ملخص الدوال كثيرات الحدود

1. الدالة كثير حدود

نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة P معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

حيث n عدد طبيعي و $a_n;a_{n-1};..............;a_1;a_0$ أعداد حقيقية ثابتة.

2. درجة كثير حدود

كل دالة كثير حدود غير معدومة P تكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ حيث $a_n\neq 0$

يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود P، تسمى الأعداد $a_n;a_{n-1};..............;a_1;a_0$ معاملاته

3. تساوي كثيري حدود

- يكون **كثير حدود معدوما** إذا وفقط إذا كانت **كل معاملاته معدومة.**
- يكون **كثيرا حدود**، غير معدومين، **متساويين** إذا وفقط إذا كانا **من نفس الدرجة** وكانت **معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.**

4. جذر كثير حدود

P كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

α جذر لكثير الحدود P يعني أن $P(\alpha)=0$.

5. تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x-\alpha)$

ليكن P كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

إذا كان $P(\alpha)=0$ (α جذر لكثير الحدود P) فإنه **يوجد كثير حدود Q** بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $P(x)=(x-\alpha)P(x)$

تمرين تطبيقي: P دالة كثير حدود معرفة بـ: $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

☑ تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود P

☑ عين كثير حدود Q بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x: $P(x)=(x-2)Q(x)$

طريقة: لتعيين $Q(x)$ نضع $Q(x)=ax^2+bx+c$ ثم نعيين المعاملات $a;b$ و c باستعمال تساوي كثيري حدود (**طريقة المطابقة**) وذلك بعد نشر وتبسيط وترتيب العبارة $(x-2)(ax^2+bx+c)$

كما يمكننا استعمال **خوارزمية القسمة** أو **خوارزمية هورنر**

1. طريقة المطابقة:

لدينا $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

ولدينا أيضا العدد 2 جذر لكثير الحدود P

نضع $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

ومنه $P(x)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$

وبالتالي $P(x)=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c=x^3-x^2-4x+4$

وهذا يعني $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-1 \\ c-2b=-4 \\ -2c=4 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=2a-1=2(1)-1=1 \\ c=-2 \end{cases}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

2. طريقة القسمة الإقليدية:

لدينا $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

ولدينا أيضا

العدد 2 جذر لكثير الحدود P

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \cline{2-2} -\quad \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-2 \\ x^2-4x+4 & \\ -\quad \underline{x^2-2x} & \\ -2x+4 & \\ -\quad \underline{-2x+4} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

3. خوارزمية هورنر (Horner)

لدينا $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

ولدينا أيضا العدد 2 جذر لكثير الحدود P

	1	-1	-4	4
2	0	2	2	-4
	1	1	-2	0

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

المعادلات من الدرجة الثانية

1. المعادلة من الدرجة الثانية

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل معادلة من الشكل: $ax^2+bx+c=0$

حيث $a;b$ و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$

2. حل المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ حيث $(a\neq 0)$

إشارة ax^2+bx+c	تحليل ax^2+bx+c على الشكل:	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هي:	إذا كان:
$-\infty$ ... x_1 ... x_2 ... $+\infty$: إشارة a ، 0 ، إشارة $(-a)$ ، 0 ، إشارة a	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta>0$
$-\infty$ ... x_0 ... $+\infty$: إشارة a ، 0 ، إشارة a	$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$	$x_0=\dfrac{-b}{2a}$	$\Delta=0$
$-\infty$ ... $+\infty$: إشارة a	لا يمكن تحليل ax^2+bx+c	لا توجد حلول في $\mathbb{R}$	$\Delta<0$

N.B: إذا كان $\Delta=0$ نقول أن المعادلة ax^2+bx+c تقبل حلا مضاعفا.

طريقة: لحل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c\geq 0$; $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\leq 0$ أو $ax^2+bx+c<0$ ندراسة إشارة حدود الحدود ax^2+bx+c ثم نستنتج الحلول.

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x: $ax^2+bx+c=0...(1)$ حيث $(a\neq 0)$

إذا كان $\Delta\geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين (جذرين) x_1 و x_2 حيث:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فإن: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ و $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

يكون مجموع عددين هو S وجداؤهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x: $x^2-Sx+P=0$

تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة: (1)........................$ax^2+bx+c=0$ **حيث** $(a\neq 0)$.

1. إذا كان $\frac{c}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
2. إذا كان $\frac{c}{a}>0$; $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
3. إذا كان $\frac{c}{a}>0$; $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

المعادلات مضاعفة التربيع

معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:
$ax^4+bx^2+c=0$ **حيث** $a;b$ **و** c **أعداد حقيقية ثابتة مع** $a\neq 0$

طريقة: **حل المعادلة** $ax^4+bx^2+c=0$ **يؤول إلى حل الجملة:** $\begin{cases} X=x^2 \\ aX^2+bX+c=0 \end{cases}$

يسمى المجهول X مجهولا مساعدا.

بعد حل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$