Maths

2AS

رياضيات

ملخصات

الأستاذ مصطفى

للسنة الثانية ثانوي

Prof Mustapha

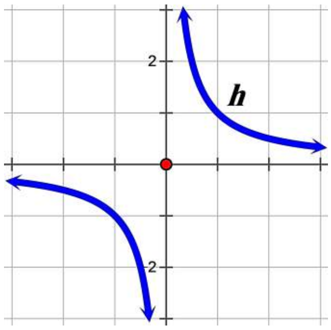
KHALDI

الفهرس

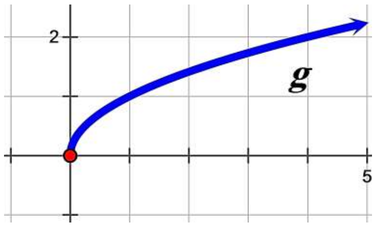
مجموعة التعريف D

Prof Mustapha
KHALDI

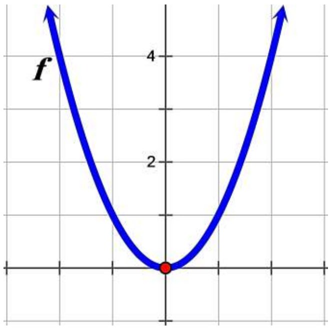
❖ بيانيا:



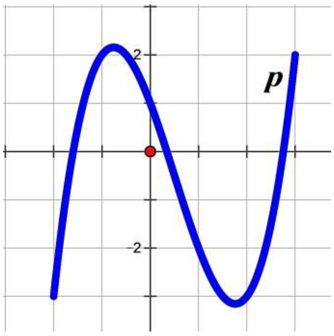
$D_h =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$



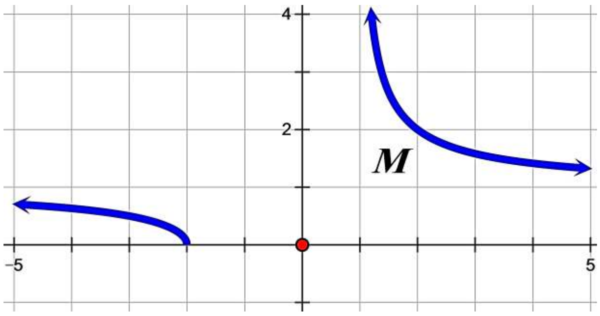
$D_g = [0; +\infty[$



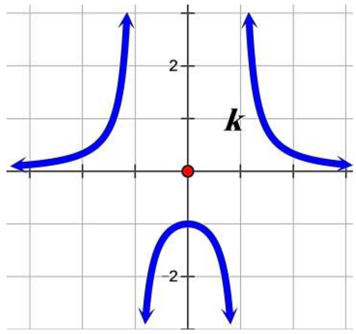
$D_f =]-\infty; +\infty[$



$D_p = [-2; 3]$



$D_M =]-\infty; -2] \cup]1; +\infty[$



$D_k =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

❖ حسابيا:

لا جذر ولا كسر مثل: $f(x) = 6x^2 - 15x + 8$

نكتب: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

1) كسر مثل $f(x) = \frac{x^2+7}{x-2}$ نكتب:

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ أي $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

2) جذر مثل $f(x) = \sqrt{x-3}$ نكتب:

$x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$D_f = [3; +\infty[$

3) كسر و جذر

مثال1: $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x+5}}$ نكتب:

$x + 5 > 0$

$x > -5$

$D_f =]-5; +\infty[$

مثال2: $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{9}{x-6}$ نكتب:

$x + 4 \geq 0$ و $x - 6 \neq 0$

$x \geq -4$ و $x \neq 6$

$D_f =]-4; 6[\cup]6; +\infty[$

إذن القاعدة:

❶ لا كسر و لا جذر: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

❷ في الكسر نكتب: $0 \neq$ المقام

❸ في الجذر نكتب: $0 \geq$ ما داخل الجذر

❹ في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر: D_f هي تقاطع مجالات تعريف كل هذه الدوال

❖ الملخص:

الدالة	مجموعة التعريف
$f(x) =$ كثير الحدود	$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)} + \dfrac{h(x)}{k(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \geq 0 \ \wedge \ k(x) \neq 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \geq 0 \ \wedge \ h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{g(x)}{h(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{g(x)}{h(x)} \geq 0 \ \wedge h(x) \neq 0\right\}$

حيث $g(x)$، $h(x)$ و $k(x)$ كلها دوال كثيرات حدود

❖ العمليات على الدوال ومجموعة التعريف:

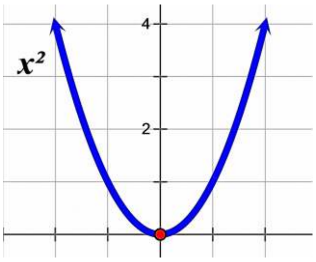
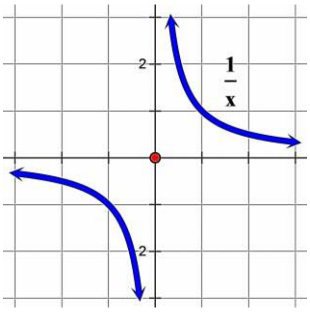
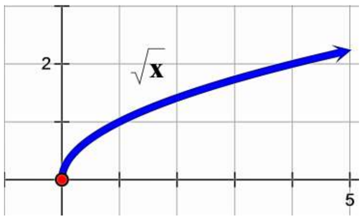
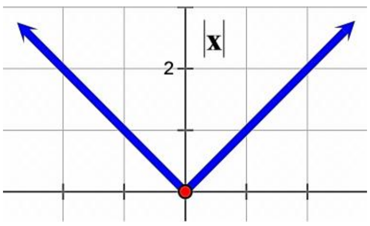
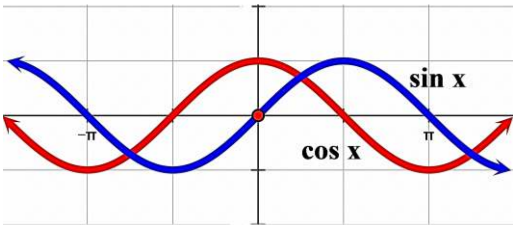
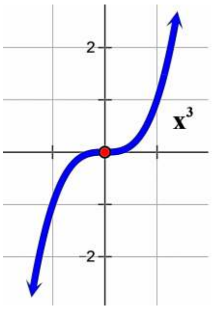
f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. λ و k عددان حقيقيان.

