, +\infty[$ $n^2 \in$ ابتداءً من $n \geq n_0$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = -n^2 - 1$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماماً من α لدينا $[-\infty, \alpha[\cap (-n^2 - 1) \neq \emptyset$ ابتداءً من $n \geq n_0$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

مبرهنة: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$

حيث α عدد حقيقي .

• إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

ملاحظة: النتائج و النظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$. عين نهاية المتتالية (u_n) .

حل: المتتالية (u_n) معرفة على الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+2} . \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \text{ إذا } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 . \text{ إذن المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة .}$$

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{n^2+3n+1}{2n+3}$. عين نهاية المتتالية (u_n) .

$$\text{حل: نحول العبارة } u_n = \frac{n^2+3n+1}{2n+3}$$

$$u_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)} = n \times \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{n} = 2 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2} . \text{ و المتتالية } (u_n) \text{ متباعدة .}$$

7. نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر.

مبرهنة: (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n \leq u_n \leq w_n$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

مبرهنة: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \geq v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

مبرهنة: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

مثال: $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \frac{4n}{2n+3}$. • عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$.

حل: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{2 + \frac{3}{n}} = 2$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.



1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20} . 2. أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

* أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = 2v_n + 5$.

1. أحسب v_1 و v_2 . 2. عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1} .

4. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1 . 2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

5. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3 . 2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n . 3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

6. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n . 2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

7. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول. 2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

8. بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.

نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة.. 2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

9. (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $q = \frac{1}{2}$ ، و $u_5 = \frac{1}{32}$.

1. أحسب u_{2007} . 2. أحسب $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{28} + u_{29}$.

لا تتسرع في النظر

الى الاجابة

Answer "yes i do it"



حل السؤال ①:

$$.u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199, u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11, u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2, u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1 \quad 1.$$

$$u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1, u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2 \quad 2.$$

حل السؤال ②:

$$u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 2 + 1 = -3$$

$$u_2 = -2u_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 7$$

$$u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 7 + 1 = -13$$

حل السؤال ③:

$$.v_2 = 2v_1 + 5 = 2(-1) + 5 = 3 \quad \text{و} \quad v_1 = 2v_0 + 3 = 2(-3) + 5 = -1 \quad 1.$$

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} + 5 = 2(2v_n + 5) + 5 \quad 2.$$

$$.v_{n+2} = 4v_n + 15 \quad \text{و منه}$$

$$2v_{n-1} = v_n - 5 \quad \text{و بالتالي} \quad v_n = 2v_{n-1} + 5 \quad \text{من} \quad v_{n+1} = 2v_n + 5$$

$$.v_{n-1} = \frac{v_n - 5}{2} \quad \text{و منه}$$

حل السؤال ④:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r .

$$.u_1 = -3(1) + 2 = -1 \quad \text{و} \quad u_0 = -3(0) + 2 = 2 \quad 1.$$

$$.u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3, \quad n \text{ عدد طبيعي} \quad 2.$$

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

$$.S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2} \quad \text{و منه} \quad S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2-3n+2}{2} \quad 3. \quad \text{لدينا:}$$

حل السؤال ⑤:

$$.v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12, \quad v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6 \quad 1.$$

$$.v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1} \quad 2.$$

$$S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3(1-2^n) = 3(2^n - 1) \text{ منه } S = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

حل السؤال 6:

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... وإنما يجب المقارنة

بين u_n و u_{n+1} من أجل كل عدد طبيعي n .

$$1. \quad u_{n+1} - u_n = 2n \text{ منه } u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - (n+1)] - (n^2 - n)$$

$$2. \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n, 2n \geq 0 \text{ أي من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n \geq 0$$

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

حل السؤال 7:

$$1. \quad v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3 \times 3^n}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} v_n \text{ و } v_0 = \frac{1}{2} \text{ حدها الأول}$$

$$2. \quad \text{بما أن } \frac{3}{2} > 1 \text{ و } v_0 > 0 \text{ فإن المتتالية } (v_n) \text{ متزايدة} \quad v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

حل السؤال 8:

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لنرمز بـ u_n مثلاً إلى عدد سكان المدينة السنة $2005 + n$ و منه $u_0 = 3000$ و $u_2 = 3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005 + n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية

هي: $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$ و منه $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1,21$ و بالتالي $q = 1,1$. نستنتج أن $\alpha = 0,1 = 10\%$.

2. نلاحظ أن $2030 = 2005 + 25$. لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ و منه $u_{25} = 3000 \times (1,1)^{25}$ أي $u_{25} \approx 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

حل السؤال 9:

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

$$\text{إذا } u_{2007} = u_5 \times q^{2007-5} = \frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2002} = \frac{1}{2^{2007}}$$

• نعلم أنه إذا كان $q \neq 1$ لدينا $S = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$ و منه $S = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{30}} \right)$



نص التمرين

رقم

1. (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

1

1. احسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

2. بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. أ. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

ب. عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

2. نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 وتحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

2

1. احسب الحد الأول u_0 .

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3. عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$.

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$.

3. (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

3

1. بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$.

4. (u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحددها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

4

1. عين الأساس r للمتتالية (u_n) .

2. بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6n - 5$.

3. أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

5. نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول u_0 وأساسها r .

5

1. أحسب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

2. أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.

3. استنتج قيمة r واحسب u_0 .

4. تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

5. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

6. جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

6

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

أ- 17 ب- 14 ج- 11 .

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101} - 1}{2}$ ب- $\frac{1 - 3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100} - 1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ ، $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

أ- $x = \frac{4}{3}$ ب- $x = 0$ ج- $x = \frac{3}{4}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي: هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 ب- هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

7

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n = 3 \times 2^n$ ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ ج- $v_n = 2 \times 3^n$

3. المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n - 1)$ ب- $(2^n - 1)$ ج- $2(3^n - 1)$

8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. بين أن $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0 .

2. بين أن $q = 4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$:

9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \alpha$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

أ) نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

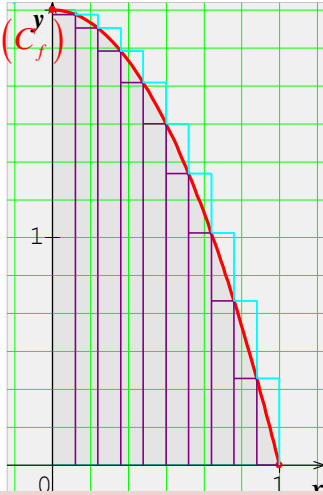
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

10

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, 1]$ بـ:

$f(x) = 2 - 2x^2$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. نريد حساب المساحة A مساحة السطح

المحدود بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين المرفقين بالمعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.



نقسم المجال $[0, 1]$ إلى n جزءًا متساوية حيث أن كل جزء يساوي $\frac{1}{n}$.

كما هو مبين في الرسم المقابل.

ليكن E جزء المستوى المحدود بالمنحنى (C_f) والمحورين. نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E . وعليه لدينا $u_n \leq A \leq v_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

(1) عين u_n و v_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(2) استنتج قيمة A يعطى المجموع $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

لتكن المتتالية (u_n) والمتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي:

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

(1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب بدلالة n .

(2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

(3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. وأن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

(4) عين u_n و v_n بدلالة n .

(5) استنتج نهاية u_n ونهاية v_n .

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد 10000 DA ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن

مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ 1500 DA في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001 + n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1 . كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003؟

2. يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1,05u_n - 1500$.

3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 30000$.

• بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

• ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

5. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائما؟

1. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:
$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

(1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

(2) أكتب u_n بدلالة n .

(3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad a \text{ عدد حقيقي}$$

(1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

(2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.



حل التمرين 1:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

$$u_0 = -2$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 4 \quad \text{1. حساب } u_0, u_1, u_2, \text{ و } u_3.$$

$$u_3 = 7$$

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$$

$$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 \quad \text{2. اثبات أن المتتالية } (u_n) \text{ حسابية.}$$

$$= 3$$

3. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بما أن $r = 3 > 0$ إذن (u_n) متتالية متزايدة.

4. بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

(u_n) نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

$$\text{أي: } 3n - 2 = 1954 \text{ معناه: } u_{652} = 1954 \text{ رتبته. } 653 \text{ لأن الحد الأول هو } u_0.$$

$$n = 652 \in \mathbb{N}$$

5. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{-2 + 3n - 2}{2} \right) \quad \text{و منه}$$

$$= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2} \quad \text{نقوم بالنشر نتحصل على:}$$

ب- تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328$$

$$3n^2 - n - 4 = 2(328) \text{ معناه:}$$

$$3n^2 - n - 660 = 0$$

$$n_1 = 15 \in \mathbb{N}$$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما: $n_2 = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$ و بالتالي من أجل $n = 15$ لدينا: $S_n = 328$



حل التمرين 2:

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 + r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 9 \end{array} \right. \text{ نجمع المعادلات نتحصل: } u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10 \text{ أي: } 4u_0 + 18 = 10 \text{ و بالتالي: } u_0 = -2.$$

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = -2 + 3n$

3. تعيين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

$$u_{49} = 145 \text{ يعني: } n = 49 \text{ أي: } u_n = -2 + 3n = 145$$

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$$

$$= 50 \left(\frac{u_0 + u_{49}}{2} \right)$$

4. حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{49}$.

$$= 50 \left(\frac{-2 + 145}{2} \right)$$

$$= 3575$$

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$.

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$$

$$= 2S + 3(50)$$

$$= 2(3575) + 150$$

$$= 7300$$

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{49}$.



حل التمرين 3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماماً، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$

$$\frac{u_3}{u_1} = q^2$$

من القانون : نضع : $n = 3; p = 1$

$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$

$$q = 4, q = -4$$

$q = -4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q = 4$

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n : $u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right)$$

$$= \frac{-5}{3} (1 - 4^{n+1})$$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6$ $S' = \frac{-5}{3} (1 - 4^{6+1}) = 27305$



حل التمرين 4:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بعدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$

1. تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) .

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-5 + 3r - 5 + 7r = 50$$

$$10r - 10 = 50$$

$$10r = 60$$

$$r = 6$$

و منه:

2. من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 6n - 5$

لدينا: $u_0 = -5$ و $r = 6$ و بالتالي: $u_n = 6n - 5$

3. أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) .

$$\begin{aligned} 6n - 5 &= 2017 \\ n &= 337 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0 = -5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{-5 + 6n - 5}{2} \right) \quad \text{أي:} \\ &= (n+1) \left(\frac{-10 + 6n}{2} \right) \\ &= (n+1)(-5 + 3n) \\ &= 3n^2 - 2n - 5 \end{aligned}$$



حل التمرين 5:

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1. حساب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$\begin{aligned} u_3 + u_5 &= 2u_4 \\ 2u_4 &= 20 \\ u_4 &= 10 \end{aligned}$$

2. أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$. لدينا:

$$\begin{aligned} u_4 &= 10 \\ 2u_4 - u_5 &= 7 \\ 2(10) - u_5 &= 7 \\ u_5 &= 13 \end{aligned}$$

$$r = u_5 - u_4$$

3. استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان: $r = 13 - 10$

$$r = 3$$

$$u_4 = u_0 + 4r$$

حساب u_0 . نأخذ المعادلة: $u_0 + 4(3) = 10$

$$u_0 = -2$$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n - 2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{-2 + 3n - 2}{2} \right) \quad \text{و بالتالي:} \\ &= (n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right) \end{aligned}$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1) \left(\frac{-4 + 3n}{2} \right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4 + 3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n = 5$



حل التمرين 6:

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدها الأول 1 هو:

ب- 14-

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

$$\text{ج-} \frac{3^{100} - 1}{2}$$

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

$$\text{أ-} x = \frac{4}{3}$$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية



حل التمرين 7:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$, (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ لأن:}$$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

$$\text{ب- } v_n = 3 \times 2^{n-1}$$

لأن حدها الأول v_1 .

3. المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

$$\text{أ- } 3(2^n - 1)$$



حل التمرين 8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. اثبات أن $u_1 = 24$ ،

لدينا: $u_0 \times u_2 = 576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0 \times u_2 = u_1^2$$

$$u_1^2 = 576 \quad \text{و بالتالي:}$$

$$u_1 = 24; u_1 = -24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$ استنتاج قيمة u_0 :

$$u_0 + u_1 = 30$$

$$\text{لأن: } u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$$

$$u_0 = 6$$

$$u_1 = u_0 \times q$$

$$\text{2. بين أن } q = 4 \text{ ، نعلم أن: } q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = 6 \times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ،

لدين: $u_n = 6 \times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 6 \times 4^{n+1} - 6 \times 4^n \\
&= 6 \times 4^n \times 4^1 - 6 \times 4^n \\
&= 6 \times 4^n (4 - 1) \\
&= 6 \times 4^n (3) = 18 \times 4^n
\end{aligned}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4. حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) .

$$u_n = 1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6 \times 4^n = 1536$

$$4^n = \frac{1536}{6} = 256$$

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالنالي: $n = 4$. رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0 .

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

معناه:

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \\
&= 24 \left(\frac{1 - 4^n}{1 - 4} \right) \\
&= 24 \left(\frac{1 - 4^n}{-3} \right) \quad \text{أي:} \\
&= -6(1 - 4^n) \\
&= 6(4^n - 1)
\end{aligned}$$



حل التمرين 9:

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

لأن: (u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = \dots = u_0 = 3$ (كل حدودها متساوية)

• من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_0 = n + 1$ و $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3(n + 1)$

ب) $\alpha = 2$ و منه $u_0 = 2$

$$1. \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \text{ و } v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}u_n - 3$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدّها الأول $v_0 = u_0 - 3$.

$$2. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{لدينا } v_n = u_n - 3 \text{ و منه } u_n = v_n + 3 \text{ إذن } u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$$3. \quad \text{لدينا } S = v_0 + 3 + v_1 + 3 + \dots + v_n + 3 = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 3 + 3 + \dots + 3$$

و منه $S = S' + 3(n+1)$ حيث $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

$$\text{لدينا } S' = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \text{ و منه } S = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$$

$$4. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

حل التمرين 10:

(1) مساحة المستطيل الأول المحتوى في E هي $\frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ، مساحة المستطيل المحتوى في E و المجاور

له هي $\frac{2}{n} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$ ، مساحة المستطيل الموالي هي $\frac{2}{n} \left(1 - \frac{9}{n^2}\right)$ وهكذا حتى آخر مستطيل $\frac{2}{n} \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ وبالتالي

$$u_n = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{9}{n^2}\right) + \dots + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$u_n = \frac{2n}{n} - \frac{2}{n^3} (1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2) \text{ و منه } u_n = 2 - \frac{2}{n^3} \sum_{p=1}^{n-1} p^2 \text{ إذن } u_n = 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$$

مساحة المستطيل الأول من الفئة الثانية هي $\frac{2}{n}$ ، مساحة المستطيل الثاني هي $\frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ، مساحة المستطيل الثالث هي

$$\frac{2}{n} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right) \text{ و هكذا إلى آخر مستطيل مساحته } \frac{2}{n} \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$\text{وبالتالي } v_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{9}{n^2}\right) + \dots + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$v_n = 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3} \text{ إذن } v_n = 2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3} \sum_{p=1}^{n-1} p^2 \text{ ومنه } v_n = \frac{2(n+1)}{n} - \frac{2}{n^3} (1+4+\dots+(n-1)^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3} = \frac{4}{3} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(3) \text{ بما أن } u_n \leq A \leq v_n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم فإن } A = \frac{4}{3}.$$



حل التمرين 11:

(1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n .

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} \\ &= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12} w_n \end{aligned}$$

$$\text{إذن المتتالية } (w_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{12} \text{ وحدها الأول } w_0 = 11. \text{ ومنه } w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

(2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n \\ &= 3u_n + 8v_n = t_n \end{aligned}$$

$$\text{إذن المتتالية } (t_n) \text{ متتالية ثابتة على } \mathbb{N}. \text{ ومنه من أجل كل عدد طبيعي } n \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$$

$$(3) \text{ نحسب: } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - v_n) = -\frac{2}{3} w_n$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$$\text{نحسب: } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4} w_n$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} u_n - v_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$(5) \quad -1 < \frac{1}{12} < 1 \text{ لذا } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4.$$

(1) $u_0 = 10000$ ، $u_1 = 90000$ ، u_2 هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.

$$u_2 = 7950 \text{ و منه } u_2 = u_1 + \frac{5}{100} \times u_1 - 1500$$

$$u_{n+1} = 1,05u_n - 1500 \text{ و منه } u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 10000 - 1500$$

$$(3) \text{ نلاحظ أن } f(x) = 1,05x - 1500 , u_{n+1} = f(u_n)$$

$$f \text{ متزايدة و منه المتتالية } (u_n) \text{ رتيبة. و بما أن } u_1 - u_0 < 0$$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

$$(4) . v_{n+1} = u_{n+1} - 30000 = 1,05u_n - 31500$$

$$\text{و منه } v_{n+1} = 1,05v_n \text{ أي } v_{n+1} = 1,05(u_n - 30000)$$

$$\text{إذن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 1,05 \text{ و حدها الأول } v_0 = -20000.$$

$$\bullet \text{ لدينا } v_n = v_0 q^n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n$$

$$\text{بما أن } u_n = v_n + 30000 \text{ فإن } u_n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n + 3 \times 10^4$$

$$\text{و منه } \lim u_n = -\infty$$

$$(5) \text{ لدينا } u_8 = 540,89 \text{ و } u_9 = -1027$$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 فإن رصيده

يكون دائما ابتداء من سنة 2010.

$$I. (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بالعبارة: } \begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

$$\text{أساس هذه المتتالية: } \begin{cases} u_2 = u_0 + 2r = -1 + 2r \\ u_4 = u_0 + 4r = -1 + 4r \end{cases}$$

$$\text{وبالتعويض نجد: } r = 1 \text{ و بما أن } r = 1 > 0 \text{ فإن } (u_n) \text{ متتالية تزايدية}$$

$$2) \text{ ألقب بـ } u_n \text{ لـ } n. u_n = -1 + n$$

3) لحساب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \frac{1}{2}n$$

$$= n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) + \frac{1}{2}n$$

$$= n \left(\frac{-1 + n}{2} \right) + \frac{1}{2}n$$

II. النهاية العددية لمعقدات تلك علاقة التكرار عمة التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

1) تبين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية:

يوجد علاقة التكرار $v_{n+1} = v_n + 2a^2 - a$ أي: $(a^2 - 3) = 1$ نقول $a^2 - 3 = 1$ نجد: $a = -2, a = 2$.

2) تبين قيمة a بحيث تكون (v_n) نهاية هندسية.

يوجد علاقة التكرار $v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a$ أي: $2a^2 - a = 0$ نقول $2a^2 - a = 0$ نجد: $a = \frac{1}{2}, a = 0$.



1.

أ) احسب الحد الأول والثاني والثالث والعاشر للمتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad u_n \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } u_n = 2n - \frac{7}{2}$$

$$(2) \quad u_n \text{ معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } u_n = n^2 - 2n$$

$$(3) \quad u_n \text{ معرفة على } \mathbb{N}^* - 1; 2; 3 \text{ بـ } :$$

$$u_n = \sqrt{2n-8} - \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } (v_n) \text{ للمتتالية المعرفة بـ } \begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$$

(1) علم على حامل محور الفواصل الحدود v_3, v_2, v_1, v_0

دون حسابها.

(2) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (v_n)

(3) احسب الحدود v_3, v_2, v_1, v_0

(ج) مثل بيانيا الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) المعرفة على بـ $u_n = n^2 - 6n + 5$

2.

ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1) \quad u_n = n^2 - 6n + 1 \quad (2) \quad u_n = -5n - \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad u_n = 2\left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (4) \quad u_n = -5\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$(5) \quad u_n = \frac{2n-3}{-n-3} \quad (6) \quad u_n = \frac{n-1}{2n+5}$$

3.

(u_n) متتالية حسابية أساسها r .

عبر عن u_n بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية

(1) الحد الأول : $u_0 = -1$ و $r = 4$.

(2) الحد الأول $u_1 = \frac{3}{2}$ و $r = -5$

(3) الحد الأول : $u_3 = \sqrt{3}$ و $r = \frac{5}{4}$.

4.

(u_n) المتتالية الحسابية التي أساسها 3 وحدها الأول

$$u_2 \text{ حيث } u_2 = -2$$

(1) أكتب u_n بدلالة n .

(2) بين ان 49 حد من حدود المتتالية (u_n) ، عين رتبته

(3) أحسب المجموع : $u_2 + u_3 + \dots + u_{19}$

.5

- (أ) (u_n) متتالية حسابية حيث : $u_{10} = 16$ و $u_{15} = 41$
 أحسب المجموع : $S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \dots + u_{29}$
- (ب) (v_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحيث : $v_3 = 23$ و $v_{10} = 65$
- (1) اوجد الأساس والحد الأول للمتتالية (v_n)
 - (2) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n
 - (3) احسب الحد v_{15} والحد السابع والعشرون
 - (4) احسب المجموع : $S = v_{10} + v_{11} + v_{12} + \dots + v_{29}$

.6

- (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
- $$u_0 = -1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$$
- ونعتبر المتتالية w_n حيث : $w_n = \frac{1}{u_n - 2}$
- (1) برهن أن المتتالية w_n حسابية . عين حدها الأول وأساسها .
 - (2) عبر عن الحد العام w_n بدلالة n .
 - (3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

.7

- (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$
- ونعتبر المتتالية (v_n) حيث : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$
- (1) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية عين حدها الأول وأساسها .
 - (2) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .
 - (3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

.8

- (u_n) متتالية هندسية أساسها q .
- أكتب u_n بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية :
- (1) $u_0 = -\frac{1}{4}$ و $q = 7$.
 - (2) $u_1 = 3$ و $q = 3$.
 - (3) $u_4 = \sqrt{2}$ و $q = -\frac{1}{2}$.
- (ب) (u_n) متتالية هندسية حيث : $u_7 = \frac{1}{216}$ و $u_{10} = \frac{27}{1331}$
- جد الأساس والحد الأول u_1 للمتتالية (u_n)
- (ج) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$.
- (1) أكتب u_n بدلالة n .
 - (2) أحسب المجموع $u_2 + u_2 + \dots + u_9$.

.9

- a, b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية . أحسب a, b و c علماً أن :
- $$\begin{cases} a+b+c = 36,75 \\ abc = 343 \end{cases}$$

10.

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} \text{ وأساسها } q \text{ حيث :}$$

(1) أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج u_1 .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n .

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $s_n = 728$.

11.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $u_0 = 2$ و $u_3 = 9u_1$.

(1) عين أساس المتتالية (u_n) . ثم أحسب u_n بدلالة n

(2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$$u_0 = -1 \text{ و } u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n + 3}$$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) لا حسابية ولا هندسية.

(3) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية.

(4) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n . واستنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(5) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

13.

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0 = 1$ ومن

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}, \quad n \geq 1$$

(1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

(2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$.

• عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية .

• عبر عن v_n بدلالة n .

• استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } 3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$$

1. أحسب الحدود u_1 ; u_2 ; u_3 .

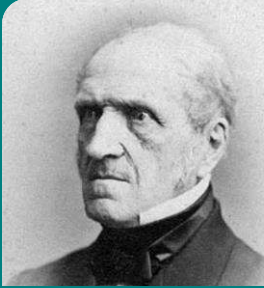
2. (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = u_n - n$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

14.

ميشال شال 1793 / 1880



ولد ميشال شال (Michel Chasles) سنة 1793 بمدينة

ابيرنان بفرنسا. وبعد ما تفوق في التعليم الثانوي التحق

سنة 1812 بالمدرسة المتعددة التقنيات و بعد تخرجه

رفض منصبا هاما في الدولة و عاد إلى مسقط رأسه

لدراسة تاريخ الرياضيات.

أصدر شال أولى أعماله سنة 1827 و كانت عبارة عن

لمحة تاريخية حول الطرائق في الهندسة. عمل سنة 1841

أستاذا بالمدرسة المتعددة التقنيات ثم بجامعة السوربون

ابتداء من سنة 1846. نشر بعد ذلك كتابين مهمين في

الهندسة و قد اشتهر بالعلاقة التي تحمل اسمه.

توفي ميشال شال سنة 1880 بمدينة باريس.

3

الهندسة في الفضاء

Géométrie dans l'espace



1. إنشاء مقاطع رباعي وجوه بمستوي

أ. المقاطع المستوية لمكعب

مقطع مكعب بمستوي (P) هو:

مربع إذا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه المكعب.

- قطعة مستقيمة أو مستطيل إذا كان المستوي (P) موازيا لأحد أحرف المكعب.
- نقطة، مثلث، متوازي أضلاع، شبه منحرف، خماسي أو سداسي في الحالات الأخرى.