العملية	مجموعة التعريف
$f + k$	D_f
λf	D_f
$f + g$	$D_f \cap D_g$
$f \times g$	$D_f \cap D_g$
$\dfrac{f}{g}$	$\{x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\}$
$f \circ g$ أي $f[g(x)]$	$D_{f \circ g} = \{x / \ x \in D_g \wedge \ g(x) \in D_f\}$

Prof Mustapha
KHALDI

Prof. Mustapha KHALDI

الدوال المرجعية

الدالة المرجعية	الشكل المرجعي	التمثيل البياني للدالة المرجعية
مربع $f(x) = x^2$ (زوجية)	$f(x) = \lambda(x+b)^2 + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^2$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
مقلوب $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (فردية)	$f(x) = \dfrac{\lambda}{x+b} + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \dfrac{\lambda}{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
جذر تربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ (لا زوجية لا فردية)	$f(x) = \lambda\sqrt{x+b} + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda\sqrt{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
قيمة مطلقة $f(x) = \lvert x\rvert$ (زوجية)	$f(x) = \lambda\lvert x+b\rvert + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda\lvert x\rvert$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
الدالتان $\sin x$ (فردية) و $\cos x$ (زوجية)	$f(x) = \lambda\sin(x+b) + k$ $g(x) = \lambda\cos(x+b) + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda\sin x$ أو $y = \lambda\cos x$ 2) نرسم المنحنى الجديد C إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
مكعب $f(x) = x^3$ (فردية)	$f(x) = \lambda(x+b)^3 + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^3$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	

الدوال العددية

Prof Mustapha
KHALDI

I]. العمليات على الدوال

1) تساوي دالتين: f و g متساويتين $\Leftarrow \left.\begin{matrix} D_f=D_g \\ f(x)=g(x) \end{matrix}\right\}$

2) العمليات الجبرية: f و g دوال عددية و k و λ أعداد حقيقية

العملية	التعريف
$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$
$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$
$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

3) تركيب الدوال: $(fog)(x)=f[g(x)]$

II]. اتجاه التغير

1) مراجعة

	إذا كان	فإن
❶	$x_1<x_2$ و $f(x_1)<f(x_2)$	f متزايدة
❷	$x_1<x_2$ و $f(x_1)>f(x_2)$	f متناقصة
❸	$f(x_1)=f(x_2)$	f ثابتة

✱ملاحظة❶: f رتيبة على مجال معناه f متناقصة أو متزايدة على هذا المجال

✱ملاحظة❷: (الفرق بين متزايدة ومتزايدة تماما، متناقصة ومتناقصة تماما)

f متزايدة تماما	f متزايدة
معناه f متزايدة دون أن تكون ثابتة	معناه f متزايدة ثم ثابتة أو ثابتة ثم متزايدة أو متزايدة ثم ثابتة ثم متزايدة...الخ

- نفس الأمر بالنسبة لمتناقصة و متناقصة تماما

✱ملاحظة مهمة❸: (الخطأ الشائع)

f متزايدة ليس معناه f موجبة و f متناقصة ليس معناه f سالبة و لا علاقة أبدا بين تغيرات الدالة و إشارتها

2) العمليات على الدوال واتجاه التغير

الدالة	اتجاه التغير
$f+k$	f و $f+k$ لهما نفس اتجاه التغير
λf	إذا كان $\lambda>0$ فإن f و λf لهما نفس اتجاه التغير
	إذا كان $\lambda<0$ فإن f و λf متعاكسين في اتجاه التغير
fog	إذا كان f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن fog متزايدة تماما على I
	إذا كان f و g متعاكسين في اتجاه التغير فإن fog متناقصة تماما على I
$f+g$	لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين
$f\times g$	لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين

✱ملاحظة: لتسهيل دراسة اتجاه تغير أي دالة f من الأفضل كتابتها على الشكل: $u+k$ ، λu أو vou

حيث u و v دالتان مرجعيتان

III]. التمثيل البياني

إذا كان	فإن
$g(x)=f(x)+k$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{0}{k}$
$g(x)=f(x+b)$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{0}$
$g(x)=f(x+b)+k$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{k}$
$g(x)=\lambda f(x)$	نرسم C_g بالاحتفاظ بفواصل C_f و ضرب ترتيب C_f في λ
$g(x)=\lambda f(x+b)+k$	C_g هو صورة $C_{\lambda f}$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{k}$
$g(x)=-f(x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x)=f(-x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x)=-f(-x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة للمبدأ
$g(x)=\lvert f(x)\rvert$	C_g منطبق على C_f لما $f(x)\geq 0$ و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما $f(x)\leq 0$ ✱ بتعبير اخر: C_g منطبق على C_f لما C_f فوق محور الفواصل و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما C_f تحت محور الفواصل
$g(x)=f(\lvert x\rvert)$	C_g منطبق على C_f لما $x\geq 0$ و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب لما $x\leq 0$

IV]. دساتير تغيير معلم

العلاقة بين إحداثيات نقطة $M(x,y)$ في معلم قديم $(O;\vec{i},\vec{j})$ و احداثياها $M(X,Y)$ في معلم جديد $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$

حيث (x_0,y_0) هي احداثيات Ω في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ هي:

$$\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$$

Prof Mustapha
KHALDI

مركز التناظر

✓ طريقة 1:

$W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow f(2a-x)+f(x)=2b$

✓ طريقة 2:

$W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

$W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow \begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y=f(a+X)-b$$

2) إثبات أن Y دالة فردية.

محور التناظر

✓ طريقة 1:

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow f(2a-x)=f(x)$

✓ طريقة 2:

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow f(a-x)=f(a+x)$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow \begin{cases} x=a+X \\ y=Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y=f(a+X)$$

2) إثبات أن Y دالة زوجية.

✱ملاحظة: المنحنى الممثل للدالة: ax^3+bx^2+cx+d حيث $a\neq 0$ يقبل دائما مركز تناظر

الدوال كثيرات الحدود

I. تعريف كثير الحدود: عبارة الدالة كثير الحدود تكتب على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث:
n درجة كثير الحدود
a_0 ، a_1 ،...، a_n معاملاته
$a_p x^p$ الحد الذي درجته p

أمثلة:

الدالة الثابتة $f(x) = a$ هي دالة كثير حدود درجته 0

الدالة الخطية $f(x) = ax$ و التآلفية $g(x) = ax + b$ هي دوال كثيرات حدود من الدرجة 1

✱**ملاحظة:** كل الدوال كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$

II. عمليات على كثير الحدود

1) قواعد الحساب الجبري:

- مجموع، فرق وجداء كثيرات الحدود هي كثيرات حدود
- مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- جداء كثيري حدود درجتهما n و p هو كثير حدود درجته $n + p$

2) جذر كثير حدود: (جذر مرادف كلمة حل)

α جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه $f(\alpha) = 0$

3) تحليل كثير حدود:

إذا كان α جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ بحيث $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

4) طرق تحليل كثير حدود: هناك ثلاث طرق لتحليل كثير حدود من الدرجة n

✱ مثال: تحليل كثير حدود $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ جذره 2