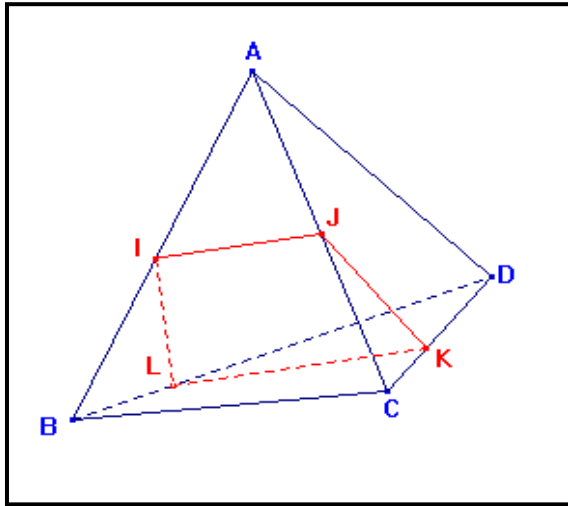
مثال

مقطع المكعب بالمستوي (IJK)	المستوي (IJK) يوازي الحرف $[BC]$	المستوي (LIJ) يوازي الوجه $ABFE$
هو الخماسي $IJKLM$	مقطع المكعب هو المستطيل $IJKL$	مقطع المكعب هو المربع $IJKL$

ب. المقاطع المستوية لرباعي وجوه

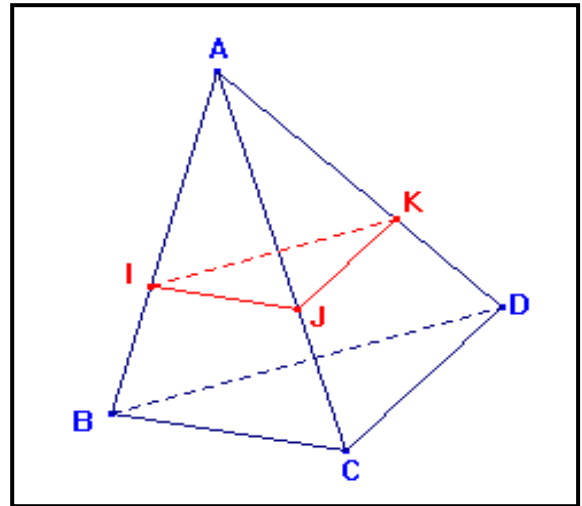
مقطع رباعي وجوه بمستوي (P) هو:

- نقطة أو مثلث إذا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه الرباعي الوجوه.
- نقطة، قطعة مستقيمة، مثلث أو رباعي في الحالات الأخرى.



المستوي (LIJ) يوازي الوجه BCD

وفق الرباعي IJKL



المستوي (KIJ) يوازي الوجه BCD

مقطع رباعي الوجوه هو المثلث IJL

2. الحساب الشعاعي في الفضاء

أ- أشعة الفضاء

نرفق، كما في المستوي، بكل ثنائية نقطية (A, B) من الفضاء الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

• إذا كان $A \neq B$ ، منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB) ، اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو من A نحو B

و طويلة $\overrightarrow{AB}$ التي نرمز إليها بالرمز $\|\overrightarrow{AB}\|$ هي المسافة AB . لدينا: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

• إذا كان $A = B$ ، فإن $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع المعلوم الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{0}$.

• غالبا ما نرمز إلى الأشعة بواسطة حرف مثل: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ...

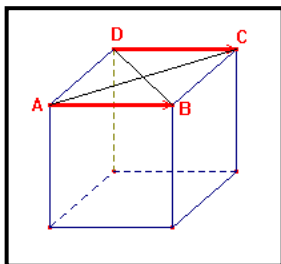
• من أجل كل نقطة O و من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من الفضاء، توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

مبرهنة: A, B, C, D أربع نقط من الفضاء. الخواص الثلاث الآتية متكافئة:

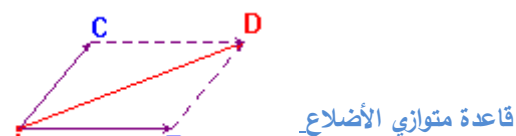
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad (1)$$

(2) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

(3) للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف.



مجموع شعاعين



قاعدة متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



علاقة شال

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

حالة خاصة:

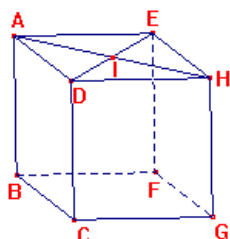
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. نقول أن $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس $\overrightarrow{AB}$ و نكتب $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

جداء شعاع بعدد حقيقي

مبرهنة: من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و من أجل كل عددين حقيقيين k و k' لدينا:

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \quad \bullet \quad (-1)\vec{u} = -\vec{u} \quad \bullet$$

$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u} \quad \bullet \quad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u} \quad \bullet$$



$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AI} \quad \text{مثلا:}$$

$$k\vec{u} = \vec{0} \quad \text{يكافئ} \quad k = 0 \quad \text{أو} \quad \vec{u} = \vec{0}$$

نتائج:

- يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v} = k\vec{u}$
- يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.
- تكون النقط A, B و C في استقامة إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.

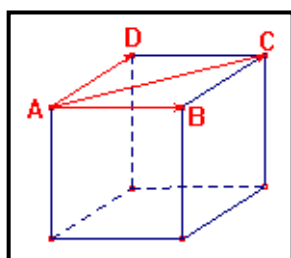
3. للأشعة من نفس المستوى

تعريف

لتكن $\vec{u}, \vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة أشعة و لتكن O نقطة كيفية من الفضاء. نعتبر النقط A, B و C من الفضاء حي $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

القول أن الأشعة $\vec{u}, \vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوى يعني أن النقط O, A, B و C تنتمي إلى نفس المستوى.

مثال:



نلاحظ أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس المستوى و منه فالأشعة

$\vec{u}, \vec{v}$ و $\vec{w}$ الممثلة على الترتيب ب: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ من نفس المستوى.

- يعمم التعريف السابق إلى عدد كفي من أشعة الفضاء.
- إذا كان شعاعه من بين الأشعة الثلاثة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطيه خطيا تكون الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوى.

مبرهنة:

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة من الفضاء حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

تكون الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوى إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين x و y بحيث: $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

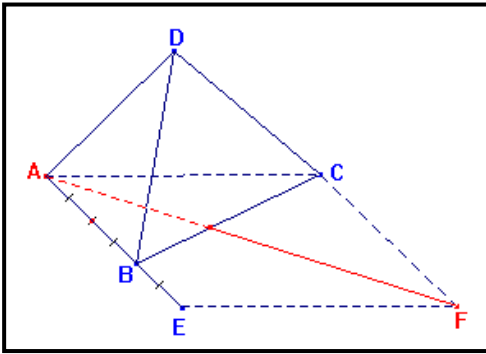
برهان: لنكن O نقطة كيفية من الفضاء و لنكن النقط A ، B و C من الفضاء حيث: $\vec{OA} = \vec{u}$ ، $\vec{OB} = \vec{v}$ و $\vec{OC} = \vec{w}$

القول أن الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوى يعني أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس المستوي (التعريف). النقط O ، A ، B ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فهي تعرف إذن مستويا (OAB) حيث $(O; \vec{OA}; \vec{OB})$ معلم له.

النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن النقطة C تنتمي إلى المستوي (OAB) . يوجد إذن عددين حقيقيين x و y بحيث:

$$\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$$

($x; y$) هما إحداثيا النقطة C بالنسبة إلى المعلم $(O; \vec{OA}; \vec{OB})$ ، و هكذا $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$



مثال:

$$\vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$$

لدينا (الشكل المقابل)

و منه الأشعة $\vec{AF}$ ، $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ من نفس المستوي. و بما أن A مشتركة

فإن النقط A ، B ، C و F تنتمي إلى نفس المستوي.

المرجح و الاستقامية: لإثبات استقامية ثلاث نقط يكفي أحيانا إثبات أن إحدى هذه النقط هو مرجح النقطتين الآخرين.

4. التعليم في الفضاء

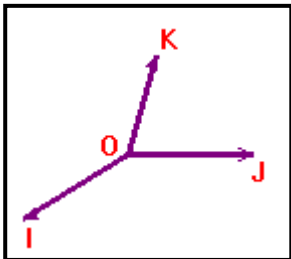
1- المعلم الديكارتي

تعريف: نسمي معلما للفضاء مبدؤه النقطة O كل رباعية نقط $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ليست من نفس المستوي.

إذا وضعنا: $\vec{OI} = \vec{i}$ ، $\vec{OJ} = \vec{j}$ و $\vec{OK} = \vec{k}$ نرمز إلى المعلم السابق بالرمز $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

ملاحظات:

- تشكل النقط O ، I ، J و K رباعي وجوه.
- الأشعة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ليست من نفس المستوي.
- يسمى المستقيم (OI) محور الفواصل و المستقيم (OJ) محور الترتيب



- إذا كانت المستقيمان (OI) ، (OJ) و (OK) متعامدة مثلثي نقول أنه المعلم $(O; I, J, K)$ متعامد.
- إذا كان $(O; I, J, K)$ معلما متعامدا و كان $OI = OJ = OK = 1$ نقول أنه $(O; I, J, K)$ متعامد و متجانس.
- نرمز إلى المستوي (OIJ) بـ $P(O; \vec{i}, \vec{j})$ و إلى المستوي (OJK) بـ $P(O; \vec{j}, \vec{k})$ ، ...

ب- إحداثيات نقطة

مبرهنة: إذا كان $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما للفضاء و كانت M نقطة من الفضاء فإنه توجد ثلاثية أعداد حقيقية

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{بحيث: } (x, y, z) \text{ وحدة}$$

برهان: نضع $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$

النقط O, I, J و K ليست من نفس المستوي و منه المستوي (OIJ)

لا يوازي المستقيم الذي يمر من M و حيث $\vec{k}$ شعاع توجيه له فهما

إذن متقاطعان ولتكن M' نقطة تقاطعهما.

النقطة M' تنتمي إلى $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و منه يوجد عددين حقيقيين

$$\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{و } x, y \text{ وحيدتين بحيث:}$$

الشعاعان $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec{k}$ مرتبطان خطيا و منه يوجد عدد حقيقي وحيد z

بحيث: $\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$ لدينا حسب علاقة شال:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MM'} \quad \text{ومنه: } \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

□ مثال:

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد للفضاء حيث: $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$

علم النقطة M ذات الإحداثيات $(2, 3, -3)$

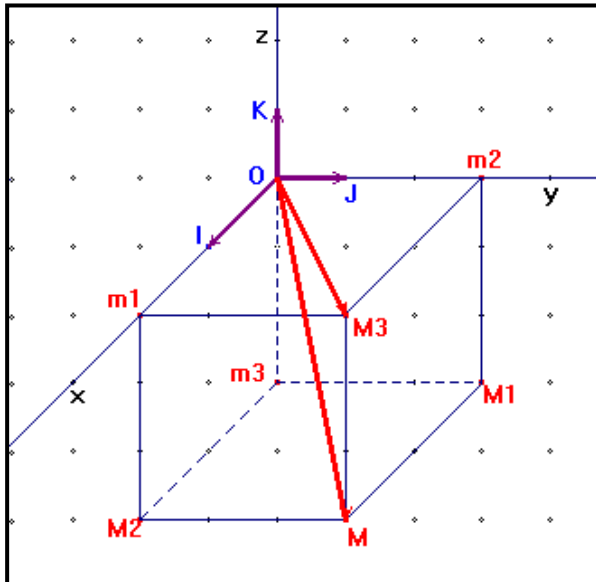
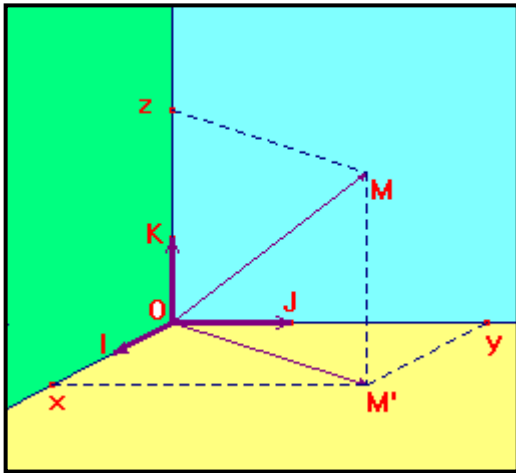
طريقة: لتعليم نقطة M علمت إحداثياتها (x, y, z)

في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يمكننا تعليم النقط $m_1, m_2, m_3, M_1, M_2, M_3$ و

ثم رسم متوازي المستطيلات $M_1M_2M_3M$

حيث: $m_3(0, 0, z)$ ، $m_2(0, y, 0)$ ، $m_1(x, 0, 0)$

$M_3(x, y, 0)$ ، $M_2(x, 0, z)$ ، $M_1(0, y, z)$



تعريف: $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء. $\vec{u}$ شعاع ولتكن M النقطة الوحيدة التي تحقق $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

إحداثيات الشعاع $\vec{u}$ هي (x, y, z) إحداثيات النقطة M في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. ويمكن أن نكتب $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

وهكذا كل شعاع $\vec{u}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

5. الحساب على الإحداثيات

نتائج: $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء.