✓ **طريقة 1: (المطابقة)**

$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

بالنشر:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$f(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

بالمطابقة مع $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-6 \\ c-2b=-13 \\ -2c=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2=-6 \\ c-2b=-13 \\ c=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-21 \end{cases}$$

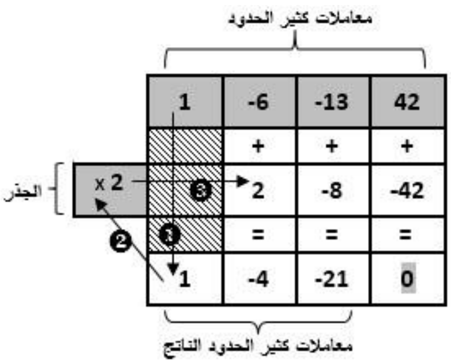
ومنه $f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

✪ **طريقة 2: (القسمة الإقليدية)**

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 - 13x + 42 & x-2 \\ \hline -\;\; x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 4x - 21 \\ -4x^2 - 13x + 42 & \\ -\;\; -4x^2 + 8x \qquad & \\ -21x + 42 & \\ -\;\; -21x + 42 & \\ 0 & \end{array}$$

$f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

✪ **طريقة 3: (هورنر Horner)**



$f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

III. المعادلات من الدرجة الثانية (مراجعة)

1) الشكل النموذجي:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

حيث $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Prof Mustapha
KHALDI

2) ملخص حل واشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $E = ax^2 + bx + c$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$			
إذا كان	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
فإن المعادلة	لا تقبل حلول	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$	تقبل حلين متمايزين $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
إشارتها	x: $-\infty$ … $+\infty$; E: إشارة a	x: $-\infty$, $\frac{-b}{2a}$, $+\infty$; E: إشارة a ، 0 ، إشارة a	x: $-\infty$, $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $+\infty$; E: إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، إشارة a
تحليلها	لا تقبل تحليلا	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

IV. مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

Prof Mustapha KHALDI

إذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية $\Delta \geq 0$ فإن:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نرمز للمجموع بالرمز S و للجداء بالرمز P

$$S = \frac{-b}{a} \quad ; \quad P = \frac{c}{a}$$

✱ نتائج:

❶ حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين فيمكن حساب الحل الآخر باستعمال المجموع: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ أو الجداء: $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

❷ حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما

يمكن حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما باستعمال العلاقة: $x^2 - Sx + P = 0$

❸ تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية $(ax^2 + bx + c = 0)$

إذا كان		فإن
$\frac{c}{a} < 0$		المعادلة تقبل حلين من إشارتين مختلفتين
$\frac{c}{a} > 0$	و $-\frac{b}{a} > 0$	المعادلة تقبل حلين موجبين
	و $-\frac{b}{a} < 0$	المعادلة تقبل حلين سالبين

V. المعادلات مضاعفة التربيع $(ax^4 + bx^2 + c = 0)$:

يؤول حل المعادلة مضاعفة التربيع $ax^4 + bx^2 + c = 0$ إلى حل الجملة: $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

✱ملاحظة: عند إيجاد قيمة X_1 و X_2 يجب تعويضهما في المعادلة $X = x^2$ لإيجاد قيم x

Prof Mustapha
KHALDI

الاشتقاقية

I. تعاريف

1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة f عند 0 هي l (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0) = l$ و نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$

2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l}$ أو $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l}$ حيث $(h = x - x_0)$

f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty}$

✱ العدد المشتق: يسمى l العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز له $\boxed{f'(x_0)}$ أي $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

✱ نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة f بين x_0 و $x_0 + h$ و نرمز له ب $g(h)$

✱قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

3) الدالة المشتقة لدالة f

- f قابلة للاشتقاق على D_f معناه f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f
- مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها f' حيث $\boxed{f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

II. التفسير الهندسي للعدد المشتق

1) معادلة المماس عند نقطة:

مماس المنحنى C_f عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل a, n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على الشكل $a + h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشري (h قيمة قريبة من 0) $\boxed{f(a+h) = f'(a)h + f(a)}$

✱ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a + h$ مباشرة في معادلة المماس

III. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
b	0
ax	a
x^2	$2x$
ax^n	$n \times ax^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

VI. عمليات على الدوال المشتقة

$f(x)$	$f'(x)$
$(u+v)$	$u'+v'$
$(u \times v)$	$u'.v+v'.u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu' \times u^{n-1}$
λu	$\lambda u'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$(uov)'$	$[u'ov] \times v'$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$

تطبيقات الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHALDI

❶ تحديد اتجاه تغير دالة

المشتقة f'	تغيرات f
f' موجبة تماما على I	f متزايدة تماما على I
f' سالبة تماما على I	f متناقصة تماما على I
f' معدومة على I	f ثابتة على I

❷ معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I فإن f تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

❸ نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة c من I و لا تغير إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

❹ حصر دالة

- f متزايدة تماما على $[a, b] \Leftarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- f متناقصة تماما على $[a, b] \Leftarrow f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

❺ الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $f(x) \leq k \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و يسمى k عنصرا حادا من الأعلى (Majorant)
- $f(x) \geq k \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و يسمى k عنصرا حادا من الأسفل (Minorant)

*ملاحظة:

f تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو Majorant

f تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو Minorant

❻ نظرية القيم المتوسطة

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a,b] \\ f(a)\times f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } x_0 \text{ على المجال } [a,b]$$

❼ المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

- بيانيا
  - C_f فوق $C_g \Leftarrow f(x) > g(x)$
  - C_f تحت $C_g \Leftarrow f(x) < g(x)$
  - C_f تقطع $C_g \Leftarrow f(x) = g(x)$
- حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

x	a b	x_0 0	
إشارة $f(x) - g(x)$	$-$		$+$
الوضع النسبي بين C_g و C_f	C_f تحت C_g	C_f يقطع C_g	C_f فوق C_g

Prof Mustapha
KHALDI

النهايات ①
(السلوك التقاربي لمنحن)

مفاهيم

❶ بصفة عامة يتم حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

❷ إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a حيث $a \in D_f$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

❸ إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد a تكون هذه النهاية وحيدة

❹ يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها مثلا $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

I. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

نقول أن ل f نهاية منتهية l عند a معناه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = l$

II. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

إذا كانت f دالة من الشكل $\boxed{f(x) = \dfrac{d}{g(x)}}$ حيث $g(x)$ كثير حدود، d و a عددان حقيقيان حيث $g(a) = 0$ فإن:

<table>
<tr><th>إذا كانت إشارة $g(x)$</th><th>وإشارة d</th><th>فإن</th></tr>
<tr><td rowspan="4"><table><tr><td>$-\infty$</td><td>$<$ a $>$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td><td rowspan="2">$d > 0$</td><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$d < 0$</td><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="4"><table><tr><td>$-\infty$</td><td>$<$ a $>$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td><td rowspan="2">$d > 0$</td><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$d < 0$</td><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$</td></tr>
</table>

✱ملاحظة:

<table>
<tr><th>إذا كانت</th><th>وإشارة d</th><th>فإن</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$f(x) = \dfrac{d}{[g(x)]^2}$ أو $f(x) = \dfrac{d}{|g(x)|}$</td><td rowspan="2">$d > 0$</td><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$d < 0$</td><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$</td></tr>
</table>

III. نهاية منتهية عند ما لا نهاية

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \dfrac{d}{x}$ حيث d عدد حقيقي فإن: $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} = 0}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{d}{x} = 0}$

و منه نستنتج أن: $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} + b = b}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{d}{x} + b = b}$

IV. نهاية غير منتهية عند ما لا نهاية

نقول أن ل f نهاية غير منتهية ∞ عند ∞ معناه $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$

V]. المبرهنات الأولية على النهايات

① نهاية مجموع دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim[f(x)+g(x)] =$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

② نهاية جداء دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim[f(x)\times g(x)] =$
l	l'	$l\times l'$
$l>0$	$+\infty$	$+\infty$
$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$
$l<0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	ح ع ت
0	$-\infty$	ح ع ت
$l<0$	0^+	0^-
$l<0$	0^-	0^+

③ نهاية حاصل قسمة دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$
l	l'	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
l	$-\infty$	0
$+\infty$	$l>0$	$+\infty$
$+\infty$	$l<0$	$-\infty$
$-\infty$	$l>0$	$-\infty$
$-\infty$	$l<0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$-\infty$	ح ع ت
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
0	0	ح ع ت
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$l>0$	0^+	$+\infty$
$l<0$	0^+	$-\infty$
$l>0$	0^-	$-\infty$
$l<0$	0^-	$+\infty$

④ حالات خاصة

إذا كانت $\lim f(x) =$	فإن: $\lim [f(x)]^2 =$	$\lim \lvert f(x)\rvert =$	$\lim\sqrt{f(x)} =$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
0^-	0^+	0^+	

⑤ حالات عدم التعيين

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$ $-\infty+\infty$

Prof Mustapha
KHALDI

Prof Mustapha
KHALDI

النهايات ②
(التفسير الهندسي)

1 المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب (عمودي)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftarrow x = a$ مستقيم مقارب عمودي يوازي محور التراتيب

2 المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (أفقي)

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b \Leftarrow y = b$ مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل

3 المستقيم المقارب المائل

أ] البحث عن المستقيم المقارب المائل

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty \Leftarrow$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

إذا كان $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - ax] = b \end{array}\right\} \Leftarrow y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f

ب] إثبات أن مستقيم هو مقارب مائل ل C_f

لإثبات أن $\boxed{y = ax + b}$ مقارب مائل ل C_f يكفي برهان أن: $\boxed{\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0}$

ج] دراسة وضعية C_f بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ نقوم بدراسة

إشارة الفرق: $\boxed{f(x) - (ax + b)}$

x	$-\infty$ $+\infty$	x_0
إشارة $f(x) - y$	$-$	$+$
الوضع النسبي بين C_f و (Δ)	C_f تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ) — C_f فوق (Δ)

✱ملاحظة: يسمى المنحنى الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad - cb \neq 0$ قطعا

زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين هما: $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$

مخطط دراسة دالة

❶ مجموعة التعريف

✪ تحديد مجموعة تعريف الدالة إن لم تكن قد أعطيت في النص

❷ دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة)

✪ قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مركز أو محور تناظر المنحنى

❸ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

❹ تحديد المستقيمات المقاربة

❺ دراسة اتجاه تغير الدالة

① حساب المشتقة

② دراسة إشارة المشتقة

③ استنتاج اتجاه تغير الدالة

④ تحديد القيم الحدية في حالة وجودها

❻ حساب نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

❼ تشكيل جدول التغيرات

❽ التمثيل البياني للدالة

① رسم المستقيمات المقاربة

② تمثيل النقط الحدية (الكبرى و الصغرى إن وجدت) مع رسم المماسات الأفقية عندها

③ تمثيل نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

④ تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب احداثياها

⑤ رسم المماسات المائلة (إن وجدت)

⑥ رسم محور التناظر أو تمثيل مركز التناظر (إن وجدو) لاستغلال التناظر و تسهيل الرسم

⑦ استغلال و استعمال جدول التغيرات لرسم الدالة

Prof Mustapha
KHALDI

المرجح في المستوي ①

❖ مرجح نقطتين

* G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$

- α و β عددان حقيقيان
- تسمى الثنائية (A,α) نقطة مثقلة و تسمى الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ جملة نقطتين مثقلتين

* إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل: $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ $\Leftarrow$ G منتصف $[AB]$; (نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=1$)

مبرهنات:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
- G منتصف $[AB]$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$

خواص:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ فإن النقط A , B و G على استقامة واحدة

احداثيا مرجح نقطتين:

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$:

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \quad ; \quad x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$$

Prof Mustapha
KHALDI

إنشاء مرجح نقطتين:

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

2) نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة ثم انطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

❖ مرجح 3 نقط

* G مرجح النقط A , B و C المرفقة بالمعاملات α , β و γ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- α , β و γ أعداد حقيقية حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

* إذا كان $\alpha=\beta=\gamma$ و النقط A , B و C ليست على استقامة واحدة فإن: G مركز ثقل المثلث ABC

(نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=\gamma=1$)

مبرهنة:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

خواص:

- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, إذا كانت D مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن: G مرجح $\{(D,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$

احداثيا مرجح 3 نقط:

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $C(x_C;y_C)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$:

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad ; \quad x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

إنشاء مرجح 3 نقط:

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

طريقة 1:

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

2) نرسم الشعاع $\overrightarrow{AG}$ محصلة مجموع الشعاعين $\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ و $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}$

طريقة 2:

1) ننشئ I مرجح نقطتين بحيث مجموع المعاملين $\neq 0$ مثلا A و C بحيث $\alpha+\gamma\neq 0$