- إذا كان $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ شعاعين من الفضاء وكان α عددا حقيقيا فإن:
 - $\vec{u} = \vec{0}$ يعني $x = y = z = 0$
 - $\vec{u} = \vec{v}$ يعني $x = x', y = y', z = z'$
 - إحداثيات $(\vec{u} + \vec{v})$ هي $(x + x', y + y', z + z')$ و إحداثيات $\alpha\vec{u}$ هي $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
- إذا كانت $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ نقطتين من الفضاء فإن:
 - إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
 - إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

أ. الأشعة من نفس المستوى:

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء. $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$ و $\vec{w}(a'', b'', c'')$ ثلاثة أشعة من الفضاء.

تكون الأشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوى إذا وجد عددين حقيقيين x و y بحيث $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$$\begin{cases} ax + a'y = a'' \\ bx + b'y = b'' \\ cx + c'y = c'' \end{cases} \quad \text{و هذا يعني أن الجملة} \quad \text{تقبل حلا } (x, y) \text{ في } \mathbb{R}^2$$

ب. معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء. ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(a, b, c)$.

$M(x, y, z) \in (D)$ يعني $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ أي $x - x_A = \alpha a$ و $y - y_A = \alpha b$ و $z - z_A = \alpha c$

و هذا يعني إذا كان $abc \neq 0$ أن $\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$ أي أن مثلاً: $\begin{cases} b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0 \\ c(x - x_A) - a(z - z_A) = 0 \end{cases}$

أما إذا كان أحد الأعداد a, b, c معدوماً فإن مثلاً في حالة $c = 0$: $\begin{cases} b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0 \\ z = z_A \end{cases}$

أما إذا انعدم عدداً من الأعداد a, b, c فإن مثلاً في حالة $a = b = 0$: $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ و يبقى z كفي.

حالات خاصة: نرمز إلى محور الفواصل بـ (Ox) ، إلى محور الترتيب بـ (Oy) وإلى محور الرواق بـ (Oz) الجدول التالي يحدد الشروط الكافية و

اللازمة التي يجب أن تحققها (x, y, z) إحداثيات نقطة M لكي تنتمي إلى المحور المعني:

المحور	(Ox)	(Oy)	(Oz)
مميزاته	$y = z = 0$	$z = x = 0$	$x = y = 0$

6. المسافة بين نقطتين

أ. العبارة التحليلية لطويلة شعاع

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. نعتبر الشعاع $\vec{u}(x, y, z)$

و لنكن النقطة M التي تحقق $\vec{OM} = \vec{u}$. نعلم أن $\|\vec{u}\| = OM$

نعتبر M_1, M_2, M_3 و M' النقط المعرفة كما يلي:

$$\vec{OM}' = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \vec{OM}_3 \text{ و } \vec{OM}_3 = z\vec{k}, \vec{OM}_2 = y\vec{j}, \vec{OM}_1 = x\vec{i}$$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OMM' نحصل على:

$$OM^2 = OM'^2 + MM^2 \text{ و بما أن } MM^2 = OM_3^2 \text{ فإن:}$$

$$OM^2 = OM'^2 + OM_3^2$$

باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OM_1M' نحصل على: $OM'^2 = OM_1^2 + M_1M'^2$ و بما أن: $M_1M'^2 = OM_2^2$ فإن:

$$OM'^2 = OM_1^2 + OM_2^2 \text{ نجد هكذا أن: } OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2 \text{ و منه:}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ أي } OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب طويلة الشعاع $\vec{u}(x, y, z)$ بـ: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

مثال: طويلة الشعاع $\vec{u}(-2, 1, 3)$ هي $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}$ و منه $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$

ب. المسافة بين نقطتين

علما أن $AB = \|\overline{AB}\|$ و بتطبيق المبرهنة السابقة على الشعاع $\overline{AB}$ نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس تحسب المسافة بين النقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ بـ:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

مثال: المسافة بين النقطتين $A(1, -1, 2)$ و $B(0, -2, 3)$ هي $AB = \sqrt{(0-1)^2 + (-2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$

ملاحظة: عند إجراء الحسابات غالباً ما يفضل مربع المسافة على المسافة.

3. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم:

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء. α عدد حقيقي موجب تماماً. (S) سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α . لتكن $M(x, y, z)$ نقطة كيفية من الفضاء.

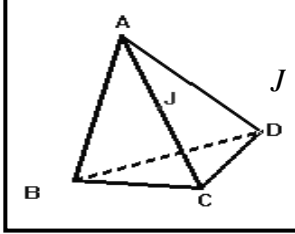
$M \in (S)$ يعني $OM = \alpha$ أي $OM^2 = \alpha^2$ و هذا يعني $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$

إذن $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ هي معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها O و نصف قطرها α .



نص التمرين

رقم



1. $ABCD$ رباعي وجوه. J نقطة من الحرف $[AC]$

أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (P) الذي يمر من النقطة J والموازي للمستقيمين (AB) و (CD) محددا طبيعته.

1

2. $ABCD$ رباعي وجوه. I, J و K ثلاث نقط تنتمي على الترتيب إلى الأحرف $[BC]$, $[AC]$ و $[AD]$.

المستقيمان (JK) و (CD) غير متوازيين.

1. عين تقاطع المستوي (IJK) مع الوجبين ABC و ACD .

2. بين أن المستقيمين (JK) و (CD) يتقاطعان في نقطة M و حيث أن المستقيم (IM) محتوي في المستويين (IJK) و (BCD) . أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (IJK) .

2

3. $ABCDEFGH$ مكعب. لتكن النقط I, J و K حيث I منتصف $[FG]$, $4\overrightarrow{FJ} = 3\overrightarrow{FE}$ و $2\overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{DC}$

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{FG}$.

2. بين أن الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AK}$ مرتبطان خطيا. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (IJ) و (AK) ؟

3

4. $ABCD$ رباعي وجوه. I منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل الوجه ABC . نعتبر النقطتين H و K المعرفتين بـ:

$$\overrightarrow{DH} = \frac{3}{7}\overrightarrow{DG} \text{ و } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DI}$$

1. عبر عن كل من الشعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AG}$.

2. بين أن النقط A, H و K في استقامية.

4

5. نعتبر على المكعب $ABCDEFGH$ النقطتين M و N المعرفتين بـ: $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ و $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MN}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{DB}$.

2. هل الأشعة $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ من نفس المستوي؟

5

6. $ABCD$ رباعي وجوه. لتكن النقط I منتصف $[AD]$, J منتصف $[BC]$ و G مركز ثقل المثلث ABC .

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ مرة بدلالة $\overrightarrow{DG}$ مرة أخرى بدلالة الشعاع $(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DJ})$.

2. بين أن النقط D, G, I و J تنتمي إلى نفس المستوي.

6

7. $ABCDEFGH$ مكعب. P منتصف $[EH]$, Q منتصف $[AB]$ و R منتصف $[CG]$.

7

$$1. \text{ بين أن } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ وأن } \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH})$$

2. بين أن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان.

3. بين أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR) هو سداسي منتظم.

8

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. O مركز الوجه $EFGH$ و P مركز الوجه $ABCD$.

1. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{OP}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{GB}$.

2. نهتم فيما يلي بالهرم الذي رأسه O وقاعدته $ABCD$ ولتكن النقط Q, K, L و M حيث:

$$Q \text{ مركز ثقل المثلث } (ODC), K \text{ منتصف } [AB], M \text{ منتصف } [CD] \text{ و } \overrightarrow{OL} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$$

- أثبت أن النقط O, K, M, P, Q و L تنتمي على نفس المستوي.
- أثبت أن $5\overrightarrow{KL} - 3\overrightarrow{KQ} = \vec{0}$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقط Q, K و L ؟

9

$$H \left(5, -\frac{15}{2}, -\frac{17}{2} \right) \text{ و } C(4, 0, -2), B(2, 5, 1), A(2, 1, -3) \text{ نعتبر النقط } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ معلم ديكارتي للفضاء.}$$

1. عين إحداثيات النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. بين أن النقط I, D و H في استقامية علما أن النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

10

$$C(-1, -4, 3) \text{ و } B\left(2, -1, \frac{3}{2}\right), A(1, -2, 2) \text{ نعتبر النقط } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ معلم ديكارتي للفضاء.}$$

1. عين معادلات للمستقيم (AC) .
2. هل تنتمي النقط O, A, B و C إلى نفس المستوي ؟

1

$$\text{نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ النقط } A(8, 5, 2), B(4, 8, 2) \text{ و } C(5, 1, 2)$$

1. احسب المسافات AB, AC و BC .
2. بين أن المثلث ABC قائم ومتقايس الساقين.

1

$$\text{الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ نعتبر النقط } A(3, -2, 2\sqrt{3}), B(4, 3, 0) \text{ و } C(1, 5, 2)$$

1. عين معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها النقطة O وتشمل النقطة A .
2. هل تنتمي النقطتان B و C إلى سطح الكرة (S) ؟
3. عين إحداثيات نقط تقاطع سطح الكرة (S) مع محور الرواقم (Oz) .

1

2

$$\text{نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ النقطتين } A(3, 0, -3) \text{ و } B(2, 0, -2)$$

1. عين إحداثيات النقطة G بحيث $\vec{0} = 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GA}$. ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للنقطتين A و B ؟

2. نرفق بكل نقطة $M(x, y, z)$ العدد الحقيقي $f(M)$ المعروف بـ $f(M) = -2MA^2 + 3MB^2$

ولتكن (Γ_k) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $f(M) = k$ حيث k عدد حقيقي.

- عبر عن $f(M)$ بدلالة x, y و z ثم عين المجموعتين (Γ_4) و (Γ_{-12}) .
- ناقش حسب قيم k طبيعة المجموعة (Γ_k) .

1

3

1 نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط $B(0,0,-4)$ ، $A(0,0,2)$ ، $E(0,0,-1)$

4 $C(\sqrt{5},0,1)$ و $D(\sqrt{5},0,-3)$. ليكن (S) سطح الكرة التي مركزها E ونصف قطرها 3.

1. هل تنتمي النقاط A ، B ، C و D إلى نفس المستوي؟

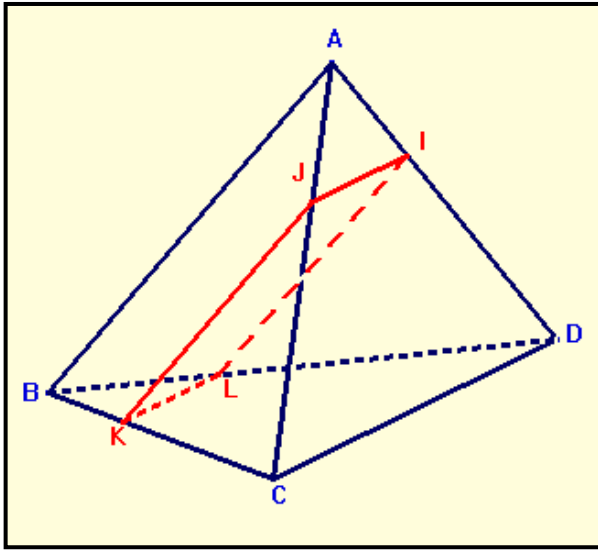
2. ما هي معادلة (S) ؟ تحقق أن A ، B ، C و D تنتمي إلى (S) . عين نقط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات.

3. أدرس حسب قيم العدد الحقيقي a الأوضاع النسبية للسطح (S) والمستوي (P_a) ذو المعادلة $z = a$.

4. عين مركز ونصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}) .



حل التمرين 1:



بما أن المستويين (P) و (ABC) يوازيان المستقيم (AB)

فهما يتقاطعان وفق مستقيم (JK) يوازي المستقيم (AB) .