2) نكتب $\overrightarrow{GI}$ بدلالة $\overrightarrow{BI}$ و ننشئ G

المرجح في المستوي ②

❖ مجموعة النقط

	إذا كان	فإن مجموعة النقط هي	
❶	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = k'$ حيث $k' > 0$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	دائرة
	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = AB$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = AB$ (لأن AB طول موجب ثابت)	
	$(MG)\perp(MH)$	دائرة قطرها GH و مركزها منتصف $[GH]$	
❷	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = k'$ حيث $k' < 0$	مجموعة خالية	ϕ
❸	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = 0$	النقطة G (أو هي النقطة M منطبقة على G)	نقطة
❹	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$	مستقيم محور القطعة $[GH]$	مستقيم
❺	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| \leq k'$	كل النقط من المستوي التي تقع داخل و على محيط الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	جزء من المستوي
	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| > k'$	كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	
	$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| < \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$	نصف المستوي في جهة النقطة G و حده محور $[GH]$	

✱ملاحظة1: لإثبات أن B تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض M ب B في العلاقة المعطاة و نتحصل على علاقة صحيحة

✱ملاحظة2: لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من M

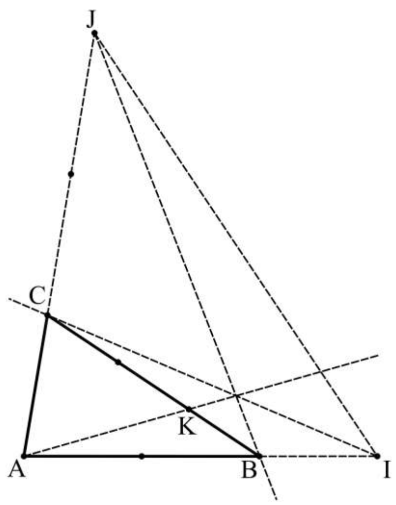
❖ اثبات تلاقي مستقيمات

مثال: ABC مثلث و النقط I , J و K معرفة كما يلي:

Prof Mustapha
KHALDI

- I نظيرة منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى B
- النقطة J تحقق: $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
- النقطة K تحقق: $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1) أرسم شكلا توضح فيه النقط I , J و K مع التبرير.
2) أثبت أن كل نقطة من النقط I , J و K هي مرجح لنقطتين من النقط A , B و C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.
3) أثبت أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة.



الحل:

1) الإنشاء مع التبرير:

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
- $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{-3}{2-3}\overrightarrow{AC} \Leftarrow \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2) اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftarrow 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} \Leftarrow -2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0}$

$\Leftarrow \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه I مرجح الجملة: $\{A(1), B(-3)\}$

* بنفس الطريقة نجد: J مرجح : $\{A(2), C(-3)\}$ و K مرجح : $\{B(2), C(1)\}$

3) إثبات أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة:

ليكن G مرجح $\{(A,2); (B,-6); (C,-3)\}$, G موجود لأن: $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

طريقة 1: (باستعمال خاصية التجميع)

G مرجح $\{(I,-4); (C,-3)\}$ و منه $G \in (IC)$

G مرجح $\{(J,-1); (B,-6)\}$ و منه $G \in (JB)$

G مرجح $\{(K,-9); (A,2)\}$ و منه $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في النقطة G

طريقة 2: (باستعمال الارتباط الخطي)

$2\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$-7\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$-7\overrightarrow{GI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}) - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GI} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{IC}$ و منه $G \in (IC)$

* بنفس الطريقة نجد: $G \in (JB)$ و $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في G

❖ مستقيم اولار (Euler): هو المستقيم الذي يشمل مركز ثقل مثلث ومركز الدائرة المحيطة به وملتقى الإرتفاعات فيه.

الزوايا الموجهة

- يوجه المستوي
  - توجيها مباشرا (موجب) ← عكس عقارب الساعة
  - توجيها غير مباشر (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة

- نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الإتجاه المباشر والتي نصف قطرها **1**

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:

- نسمي الثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين.

✪ إذا كان x قيس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع $\boxed{k\in\mathbb{Z}}$

✪ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ أو $[0,2\pi[$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$

✪ **إيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})=x$:**

❶ نكتب الشكل العام للزاوية أي: $(\vec{u},\vec{v})=x+2k\pi$

❷ نحصر الشكل العام للزاوية بين π و $-\pi$ أي: $-\pi<x+2k\pi<\pi$

❸ يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القيس الرئيسي.

✪ **علاقة شال:**

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

<u>نتائج:</u>

- $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$
- $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$

Prof Mustapha
KHALDI

✪ **تقايس الزوايا الموجهة:**

لتكن $(\vec{u},\vec{v})=\alpha$ و $(\vec{u'},\vec{v'})=\alpha'$

$(\vec{u},\vec{v})$ و $(\vec{u'},\vec{v'})$ متقايستان $\Leftrightarrow$ $\alpha'=\alpha+2k\pi$ أي $\alpha'-\alpha$ مضاعف ل 2π

✪ **الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:**

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow$
- $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ $\Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في نفس الاتجاه)
- أو
- $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$ $\Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في اتجاهين متعاكسين)

✪ **خاصية:**

$\{k;k'\}\in\mathbb{R}^*$

- إذا كان k و k' من <u>نفس الإشارة</u> فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
- إذا كان k و k' من <u>إشارتين مختلفتين</u> فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

- <u>الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:</u>

إذا كانت A، B و M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مثلثية (C) مركزها O فإن:

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$$

❖ حساب المثلثات

- $-1 \leq cosx \leq 1$
- $-1 \leq sinx \leq 1$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$

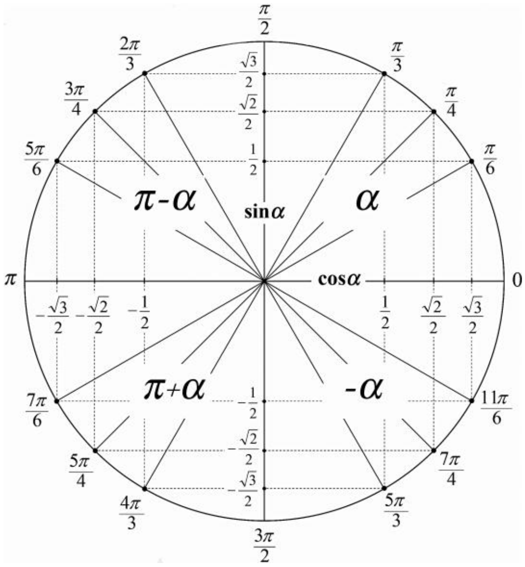
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

جدول زوايا شهيرة:

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

الدائرة المثلثية:



❖ الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

ليكن $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس ولتكن M نقطة من المستوي غير منطبقة على O

✱ تسمى الثنائية $M(x;y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M

✱ تسمى الثنائية $M(r;\theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = OM$ و $\theta = (\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$

مصطلحات: النقطة O تسمى القطب، $(O;\vec{\imath})$ يسمى المحور القطبي، r نصف القطر القطبي و θ زاوية قطبية

❖ العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

$$y = r\sin\theta \quad ; \quad x = r\cos\theta \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Prof Mustapha
KHALDI

❖ المعادلات المثلثية

❶ $\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$

❷ $\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

❸ المعادلات من الشكل $\cos x = a$

✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\cos c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = -c + 2k\pi \end{cases}$

❹ المعادلات من الشكل $\sin x = a$

✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\sin c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = \pi - c + 2k\pi \end{cases}$

❺ المعادلات من الشكل $\cos u = \sin v$

✳ إما نحول sin إلى cos بالقانون $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ فتصبح المعادلة $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ أي من الشكل ❶

✳ أو نحول cos إلى sin بطريقتين:

- بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin v$ أي من الشكل ❷
- أو بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = \sin v$ أي من الشكل ❷

Prof Mustapha
KHALDI

الاحتمالات

I. مصطلحات

1) **تجربة عشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة

2) **مجموعة الإمكانيات Ω:** هي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل:
(الحادثة الأكيدة، المجموعة الشاملة أو **مجموعة المخارج)**

3) **الحادثة A:** هي مجموعة جزئية من Ω

1.3) **الحادثة الأولية:** هي حادثة تحتوي على عنصر وحيد

2.3) **الحادثة المستحيلة ϕ:** هي الحادثة الخالية

3.3) **الحادثة العكسية $\overline{A}$:** هي الحادثة التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A

* لتكن B حادثة أخرى من Ω:

4) $A \cap B$: هي العناصر المشتركة بين A و B

5) $A \cup B$: هي العناصر المشتركة و الغير مشتركة بين A و B بدون تكرار

6) A و B **غير متلائمتين** $\Leftarrow$ $A \cap B = \phi$

7) A و B **حادثتان مستقلتان:** احتمال الحادثة A لا يؤثر في احتمال الحادثة B و العكس.

II. قانون الاحتمال

لتكن $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots \dots \dots, e_n\}$ حيث e_i هو المخرج رقم i مع $i \in \mathbb{N}^*$

1) **قانون الاحتمال P_i:** هو احتمال تحقق المخرج e_i

2) **احتمال الحادثة A:** يرمز له ب $P(A)$ ويساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A

3) خواص:

- $0 \le P_i \le 1$ و $0 \le P(A) \le 1$
- $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ أي $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 1$
- $P(\Omega) = 1$ و $P(\phi) = 0$

Prof Mustapha
KHALDI

III. تساوي الاحتمال

1) **تجربة متساوية الاحتمال:** هي تجربة عشوائية حيث كل الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال

2) **مصطلحات تساوي الاحتمال:**

"زهر نرد غير مزيفة" ، **"قطعة نقود متوازنة"** ، **"كريات لا نفرق بينها عند اللمس"** ...

✱ملاحظة مهمة جدا: لا تكفي هذه المصطلحات لاعتبار تساوي الاحتمال بل يتعلق بالسؤال المطروح أيضا (و يمكن للمجموعة الشاملة Ω أن تتغير من سؤال لآخر في نفس التمرين)

3) **نتائج:**

في حالة تساوي الاحتمال يكون قانون الاحتمال متساوي التوزيع حيث:

- كل مخرج e_i له احتمال $P_i = \frac{1}{n}$
- $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

IV. خواص الاحتمالات:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- إذا كانت $B \subset A$ فإن: $P(A) \leq P(B)$
- اذا كانت A و B حادثتان مستقلتان فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

V. تعاريف لقانون الاحتمال:

❶ الأمل E: $E = \sum_{i=1}^{n} e_i p_i$

❷ التباين V: $V = \sum_{i=1}^{n} (e_i - E)^2 p_i$ أو $V = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 p_i - E^2$

❸ الانحراف المعياري σ: $\sigma = \sqrt{V}$

✳ملاحظة: الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا عناصر Ω هي قيم الطبع و قيم P_i هي التواترات

VI. المتغير العشوائي X

1. المتغير العشوائي X هو دالة عددية معرفة على Ω
2. عموما نرمز ب "I" لمجموعة قيم X أي $I = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

VII. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو احتمال تحقق المخرج X_i من I و نرمز له ب P_i أو $P(X = x_i)$

VIII. تعاريف للمتغير العشوائي X:

❶ الأمل الرياضياتي E: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

❷ التباين V: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P_i$ أو $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - (E(X))^2$

❸ الانحراف المعياري σ: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Prof Mustapha
KHALDI

التحاكي

1. تعريف: التحاكي هو تحويل نقطي معرف بالعلاقة

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$ (مثل علاقة الارتباط الخطي)

حيث O هو <u>مركز</u> التحاكي و $k \in \mathbb{R}^*$ هي <u>نسبته</u> و M' هي <u>صورة</u> M بهذا التحاكي

* نرمز للتحاكي h بالرمز: $h(O, k)$

نتيجة: A, B, C على استقامة واحدة $\Leftarrow$ يوجد h وحيد و k وحيد يحقق: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

2. الخاصية المميزة:

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$

Prof Mustapha
KHALDI

نتائج:

❶ بما أن $k \neq 0$ و A تختلف عن B فإن: $(A'B') /\!/ (AB)$ و منه:

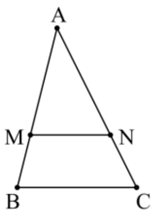
- صورة مستقيم (d) بتحاك هي مستقيم (d') يوازي (d)
- صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ بتحاك هي قطعة مستقيمة $[A'B']$ حيث $\overrightarrow{A'B'} /\!/ \overrightarrow{AB}$

❷ $A'B' = |k|AB$

❸ إذا كان G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ فإن صورته بالتحاكي هي G' مرجح $\{(A', \alpha); (B', \beta)\}$

<u>تذكير:</u> مستقيم (AB) هو مجموعة النقط M مرجحات $\{(A, \alpha); (B, 1-\alpha)\}$ مع $\alpha \epsilon \mathbb{R}$

3. المثلثات المتحاكية:



ABC و AMN مثلثان. $M \in (AB)$ و $N \in (AC)$ حيث: $(MN) /\!/ (BC)$

التحاكي h الذي مركزه A و يحول B إلى M <u>يحول كذلك</u> C إلى N (نظرية طالس)

4. صورة دائرة:

صورة دائرة (C) مركزها I و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') <u>مركزها</u> $I' = h(I)$ و <u>نصف قطرها</u> $r' = |k|r$

5. خواص التحاكي:

① الحفاظ على استقامية النقط

② الحفاظ على التوازي

③ الحفاظ على الزوايا الموجهة

④ **لا يحافظ على الأطوال و المساحات و الحجوم** (التحاكي يضاعف الأطوال $|k|$ مرة و يضاعف المساحات k^2 مرة و يضاعف الحجوم $|k^3|$ مرة)

✱ <u>ملاحظة:</u> **عندما يكون $|k| > 1$ يقوم التحاكي بتكبير الأشكال و عندما يكون $0 < k < 1$ فإن الشكل يصغر k مرة**