نرسم المستقيم (JK) الموازي للمستقيم (AB) مع $K \in [BC]$

بإتباع نفس المنهجية نرسم المستقيم (IJ) الموازي لـ (CD)

حيث I نقطة من $[AD]$. مقطع رباعي الوجوه $ABCD$

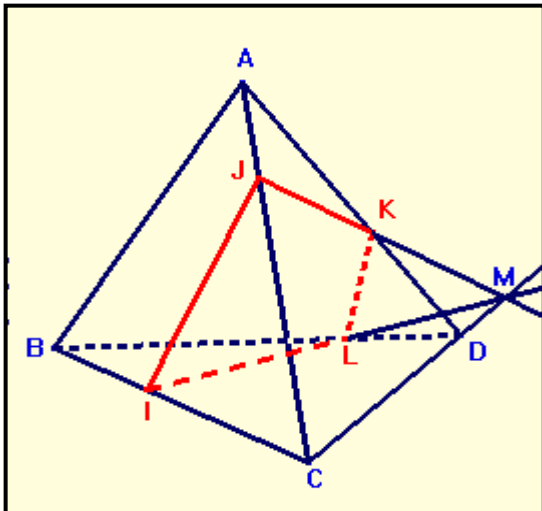
بالمستوي (P) هو إذن الرباعي $IJKL$.

بما أن (IL) يوازي (AB) و (KL) يوازي (CD) فإن

المقطع $IJKL$ متوازي أضلاع.



حل التمرين 2:



1. المستوي (IJK) يقطع الوجه ABC وفق القطعة $[IJ]$

و الوجه ACD وفق القطعة $[JK]$.

2. المستقيمان (JK) و (CD) ينتميان إلى المستوي ACD

و بما أنهما غير متوازيين فهما متقاطعان في نقطة M . النقطة I

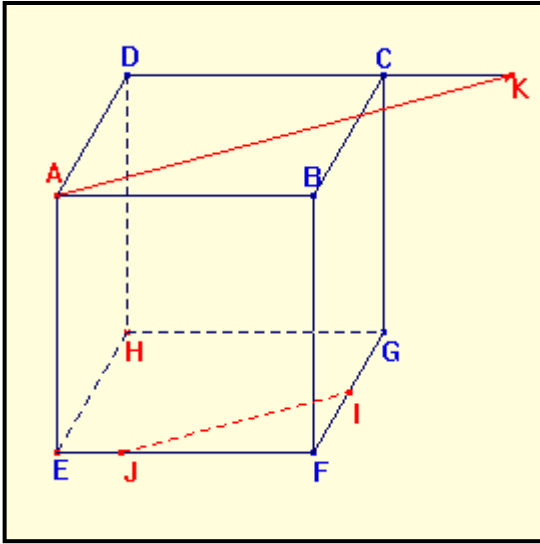
تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD) . كذلك النقطة M

تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD) لأنها تنتمي إلى

المستقيمين (JK) و (CD) . و منه المستقيم (IM) محتوي في

المستويين (IJK) و (BCD) .

3. يتقاطع المستقيمان (IM) و (BD) في نقطة L . مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ هو إذن الرباعي $IJKL$.



$$\vec{IJ} = \vec{IF} + \vec{FJ} = -\frac{1}{2}\vec{FG} + \frac{3}{4}\vec{FE} \quad 1.$$

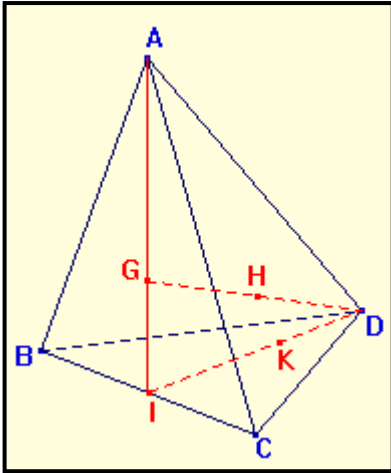
$$\vec{AK} = \vec{AD} + \vec{DK} = \vec{AD} + \frac{3}{2}\vec{DC} \quad \text{و بما أن:}$$

$$\vec{AK} = \vec{FG} - \frac{3}{2}\vec{FE} \quad \text{فإن: } \vec{DC} = -\vec{FE} \text{ و } \vec{AD} = \vec{FG}$$

$$2. \text{ لدينا مما سبق: } \vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AK} \text{ و منه فالشعاعان}$$

$\vec{AK}$ و $\vec{IJ}$ مرتبطان خطياً.

نستنتج هكذا أن المستقيمين (AK) و (IJ) متوازيان.



$$\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{DH} = \vec{AD} + \frac{3}{7}\vec{DG} = \vec{AD} + \frac{3}{7}(\vec{DA} + \vec{AG}) \quad 1.$$

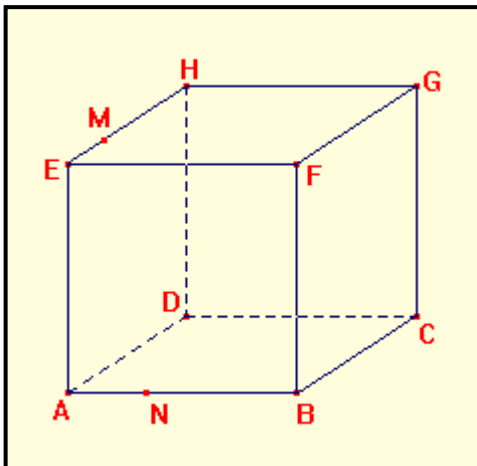
$$\vec{AH} = \frac{4}{7}\vec{AD} + \frac{3}{7}\vec{AG} \quad \text{و منه:}$$

$$\vec{AK} = \vec{AD} + \vec{DK} = \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{DI} = \vec{AD} + \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{AI})$$

$$\vec{AK} = \vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\vec{AG} \quad \text{و منه: } \vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AG}$$

$$\vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AG} \quad \text{نجد هكذا:}$$

$$2. \text{ نلاحظ أن: } \vec{AK} = \frac{7}{6}\vec{AH} \text{ و منه الشعاعان } \vec{AK} \text{ و } \vec{AH} \text{ مرتبطان خطياً. إذن } A, H \text{ و } K \text{ في استقامة.}$$



$$1. \text{ لدينا باستعمال علاقة شال: } \vec{MN} = \vec{ME} + \vec{EA} + \vec{AN}$$

$$\text{و بما أن } \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB} \text{ و } \vec{HE} = \vec{DA}, \vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{HE} \text{ فإن:}$$

$$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{AB}) \text{ أي } \vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{DA} + \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB} \quad \text{و هكذا نجد}$$

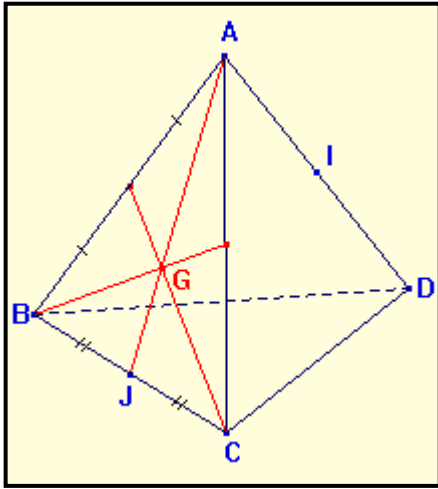
$$2. \text{ لدينا باستعمال علاقة شال: } \vec{DB} = \vec{HB} - \vec{HD}$$

$$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}(\vec{HB} - \vec{EA}) \text{ فإن } \vec{HD} = \vec{EA} \text{ و بما أن}$$

نجد هكذا $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$ ومنه فالأشعة $\overrightarrow{MN}$ ، $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ من نفس المستوي.



حل التمرين 6:



1. لدينا من جهة باستعمال علاقة شال وعلمنا أن $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$$

لدينا من جهة ثانية $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DJ}$ ومنه:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DJ})$$

2. من السؤال الأول نجد: $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DJ}$. نستنتج أن النقط

D, G, I, J تنتمي إلى نفس المستوي.



حل التمرين 7:

1. لدينا باستعمال علاقة شال $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ}$ و بما أن $\overrightarrow{PH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ فإن:

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ}$$

و علمنا أن $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ فإن $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA})$ و بما أن $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$

$$(1) \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{نستنتج هكذا أن:} \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad \text{علمنا أن} \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{لدينا} \quad \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GR})$$

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HG}) \quad \text{فإن:} \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{GR}) = \vec{0} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}) \quad \text{و منه} \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HG} = \vec{0}$$

2. من العلاقة (1) نستنتج أن المستقيم (PQ) يوازي المستوي (ACH) و من العلاقة (2) نستنتج أن المستقيم

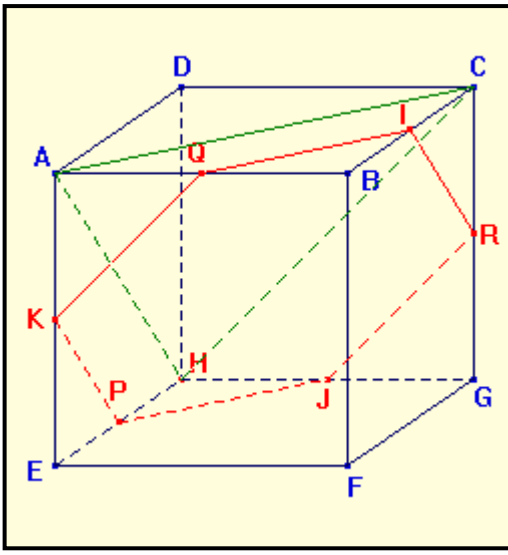
(QR) يوازي المستوي (ACH) . و علمنا أنه يتوازي مستويان إذا و فقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين

كل منهما يوازي المستوي الآخر فإن المستويين (PQR) و (ACH) متوازيان.

3. المستوي (ABC) يقطع المستويين المتوازيين (PQR)

و (ACH) وفق مستقيمين متوازيين (AC) و (QI) و منه فإن

النقطة I منتصف القطعة $[BC]$ و $QI = \frac{1}{2}AC$. لدينا كذلك:



J منتصف $[GH]$ و K منتصف $[AE]$ حيث:

$$.KP = \frac{1}{2}AH \text{ و } .JR = \frac{1}{2}CH$$

و بما أن أقطار أوجه المكعب متقايسة فإن:

$$QI = IR = RJ = JP = PK = KQ$$

لدينا كذلك $QJ = IP = KR$ (متوسطات للمكعب). نستنتج مما

سبق أن مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (PQR)

هو السداسي المنتظم $QIRJPK$.



حل التمرين 8:

1. لدينا: $\vec{GC} = \vec{FB} = \vec{EA}$ و منه $GCAE$ متوازي أضلاع

إذن $\frac{1}{2}\vec{EG} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ أي $\vec{OG} = \vec{PC}$ و منه $\vec{OP} = \vec{GC}$.

لدينا حسب علاقة شال: $\vec{OP} = \vec{GC} = \vec{GB} + \vec{BF} + \vec{FC}$

و بما أن: $\vec{BF} = \vec{CG} = -\vec{OP}$ و $\vec{FC} = \vec{ED}$ فإن:

$$\vec{OP} = \vec{GB} - \vec{OP} + \vec{ED}$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{GB} + \vec{ED}) \text{ نجد هكذا}$$

2.

• لإثبات أن النقط O, K, M, P, Q و L من نفس المستوي يكفي مثلاً إثبات أن النقط P, Q و L تنتمي إلى

المستوي (OKM) .

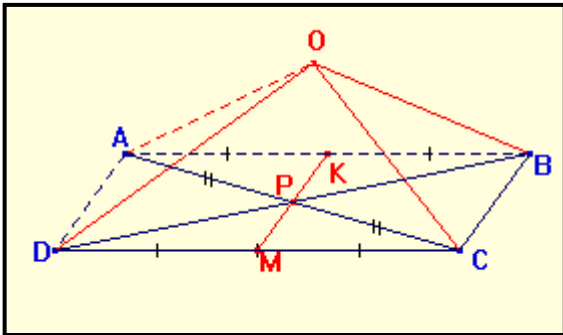
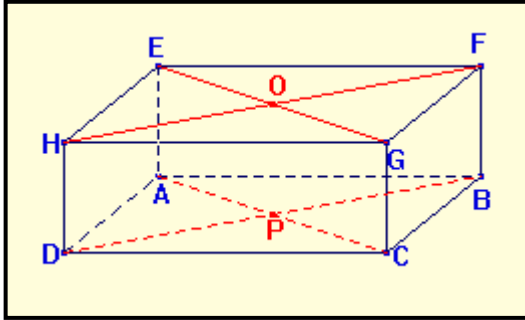
$$\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DC} = \vec{DM} \text{ لدينا:}$$

و منه: $(KM) \parallel (AD) \parallel (BC)$.

يمر إذن المستقيم (KM) من النقطة P . $\left(\vec{KP} = \frac{1}{2}\vec{BC}\right)$

نستنتج أن النقطة P تنتمي إلى المستوي (OKM) .

لدينا: النقطة Q تنتمي إلى المستقيم (OM) $\left[\vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{OM}\right]$ و منه فالنقطة Q تنتمي إلى المستوي (OKM) .



لدينا: النقطة L تنتمي إلى المستقيم (OP) $\left[\overrightarrow{OL} = \frac{4}{5} \overrightarrow{OP} \right]$ و بما أن المستقيم (OP) محتوي في المستوي (OKM)

فإن النقطة L تنتمي إلى المستوي (OKM) .

• نثبت باستعمال علاقة شال انطلاقا من العلاقة $\overrightarrow{OL} = \frac{4}{5} \overrightarrow{OP}$ والعلاقة $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OM}$ أن:

$$\overrightarrow{KL} = \frac{2}{5} \overrightarrow{KM} - \frac{1}{5} \overrightarrow{OK} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{KQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{KM} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OK} \quad \text{و منه:} \quad 5\overrightarrow{KL} - 3\overrightarrow{KQ} = \vec{0}$$

نستنتج هكذا أن النقط Q, K, L في استقامية.



حل التمرين 9:

1. القول أن $ABCD$ متوازي أضلاع يعني (مثلا) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $(2, -5, -3)$

إذا فرضنا أن إحداثيات النقطة D هي (x, y, z) فإن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هي $(x - 2, y - 1, z + 3)$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \text{يعني} \quad x - 2 = 2 \quad \text{و} \quad y - 1 = -5 \quad \text{و} \quad z + 3 = -3 \quad \text{أي} \quad x = 4 \quad \text{و} \quad y = -4 \quad \text{و} \quad z = -6$$

إحداثيات النقطة D هي إذن $(4, -4, -6)$

2. إحداثيات النقطة I هي $(2, 3, -1)$ ، إحداثيات $\overrightarrow{IH}$ هي $\left(3, -\frac{21}{2}, -\frac{15}{2}\right)$ وإحداثيات $\overrightarrow{ID}$ هي $(2, -7, -5)$.

لدينا: $\overrightarrow{IH} = \frac{3}{2} \overrightarrow{ID}$ و منه النقط I, D, H في استقامية.



حل التمرين 10:

1. من الواضح أن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ $(-2, -2, 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (AC) .

القول أن النقطة $M(x, y, z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) يعني وجود عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AC}$

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-2} = z-2 \quad \text{أي} \quad z-2 = \alpha \quad \text{و} \quad y+2 = -2\alpha \quad \text{و} \quad x-1 = -2\alpha$$

$$\text{لدينا مثلا:} \quad \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلات للمستقيم } (AC).$$

2. القول أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس المستوي يعني أن الأشعة $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ من نفس المستوى.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -2x - y = -4 \\ 2x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases} \quad \text{هل يوجد إذن عددين حقيقيين } x \text{ و } y \text{ يحققان مثلا: } x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \text{ ؟ أي:}$$

نجد بعد حل الجملة: $x = 3$ و $y = -2$. نستنتج أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس المستوي.

1. لدينا: $AB = \sqrt{(4-8)^2 + (8-5)^2 + (2-2)^2}$ و منه $AB = 5$
بإتباع نفس الطريقة نجد: $AC = 5$ و $BC = \sqrt{50}$

2. لدينا من جهة: $AB = AC$ و منه المثلث ABC متقايس الساقين.
لدينا من جهة ثانية: $AC^2 + AB^2 = BC^2$ $\left(5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2\right)$ و منه المثلث ABC قائم في النقطة A .
نستنتج مما سبق أن المثلث ABC قائم في النقطة A و متساوي الساقين.

1. من الواضح أن نصف قطر سطح الكرة (S) هي المسافة OA و لدينا: $OA = 5$.
سطح الكرة (S) هي مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق $OM^2 = OA^2$
و منه معادلة سطح الكرة (S) هي: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
2. بما أن: $OB^2 = 4^2 + 3^2 + 0 = 25$ فإن النقطة B تنتمي إلى سطح الكرة (S) .
لدينا: $1^2 + 5^2 + 2^2 = 30$ و $30 \neq 25$. و بما أن إحداثيات النقط C لا تحقق معادلة سطح الكرة (S) نستنتج أن النقطة C لا تنتمي إلى سطح الكرة (S) .

3. نعلم أن معادلة المحور (Oz) هي: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
و بالتالي القول أن $M(x, y, z)$ نقطة مشتركة بين (S) و (Oz) يعني:
 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

تقبل هذه الجملة حلين هما $(0, 0, 5)$ و $(0, 0, -5)$.

و هكذا يتقاطع سطح الكرة (S) مع محور الرواق (Oz) في النقطتين $E(0, 0, 5)$ و $F(0, 0, -5)$.

1. يمكن إتباع عدة طرق. نقترح فيما يلي الطريقة التالية: نفرض أن إحداثيات G هي (x, y, z) .
إحداثيات الشعاع $\vec{2GA} + 3\vec{GB}$ هي إذن $(-x, -y, -z)$ و منه $\vec{2GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$ يعني $x = y = z = 0$
إذن: $G(0, 0, 0)$ النقطة G هي إذن النقطة O مبدأ المعلم.

النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; -2), (B; 3)\}$.

2. • لدينا: $MA^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z+3)^2$ و $MB^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2$
و منه: $MA^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6z + 18$ و $MB^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4z + 8$

نجد هكذا: $f(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$

(Γ_4) هي مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق: $f(M) = 4$ أي: $x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 4$

و هذا يعني أن: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و هي معادلة سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها 4.

(Γ_{-12}) هي مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق: $f(M) = -12$ أي: $x^2 + y^2 + z^2 - 12 = -12$

و هذا يعني أن: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ أي $x = y = z = 0$ ومنه $(\Gamma_{-12}) = \{O\}$

• $f(M) = k$ يعني $x^2 + y^2 + z^2 - 12 = k$ أي $x^2 + y^2 + z^2 = k + 12$

بما أن $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ نقوم بدراسة إشارة $(k + 12)$

k	$-\infty$	-12	$+\infty$
إشارة $k + 12$		-	0 +

نميز إذن ثلاث حالات:

الحالة 1: $k < -12$

المجموعة (Γ_k) هي مجموعة خالية.

الحالة 2: $k = -12$

المجموعة (Γ_k) هي المجموعة $\{O\}$.

الحالة 3: $k > -12$

المجموعة (Γ_k) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها $\sqrt{k + 12}$



حل التمرين 14:

1. تنتمي النقط A, B, C و D إلى نفس المستوي إذا و فقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (مثلا) من نفس المستوي. لدينا

$$\overrightarrow{AB}(0, 0, -6), \overrightarrow{AC}(\sqrt{5}, 0, -1) \text{ و } \overrightarrow{AD}(\sqrt{5}, 0, -5).$$

هل يوجد عدنان حقيقيان x و y بحيث: $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$ ؟

$$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD} \text{ يعني } \begin{cases} x\sqrt{5} + y\sqrt{5} = 0 \\ -x - 5y = -6 \end{cases} \text{ نجد بعد حل الجملة السابقة: } x = -\frac{3}{2} \text{ و } y = \frac{3}{2}.$$

نستنتج أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس المستوي.

2. معادلة (S) هي: $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$

لدينا (مثلا): $EA^2 = EB^2 = EC^2 = ED^2 = 9$ و منه النقط A, B, C و D تنتمي إلى (S) .

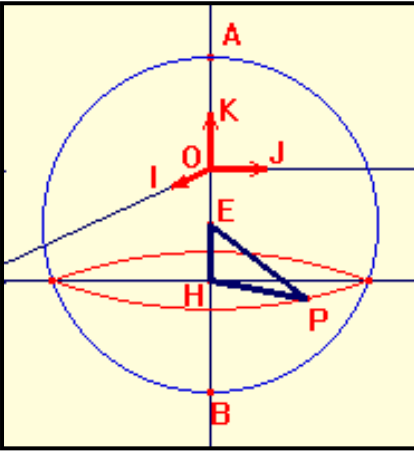
تكون $M(x, y, z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المحور (Ox) يعني $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9 \\ y = z = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x^2 = 8 \\ y = z = 0 \end{cases}$

نجد بعد حل هذه الجملة نقطتين مشتركتين إحداثياتهما $(2\sqrt{2}, 0, 0)$ و $(-2\sqrt{2}, 0, 0)$.

يتقاطع السطح (S) مع (Oy) في النقطتين $(0, 2\sqrt{2}, 0)$ و $(0, -2\sqrt{2}, 0)$ و يتقاطع مع (Oz) في النقطتين A و B .

3. نلاحظ أن المستوي (P_a) يوازي مستوي الإحداثيات $P(O; \vec{i}, \vec{j})$. نميز إذن ثلاث حالات:

- إذا كان $a \in]-\infty; -4[\cup]2; +\infty[$ يكون السطح (S) و المستوي (P_a) منفصلين.
- إذا كان $a \in \{-4; 2\}$ يكون المستوي (P_a) مماسا للسطح (S) في النقطتين A و B .
- إذا كان $a \in]-4; 2[$ فإن المستوي (P_a) يقطع سطح الكرة (P_a) وفق دائرة مركزها ينتمي إلى المحور (Oz) .



4. (-2) ينتمي إلى $] -4; 2[$ و منه المستوي (P_{-2}) يقطع سطح الكرة (S)

و ذلك وفق دائرة نرمز إلى مركزها بـ H .

بما أن النقطة تنتمي إلى كل من المحور (Oz) و المستوي (P_{-2}) : $z = -2$

فإن إحداثيات النقطة H هي $(0, 0, -2)$.

النقطة P تنتمي إلى السطح (S) و منه $EP = 3$. بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في

المثلث EHP يكون لدينا: $EP^2 = EH^2 + HP^2$. نجد بعد الحساب $HP = 2\sqrt{2}$.

مقطع (S) بالمستوي (P_{-2}) هي الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $2\sqrt{2}$

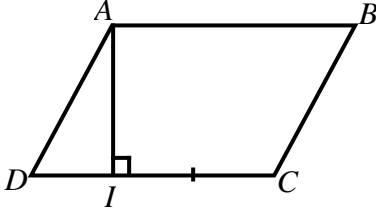
4

نهوذج اختبار

مرفقة بالتصحيح

الحول الثالث

التمرين الأول:



$ABCD$ متوازي أضلاع في المستوي والنقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على (DC)

نفرض أن $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$.

1. h هو التحاكي ذو المركز I ويحول D إلى C .

أ. اكتب الشعاع $\overrightarrow{IC}$ بدلالة $\overrightarrow{ID}$

ب. استنتج نسبة التحاكي h

2. صورة A بالتحاكي h و M نقطة من القطعة $[AD]$ و N صورة M بالتحاكي h .

أ. بين أن النقط C ، E و N في استقامة.

ب. ما القول عن النقطة N إذا كانت M منتصف القطعة $[AD]$ ؟

3. نفترض أن $DC = a\sqrt{3}$ و $AD = a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

أ. احسب بدلالة a الجداء السلمي $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$

ب. بين أن $\cos ADC = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ج. باستعمال علاقة الكاشي احسب بدلالة a الطول AC .

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 2$ واساسها $r = 4$.

(1) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(2) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب u_2 و u_{39} .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4) احسب المجموع S' حيث: $S' = u_2 + u_3 + \dots + u_{39}$

انتهى الموضوع

حل التمرين الأول:

$ABCD$ متوازي أضلاع في المستوي والنقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على (DC)

$$\text{نفرض أن } \overrightarrow{DI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$$

1. h هو التحاكي ذو المركز I وبحول D إلى C .

$$\text{أ. كتابة الشعاع } \overrightarrow{IC} \text{ بدلالة } \overrightarrow{ID} : \overrightarrow{DI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC} \text{ معناه } \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} \text{ و } 3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} \text{ معناه } \overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{ID}$$

ب. نسبة التحاكي h هي -2 .

2. صورة A بالتحاكي h و M نقطة من القطعة $[AD]$ و N صورة M بالتحاكي h .

أ. تبيان أن النقط C ، E و N في استقامية:

لدينا $C = h(D)$ ، $E = h(A)$ و $h(M) = N$ ولدينا $M \in [AD]$ إذن D ، A و M في استقامية وبما أن التحاكي يحافظ على الاستقامية فإن النقط C ، E و N في استقامية.

ب. التحاكي يحافظ على المرجح وبصفة خاصة على المنتصف، فإذا كانت M منتصف القطعة $[AD]$ فإن N تكون منتصف $[EC]$.

3. نفرض أن $DC = a\sqrt{3}$ و $AD = a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماماً.

$$\text{أ. حساب بدلالة } a \text{ الجداء السلمي } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} : \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}^2 = \frac{3a^2}{3} = a^2$$

$$\text{ب. تبيان أن } \cos ADD = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}}{DC \times DA} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} : \cos ADC = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ج. باستعمال علاقة الكاشي حساب بدلالة a طول AC :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \cos D = 4a^2 - 2\sqrt{3}a^2 \frac{\sqrt{3}}{3} = 2a^2 \text{ ومنه } AC = a\sqrt{2}$$

حل التمرين الثاني:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 2$ واساسها $r = 4$.

أثبت بـ n بـ u_n بدلالة n .

نعلم أن عبارة $u_n = 2 + 4n$ صحيحة لكل n من 0 إلى ∞ نثبتها بالتعويض ج: $u_n = u_0 + nr$

2. عن كثاج متغير المتتالية (u_n) ثم احسب u_2 و u_{39} .

كج اهل تغيربما أن أساس مدهال متتالية موجبت تمام $r = 4, r > 0$ انن متتاليم متزايدة

حساب: u_2 و u_{39} نعطيهي عبارة البدال عام

$$u_2 = 2 + 4(2) = 2 + 8 = 10$$

$$u_{39} = 2 + 4(39) = 2 + 156 = 158$$

3. احيىبداللة n الم مجموع S_n محث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{2 + 2 + 4n}{2} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{4 + 4n}{2} \right) \\ &= (n+1)(2 + 2n) \\ &= 2n^2 + 4n + 2 \end{aligned}$$

4. احيىبالم مجموع S' محث : $S' = u_2 + u_3 + \dots + u_{39}$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_2 + u_3 + \dots + u_{39} \\ &= (39 - 2 + 1) \left(\frac{158 + 10}{2} \right) = 3192 \end{aligned}$$

انتهى التصحيح

التمرين الأول:

في هذا التمرين يوجد ستة أسئلة كلها مستقلة

① ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليات المعرفة كما يلي:

(أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$ (ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_n = \frac{n}{5^n}$

(ج) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = 2n^2 + 2n - 5$

② من بين المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ التالية، عيّن المتتاليات الحسابية:

(أ) $u_n = -5n + 12$ (ب) $u_n = n^2 + n + 1$ (ج) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ 2u_{n+1} - 2u_n = 3 \end{cases}$

③ (u_n) متتالية حسابية حيث $u_5 = 4$ و $u_{10} = -11$. عيّن هذه المتتالية.

④ من بين المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ التالية، عيّن المتتاليات الهندسية:

(أ) $u_n = 2^n$ (ب) $u_n = -3 \times 7^n$ (ج) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

⑤ (u_n) متتالية هندسية بحيث $u_3 = 24$ و $u_5 = 96$. عيّن هذه المتتالية.

⑥ (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 1$ ومجموع الحدود الأولى لها هو S حيث: $S = 1 + 8 + 15 + \dots + 603$.

أحسب S علماً أن: $u_{86} = 603$

التمرين الثاني:

يتوزع سكان ولاية معينة سنة 2020 كما يلي:

■ 450000 نسمة يسكنون المدن.

■ 250000 نسمة يسكنون الريف.

نفرض أنّ عدد سكان المدن يزيد بنسبة 5% وأنّ عدد سكان الريف يزيد بـ 10000 نسمة كلّ سنة.

1. احسب عدد سكان كلّ فئة بعد 5 سنوات.

2. في أية سنة يتجاوز عدد سكان الولاية مليون نسمة.

حل الموضوع الأول:

1. نطبق الطريقة 1.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left[(n+1)^2 + 1 \right] - \frac{1}{2} (n^2 + 1) = n + \frac{1}{2}$$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

ب) بما أن حدود المتتالية موجبة تمام أي لم تكن تطبق الطريقة 2.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \frac{n+1}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{n} = \frac{n+1}{5n}$$

$$\frac{n+1}{5n} \leq 1 \text{، فـ } n+1 \leq 5n \text{، } n \geq 1$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

ج) المتتالية (u_n) متناقص متزايدة كل $u_n = f(n)$ ، بحيث $f(x) = 2x^2 + 2x - 5$ ، يمكن تطبيق الطريقة 3.

الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$. ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x) = 4x + 2$.

بواسطة إشارة $f'(x)$ نجد:

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-5,5$	

على المجال $]-0,5; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، الدالة f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

وبالتالي، المتتالية (u_n) متزايدة.

2. أ) الحد العام من الشكل $u_n = u_0 + nr$ ، حيث $u_0 = 12$ و $r = -5$.

وبالتالي، المتتالية (u_n) متناقص متزايدة حدّها الأول 12 وأساسها -5.

ب) (لنرى: $u_0 = 1$ ، $u_1 = 3$ ، $u_2 = 7$ ، نلاحظ أن $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$).

وبالتالي، (u_n) ليست متتالية حسابية.

$$2u_{n+1} - 2u_n = 3 \text{، ولتنب } u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}$$

نماذج امتحانات الفصل الثالث

للمتتالي تحقق: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n + r$.

$$(u_n) \text{ متتالية حسابية ذات الأساس } \frac{3}{2}.$$

3. ليكن r أساس هذه المتتالية و u_0 حدّها الأول.

$$\text{لحين } u_{10} = u_5 + (10-5)r \text{ أي } -11 = 4 + 5r.$$

$$\text{وفيّه } r = -3 \text{ أساس المتتالية } (u_n) \text{ هو } -3$$

$$\text{لحين أيضًا } u_5 = u_0 + 5 \times (-3) \text{ أي } 4 = u_0 - 15.$$

$$\text{وفيّه } u_0 = 19. \text{ لحدّ الأول للمتتالية هو } 19.$$

$$\text{نتنتج أنّ } (u_n) \text{ هي المتتالية التي حدّها الأول } 19 \text{ وأساسها } -3.$$

$$\text{وبمجرى آخر، من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = 19 - 3n.$$

$$4. \text{ أ) لحدّ العام من الشكل } u_n = u_0 q^n \text{ مع } u_0 = 1 \text{ و } q = 2.$$

$$\text{وبالتالي، } (u_n) \text{ متتالية من دسوقي أساسها } 2.$$

$$\text{ب) نفس الطريقة، نتنتج أنّ } (u_n) \text{ متتالية من دسوقي أساسها } 7.$$

$$\text{ج) اليمكن وضع } u_{n+1} = 3u_n + 1 \text{ في شكل } u_{n+1} = qu_n \text{ مع } q \neq 0. \text{ وبالتالي } (u_n) \text{ ليست متتالية من دسوقي.}$$

$$5. \text{ ليكن } q \text{ أساس هذه المتتالية و } u_0 \text{ حدّها الأول.}$$

$$\text{لحين } u_5 = u_3 q^{5-3} \text{ أي } 96 = 24q^2 \text{ فنجد } q^2 = 4.$$

$$\text{وفيّه } q = -2 \text{ أو } q = 2.$$

$$\bullet \text{ من أجل } q = -2, \text{ لحين أيضًا } u_3 = u_0 \times (-2)^3 \text{ أي } 24 = u_0 \times (-2)^3. \text{ وفيّه } u_0 = -3.$$

$$\bullet \text{ من أجل } q = 2, \text{ لحين أيضًا } u_3 = u_0 \times 2^3 \text{ أي } 24 = u_0 \times 2^3. \text{ وفيّه } u_0 = 3.$$

$$\text{نتنتج أنّ توجد متتاليتان في دسوقيان بحيث } u_3 = 24 \text{ و } u_5 = 96:$$

$$\text{المتتالية التي أساسها } -2 \text{ وحدّها الأول } -3 \text{ والمتتالية التي أساسها } 2 \text{ وحدّها الأول } 3.$$

$$6. (u_n) \text{ متتالية حسابية حدّها الأول } u_0 = 1 \text{ ومجموع الحدود الأولى لـ } 20 \text{ هو } S: S = 1 + 8 + 15 + \dots + 603.$$

$$\text{جواب } S. \text{ علم أنّ: } u_{86} = 603$$

$$\text{نالحظ أنّ أساس هذه المتتالية هو } 7 \text{ لأن كل مرة تضيف } 7 \text{ الي ج ادال حد اولي ج بالتالي عبارة لحدال عام متقرب في شكل } u_n = 1 + 7n. \text{ و } u_0 = 1.$$

$$S = 1 + 8 + \dots + 603 = (86 - 0 + 1) \left(\frac{u_{86} + u_0}{2} \right)$$

اذن:

$$= 87 \left(\frac{603 + 1}{2} \right) = 26274$$

حل الموضوع الثاني:

1. n عدد طبيعي. ليكن R_n عدد سكان لاييف، مقروا بالالف، و U_n عدد سكان المدين و T_n العدد إلج لملي سكان الوالي قبال سنة $(2005 + n)$.

لينا $U_0 = 450$ و $R_0 = 250$.

■ بما أن عدد سكان المدين يزي نسبة 5% كل سنة، إذن:

$$U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,05 = 1,05 \times U_n$$

المتتالية (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ حيث $q = 1,05$ وبالمتتالي:

$$U_n = U_0 q^n = 450 \times 1,05^n$$

وفي $U_5 = 450 \times 1,05^5 \approx 574$.

■ بما أن سكان لاييف يزي بـ 10 ألف نسمة كل سنة، إذن:

$$R_{n+1} = R_n + 10$$

المتتالية (R_n) متتالية حسابية أساسها $r = 10$ وبالمتتالي:

$$R_n = R_0 + nr = 250 + 10n$$

وفي $R_5 = 250 + 10 \times 5 = 300$.

2. نجد أن عدد سكان الوالية سيحتاج أوز ملي ورن سم قبال سنة $(2005 + 9)$ أي 2014.

التمرين الأول:

I. المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن $A(-1, 2), B(-2, 1), C(2, -1)$ ثلاث نقط من المستوي

برهن ان المثلث ABC قائم.

II. 1. أوجد الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي معادلته $3x - y + 5 = 0$.

2. ماهي وضعية (D) بالنسبة للمستقيم (D') الذي معادلته $2x + 6y - 12 = 0$.

3. أكتب معادلة المستقيم (D'') الذي يشمل الذي يشمل المبدأ ويوازي (D) .

التمرين الثاني:

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

1. أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3. المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 8$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم إستنتج u_n بدلالة n . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب في الفضاء.

نضع $\vec{AB} = \vec{i}$ ، $\vec{AD} = \vec{j}$ و $\vec{AE} = \vec{k}$ ؛ ونزود الفضاء بالمعلم $(A, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

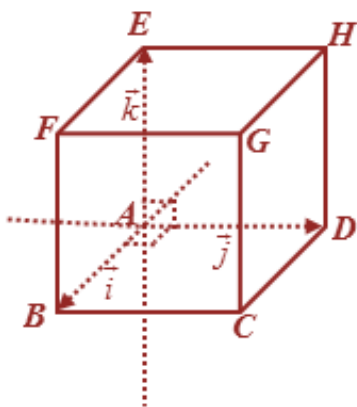
1. عيّن إحداثيات النقط C ، F ، G و H في المعلم $(A, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BH) ثم عيّن معادلتين له.

3. لتكن النقطة $L(4, -3; -3)$

أ. بين أن النقط B ، H و L في استقامية

ب. اكتب معادلة للمستوي (p) الذي يشمل النقطة L ويوازي المستوي $(A, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.



حل التمرين الأول:

I. علينا حساب $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. و فيه: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 + 3 = 0$ أي: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ إذن المثلث ABC قائم

II. 1. إيجاد الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي معادلته $3x - y + 5 = 0$.

الشعاع الناظمي هو: $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

2. وضعية (D) بالنسبة للمستقيم (D') الذي معادلته $2x + 6y - 12 = 0$.

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D') هو $\vec{u} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$ ومنه: $\vec{u} // \vec{v}$ ينتج عليه: $(D) // (D')$

و بالتالي (D) و (D') مستقيمان متوازيان.

3. أكتب معادلة المستقيم (D'') الذي يشمل الذي يشمل المبدأ ويوازي (D) .

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستقيم (D'') و منه $\overrightarrow{OM} // \vec{v}$ (يشمل المبدأ) أي: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ y & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$(-1)x - (3)y = 0$$

$$-x - 3y = 0 \quad \text{يعني:}$$

$$x + 3y = 0$$

و بالتالي معادلة المستقيم (D'') هي: $x + 3y = 0$.

حل التمرين الثاني:

المتتالي (u_n) معرفة كالتالي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

1 (حساب الحدود u_1, u_2 و u_3).

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4} \times 1 + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4} \times \frac{11}{4} + 2 = \frac{33}{16} + 2 = \frac{65}{16}$$

$$u_3 = \frac{323}{64}$$

2. أبتني أن المتتالية (u_n) متزايدة ماماً: على ثلاث خطوات: $u_{n+1} - u_n > 0$.

3. (v_n) المتتالي (v_n) معرفة كالتالي: من أجل كل عدد طبيعي n هي: $v_n = u_n - 8$.

أبتني أن (v_n) متتالية منسوية مع تحدي أولها وحدها الأول.

لها: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}u_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}u_n - 6 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3 \times 8}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 8) = \frac{3}{4}v_n$$

أي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$. إذن المتتالية (v_n) منسوية فأساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 8 = -7$.

ب- نكتب عبارة v_n ببدالة n :

$$v_n = -7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n \quad \text{و فيه:}$$

لكن متباعدة n :

$$u_n = -7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8 \text{ : إذن : } u_n = v_n + 8 \text{ و } v_n = u_n - 8 \text{ : } n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

ج - أجب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8 \right] = 8 \text{ لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ (الاحظ أن : } 0 < \frac{3}{4} < 1 \text{) .}$$

2) حساب المجموع n بدلالة n :

$$S_n = 28 \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right) \text{ : إذن ، } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = -7 \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} \right]$$

حل التمرين الثالث:

1. إحداثيات النقط $H(0;1;1)$ و $G(1;1;1)$ ، $F(1;0;1)$ ، $C(1;1;0)$

2. لدينا $B(1;0;0)$ و $H(0;1;1)$ إذن $\overrightarrow{BH}(-1;1;1)$ ومنه (BH) ومعناه $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$ مع $k \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$

3. أ - $\overrightarrow{BL}(3, -3, -3)$ ومنه $\overrightarrow{BL} = -3\overrightarrow{BH}$ إذن النقط B ، H و L في استقامية.

ب - معادلة للمستوي (p) هي $x = 4$

التمرين الأول:

اختر الاجابة الصحيحة مع التعليل في كل ما يلي :

(1) C, B, A ثلاثة نقط من المستوي حيث : $A(-2; 1)$, $B(4.5)$, $C(1; 3)$

التحاكي h الذي مركزه A ويحول C الى B نسبته :

(أ) $k = -2$ (ب) $k = 2$ (ج) $k = \frac{1}{2}$

(2) من اجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ لدينا :

(أ) $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (ب) $\cos^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ (ج) $\cos^2 \alpha = \frac{1+2\cos \alpha}{2}$

(3) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي :

(أ) محور القطعة $[AB]$ (ب) الدائرة التي قطرها AB (ج) المستقيم (AB) .

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = -1$ واساسها $r = 2$.

(5) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(6) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب u_4 و u_{119} .

(7) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(8) احسب المجموع S' حيث : $S' = u_4 + u_3 + \dots + u_{119}$

التمرين الثالث:

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط $A(3; 2)$, $B(2; -2)$, $H\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

(Δ) المستقيم الذي يمر بالنقطة B , $\vec{u}\left(\frac{1}{-1}\right)$ شعاع ناظمي له .

(1) علم النقط C, B, A والمستقيم (Δ) في المعلم السابق.

(2) بين ان $x - y - 4 = 0$ معادلة للمستقيم (Δ).

(3) احسب المسافة بين النقطة والمستقيم (Δ).

(4) بين ان النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ).

(5) احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

(6) عين معادلة للدائرة (C) التي مركزها A وطول نصف قطرها 3 .

(7) نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[AB]$, عين ثم انشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

انتهى الموضوع

التمرين الأول:

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، و m وسيط حقيقي

$$(\Delta_m) \text{ مستقيم معادلته: } (m+1)x + (2m-3)y + 5 = 0.$$

1. عين قيمة m حتى تكون المسافة بين النقطة $A(5;1)$ والمستقيم (Δ_m) معدومة.

2. عين قيمة m حتى تكون المسافة بين النقطة $B(1;5)$ والمستقيم (Δ_m) تساوي 4.

التمرين الثاني:

الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية. عيّن هذه الأعداد علماً أنّ:

$$\begin{cases} ac = 10b \\ a + b + c = 35 \end{cases}$$
التمرين الثالث:

(S) سطح كرة مركزها $\omega(2;3;4)$ ونصف قطرها 5.

1. اكتب معادلة سطح الكرة (S).

2. اكتب معادلة المستقيم (D) الذي يشمل النقطة O وشعاع توجيهه $\vec{k}$.

3. أوجد نقطة تقاطع (D) مع (S).

التمرين الرابع:

أراد شخص إيداع مبلغ 50000 دينار. فعرض عليه البنك كيفيتين:

1. الإيداع بفوائد بسيطة قدرها 5,5% في السنة، حيث يستفيد كلّ سنة بمبلغ ثابت يساوي 5,5% من المبلغ الابتدائي، أي 2750 ديناراً.

2. الإيداع بفوائد مركبة قدرها 5% في السنة، حيث يزيد رصيده كلّ سنة بمبلغ يساوي 5% من المبلغ المدخر في السنة الجارية. فالزيادة في هذه الحالة ليست ثابتة.

أ. الكيفية الأولى: نسمي S_n المبلغ المدخر بعد n سنة.

1. احسب S_0 و S_1 و S_2 و S_3 .

2. أ) احسب S_{n+1} بدلالة S_n .

ب) استنتج طبيعة المتتالية (S_n) .

ج) عبّر عن S_n بدلالة n .

II. الكيفية الثانية: نسمي C_n المبلغ المدخر بعد n سنة.

1. احسب C_0 و C_1 و C_2 و C_3 .

2. أ) احسب C_{n+1} بدلالة C_n .

ب) استنتج طبيعة المتتالية (C_n) .

ج) عبّر عن C_n بدلالة n .

انتهى الموضوع

حل التمرين الأول:

(Δ_m) مسقطي م عالت ه: $(m+1)x + (2m-3)y + 5 = 0$.

أبت عني قيمة m مت يتكوال مس اف قيين النقطة $A(5;1)$ والمسقطي م (Δ_m) معدومة.

$$\begin{aligned} 5(m+1) + (2m-3) + 5 &= 0 \\ 7(m+1) &= 0 \Rightarrow m = -1 \end{aligned}$$

معناه $A \in (\Delta_m)$ أي:

اذن من أجل $m = -1$ تكوال مس اف قيين النقطة $A(5;1)$ والمسقطي م (Δ_m) معدومة.

2 ببت عني قيمة m مت يتكوال مس اف قيين النقطة $B(1;5)$ والمسقطي م (Δ_m) متساوي 4.

$$d((\Delta_m), B) = \frac{|11m-9|}{\sqrt{(m+1)^2 + (2m-3)^2}} = 4$$

$$\left(\frac{|11m-9|}{\sqrt{(m+1)^2 + (2m-3)^2}} \right)^2 = (4)^2$$

$$(11m-9)^2 = 16[(m+1)^2 + (2m-3)^2]$$

$$41m^2 - 38m - 79 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{79}{41} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{79}{41} \end{cases}$$

وبالتالي: قيمة m مت يتكوال مس اف قيين النقطة $B(1;5)$ والمسقطي م (Δ_m) متساوي 4 هي: أو $m = \frac{79}{41}$

حل التمرين الثاني:

ألعداد a, b, c ب هلال ترييب حدود متتاليه من دسري أس مكأبر من 1. عني هذه ألعداد لجم أن: $\begin{cases} ac = 10b \\ a + b + c = 35 \end{cases}$

$$\begin{cases} ac = 10b \Rightarrow b^2 = 10b \Rightarrow b = 10 \\ a + b + c = 35 \end{cases}$$

حسب ألخصس قال مسر الطحس ابي لجن: $c = b^2$ بالتالي:

$$\begin{aligned} a + b + c &= \frac{b}{q} + b + b.q = 35 \\ \frac{b}{q} + 10 + 10q &= 35 \end{aligned}$$

وبما أن هال متتاليه من دسري فعنني: $a = \frac{b}{q} / c = b.q$ عن عوضن جد:

$$10q^2 - 25q + 10 = 0 \text{ أي: } 10 + 10q + 10q^2 = 35q$$

أساس هذال متتالي قن و ح دال قن من جد:

$$\begin{aligned} a &= \frac{b}{q} = \frac{10}{2} = 5 \\ a = 5, b = 10, c = 20 &\text{ و ف ه: } q = 2 \text{ و ن جد: } c = b.q = 2 * 10 = 20 \end{aligned}$$

حل التمرين الثالث:

(S) سطح كره مركزها $\omega(2;3;4)$ ونصف قطرها 5.

1. معادل قسطح الكره (S) : $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$

2. معادلة المستقيم (D) الذي يشمل النقطة O وشعاعه متوجّهه $\vec{k}$ فهو حامل المحاور $(O; \vec{k})$ و ونبتج من تقاطع

$$\text{المستقيمين : } \begin{cases} P(O; \vec{i}, \vec{k}) \\ P(O; \vec{j}, \vec{k}) \end{cases} \text{ معادلته اذن : } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

3. نقط تقاطع (D) مع (S) تتحقق : $(z-4)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} z=-1 \\ z=9 \end{cases}$

و في هيتقاطع (D) مع (S) في النقطتين $A(0;0;-1), B(0;0;9)$.

حل التمرين الرابع:

I. الخبيّة الأولى:

1. ليّن:

$$S_3 = 58250, S_2 = 55500, S_1 = 52750, S_0 = 50000$$

2. أ) بلكم مغرفي لحدود S_0 و S_1 و S_2 و S_3 نال حظن أن مّر من حدّالى لحدّالتالي بلخلفة 2750، ومصورة عامة:

$$S_{n+1} = S_n + 2750, n \in \mathbb{N}$$

مغرى نك أن (S_n) بتاليّة حريبيّة حدّها ألؤل $S_0 = 50000$ وأساسها $r = 2750$.

ب) من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}$ ، $S_n = S_0 + nr = 50000 + 2750n$.

II. الخبيّة الثانية:

1. ليّن:

$$C_3 = 57881,25, C_2 = 55125, C_1 = 52500, C_0 = 50000$$

2. أ) بلكم مغرفي لحدود C_0 و C_1 و C_2 و C_3 نال حظن أن مّر من حدّالى لحدّالتالي بلماضربفي 1,05، ومصورة عامة:

$$C_{n+1} = C_n + \frac{5}{100} \times C_n = 1,05 \times C_n, n \in \mathbb{N}$$

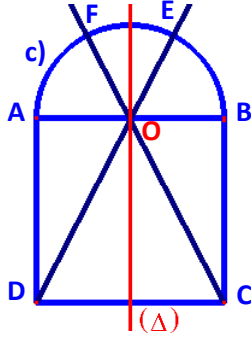
عنّى نك أن (C_n) بتاليّة هندسيّة حدّها ألؤل $C_0 = 50000$ وأساسها $q = 1,05$.

ب) من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}$ ، $C_n = C_0 \times q^n = 50000 \times (1,05)^n$.

انتهى التصحيح

التمرين الأول:

$ABCD$ مربع طول ضلعه 1cm . (c) نصف دائرة قطرها $[AB]$ مركزها O خارج المربع. المستقيمان (OD) و (OC) يقطعان (c) في النقطتين E و F على الترتيب (أنظر الشكل).



(1) أ) برهن أن (Δ) محور القطعة $[AB]$ هو محور تناظر للشكل.

ب) استنتج أن المستقيمين (DC) و (EF) متوازيان.

(2) h التحاكي الذي مركزه O ويحول النقطة D إلى النقطة E .

أ) ما هي صورة C بالتحاكي h .

ب) برهن أن نسبة التحاكي h هي: $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) لتكن النقطتان H و K المسقطين العموديين للنقطتين E و F على $[AB]$.

أ) بين أن $H = h(A)$ واستنتج صورة K .

ب) برهن أن الرباعي $EFKH$ مربع.

ج) قارن بين مساحتي المربعين $ABCD$ و $EFKH$.

التمرين الثاني:

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس نعتبر النقط: $A(2;1)$, $B(5;7)$, $C(3;-1)$

لتكن (E) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 27$ و (C) هي دائرة قطرها $[B]$

1. حسب الأطوال AB و AC ثم أحسب $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{AC}$; استنتج قيمة مقربة إلى 0.01 للزاوية $\widehat{BAC}$

2. أكتب معادلة لكل مجموعة (E) و (C) (سي N مركز الدائرة (C))

3. أدرس وضعية (E) و (C)

4. اكتب معادلة المماس للدائرة (C) عند النقطة B

التمرين الثالث:

ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1;2;1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(1;-1;2)$ ، وليكن المستقيم (Δ)

$$\begin{cases} x - y + z - 10 = 0 \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

(1) عين التمثيل الوسيطى للمستقيم (D).

(2) عين تقاطع (D) مع (Δ) .

□ التمرين الرابع :

(v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

(1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

(2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

انتهى الموضوع

تجدون هذا الھلف فی صفحة الأستاذ شعبان الرسمية: 5min Maths



5minmaths