الجداء السلمي

1. الجداء السلمي لشعاعين

$\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(x';y')$ بحيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

حالات خاصة:

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
* $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ و $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$
* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2. تعامد شعاعين

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0}$$

3. قواعد الحساب

أ) خواص الجداء السلمي:

❶ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; ❷ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$; ❸ $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

ب) المتطابقات الشهيرة:

* $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
* $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
* $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
* $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
* $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

4. الجداء السلمي والاسقاط العمودي

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'}$
* إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ و $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ و C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على (AB) فإن:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}}$$

حالات خاصة:

* إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD$
* إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB.CD$

5. تطبيقات الجداء السلمي

أ) في المستقيم:

ليكن (D) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$

شعاع التوجيه: $\boxed{\vec{v}(-b;a)}$; $\boxed{\vec{v}\binom{-b}{a}}$

الشعاع الناظمي: $\boxed{\vec{n}(a;b)}$; $\boxed{\vec{n}\binom{a}{b}}$

* ملاحظة: يكون الشعاع الناظمي دائما عمودي على شعاع التوجيه $\boxed{\vec{n} \perp \vec{v}}$ أي $\boxed{\vec{n}.\vec{v} = 0}$

Prof Mustapha
KHALDI

ب) في الدائرة:

❶ معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0; y_0)$ و نصف قطرها r هي $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$

❷ الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}}$

✳ **ملاحظة:** لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و العكس <u>غير</u> صحيح.

6. حساب أطوال، مساحات وأقياس زوايا (العلاقات المترية في مثلث)

ABC مثلث مساحته S و نصف محيطه p أي $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$

أ) مبرهنة المتوسط

A و B نقطتان و I منتصف $[AB]$ من أجل كل نقطة M لدينا: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ب) مبرهنة الكاشي

❶ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

❷ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$

❸ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

ج) مبرهنة المساحة

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Prof Mustapha
KHALDI

د) قاعدة هيرون

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ه) مبرهنة الجيوب

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

7. المسافة بين نقطة ومستقيم

المسافة بين نقطة $A(x_0; y_0)$ وبين مستقيم معادلته $ax+by+c=0$ هي:

$$\boxed{d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

8. دساتير الجمع

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos 2a=\boxed{\cos^2 a-\sin^2 a}=\boxed{2\cos^2 a-1}=\boxed{1-2\sin^2 a}$$

$$\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a}$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

<u>إضافة:</u> $\cos\widehat{A}=1+\frac{2p(p-a)}{bc}$; $\cos\widehat{A}=1-\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

المتتاليات العددية

I]. تعاريف و رموز

المتتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n العدد $u(n)$ حيث:

نرمز للمتتالية بالرمز u_n بدلا من $u(n)$ حيث u_n هي صورة n بالمتتالية u

يسمى u_n أيضا الحد العام للمتتالية u او الحد الذي دليله n

إذا كان $n \geq p$ نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq p}$

Prof Mustapha
KHALDI

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$

u_1 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$

u_p هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل $n \geq p$

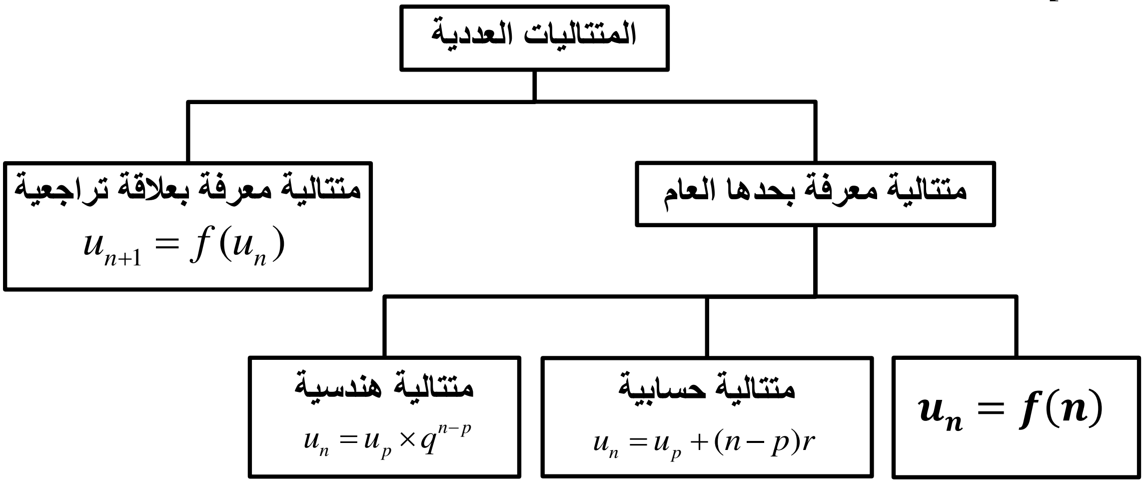
يسمى n دليل المتتالية u أو دليل الحد u_n

p هو دليل الحد الأول للمتتالية u

$(n-p+1)$ هي رتبة الحد u_n

حساب الحد الذي رتبته m أي حساب الحد $u_{(m-p+1)}$

II]. طرق توليد متتالية عددية



III]. اتجاه تغير متتالية عددية

عموما:

إذا كان	فإن
$u_{n+1} > u_n$	u متزايدة
$u_{n+1} < u_n$	u متناقصة
$u_{n+1} = u_n$	u ثابتة

طريقة ❶: ندرس إشارة الفرق $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

إذا كان	فإن
$u_{n+1} - u_n > 0$	u متزايدة
$u_{n+1} - u_n < 0$	u متناقصة
$u_{n+1} - u_n = 0$	u ثابتة

طريقة ❷: ندرس تغيرات f إذا كانت المتتالية من الشكل: $\boxed{u_n = f(n)}$

طريقة ❸: نحسب النسبة $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$ و نقارنها مع 1

إذا كان	فإن
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	u متزايدة
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	u متناقصة
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$	u ثابتة

IV]. المتتالية الحسابية

① تعريف

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

r هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو u_0 فإن:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

✱ملاحظة:

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية حسابية

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$$

$$\boxed{S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)}$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

④ البرهان أن المتتالية حسابية

طريقة ❶: نحسب الفرق $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

إذا كان: $u_{n+1} - u_n = \boxed{r}$ حيث r عدد ثابت خالي من n فإن u_n حسابية

طريقة ❷: نكتب u_n على الشكل

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

⑤ الوسط الحسابي

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية

$\boxed{a + b = 2c}$ أي $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$

V]. المتتالية الهندسية

① تعريف

$$\boxed{v_{n+1} = v_n \times q}$$

q هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو v_0 فإن:

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو v_1 فإن:

$$\boxed{v_n = v_1 \times q^{n-1}}$$

Prof Mustapha
KHALDI

✱ملاحظة:

إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية هندسية

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$$

$$\boxed{S_n = \text{الحد الأول}\left(\frac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}\right)}$$

$$\boxed{S_n = v_p\left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}\right)}$$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\frac{1 - q^n}{1-q}$$

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}}$$

④ البرهان أن المتتالية هندسية

طريقة ❶: نحسب النسبة $\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n}}$

إذا كان: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \boxed{q}$ حيث q عدد ثابت خالي من n فإن v_n هندسية

طريقة ❷: نكتب v_n على الشكل

$$\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$$

⑤ الوسط الهندسي

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

$\boxed{a \times b = c^2}$ أي $u_{n+1} \times u_{n-1} = {u_n}^2$

VI]. المتتالية الثابتة

① **تعريف:** هي المتتالية التي جميع حدودها متساوية أي $u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_n$

② البرهان أن المتتالية ثابتة

يكفي إثبات أن $u_{n+1} - u_n = 0$ أو أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ أو إثبات أن $u_{n+1} = u_n = u_0$

VII]. إثبات أن المتتالية لا حسابية ولا هندسية

- يكفي برهان أن $u_{n+1} - u_n \neq r$ و أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \neq q$
- أو برهان أن $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ و أن $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

VIII]. تقارب وتباعد متتالية

u_n متقاربة $\Leftarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ، حيث $l \in \mathbb{R}$

u_n متباعدة $\Leftarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

✳ **مبرهنة:** إذا كانت $u_n = f(n)$ فإن $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(n)}$

IX]. نهاية متتالية باستعمال الحصر

❶ $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l \\ v_n \leq u_n \leq w_n \end{cases}$

❷ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \\ u_n \geq v_n \end{cases}$

❸ $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \\ u_n \leq v_n \end{cases}$

X]. نهاية متتالية هندسية

	إذا كان		النهاية	التقارب
❶	$q > 1$	و $v_0 > 0$	$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	متباعدة
❷		و $v_0 < 0$	$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	
❸	$-1 < q < 1$		$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$	متقاربة
❹	$q \leq -1$		غير موجودة	متباعدة

XI]. إثبات أن المتتالية غير رتيبة (غير متزايدة وغير متناقصة)

① نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

② نناقش حسب قيم n الفرق $u_{n+1} - u_n$

③ نستنتج أن u_n غير رتيبة

Prof Mustapha
KHALDI

التعليم في الفضاء
(الهندسة الفضائية)

1. المعلم الديكارتي

المعلم للفضاء: هو كل رباعية نقط $(O;I,J,K)$ ليست من نفس المستوي

باعتبار المبدأ O و بوضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$ نرمز للمعلم ب $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

* يسمى (OI) محور الفواصل، (OJ) محور التراتيب و (OK) محور الرواقم
* يرمز للمستوي (OIJ) ب $P(O;\vec{i};\vec{j})$

2. احداثيات نقطة واحداثيات شعاع

* نرمز لإحداثيات نقطة M من الفضاء ب $M(x;y;z)$ حيث $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ مع $(x;y;z)\epsilon\ \mathbb{R}^3$
* نرمز لإحداثيات شعاع من الفضاء ب $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ أو $\overrightarrow{OM}(x;y;z)$

3. الحساب والخواص

$A(x_A;y_A;z_A)$ ، $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء، $\vec{u}(x;y;z)$ ، $\vec{v}(x';y';z')$ شعاعين من الفضاء و $\alpha\epsilon\mathbb{R}$

أ) حساب احداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

ب) حساب احداثيات M منتصف القطعة $[AB]$: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

ج) $\vec{u}+\vec{v}\,(x+x';y+y';z+z')$ و $\alpha\vec{u}=(\alpha x;\ \alpha y\ ;\ \alpha z)$

د) $\vec{u}=\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$ و $\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$

4. الأشعة من نفس المستوي

$\vec{u}(a;b;c)$ ، $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ 3 أشعة من الفضاء و $(x;y)\epsilon\mathbb{R}^2$.

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي $\Leftrightarrow \vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

أي الجملة $\begin{cases}ax+a'y=a''\\bx+b'y=b''\\cx+c'y=c''\end{cases}$ تقبل حلا $(x;y)$ في $\mathbb{R}^2$

Prof Mustapha
KHALDI

5. معادلة مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

ليكن (D) المستقيم الذي يشمل $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له

$$M(x;y;z)\epsilon(D)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x-x_A=\alpha a\\y-y_A=\alpha b\\z-z_A=\alpha c\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$$

و منه معادلة (D) هي: $\begin{cases}b(x-x_A)-a(y-y_A)=0\\c(x-x_A)-a(z-z_A)=0\end{cases}$

6. المسافة

❶ طويلة شعاع $\vec{u}(x;y;z)\ \Rightarrow\ \|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

❷ المسافة بين نقطتين $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

7. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم

(S) سطح كرة مركزها O مبدأ المعلم و نصف قطرها α

$$M(x;y;z)\epsilon(S) \Rightarrow OM=\alpha \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=\alpha^2}$$

8. معادلة المستويات الموازية لأحد مستويات الاحداثيات

❶ معادلات مستويات الاحداثيات

معادلة $P(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=0$ ، معادلة $P(O;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=0$ و معادلة $P(O;\vec{k};\vec{i})$ هي $y=0$

❷ معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات

لتكن $D(a;b;c)$ نقطة من المستوي

- معادلة المستوي الذي يشمل D ويوازي $P(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=c$
- معادلة المستوي الذي يشمل D ويوازي $P(O;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=a$
- معادلة المستوي الذي يشمل D ويوازي $P(O;\vec{k};\vec{i})$ هي $y=b$

9. معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها أحد محاور الاحداثيات

ليكن R نصف قطر الأسطوانة

- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Oz) هي $x^2+y^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $z=c$ هي $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=c \end{cases}$
- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Oy) هي $x^2+z^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $y=b$ هي $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y=b \end{cases}$
- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Ox) هي $y^2+z^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $x=a$ هي $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x=a \end{cases}$

10. معادلة سطح المخروط الدوراني الذي رأسه O ومحوره أحد محاور الاحداثيات

لتكن α قيس نصف زاوية رأس هذا المخروط

- معادلة سطح المخروط الذي محوره (Oz) هي: $x^2+y^2-\tan^2\alpha\times z^2=0$
- معادلة سطح المخروط الذي محوره (Oy) هي: $x^2+z^2-\tan^2\alpha\times y^2=0$
- معادلة سطح المخروط الذي محوره (Ox) هي: $y^2+z^2-\tan^2\alpha\times x^2=0$

Prof Mustapha

KHALDI

الاحصاء

Prof Mustapha
KHALDI

I. رموز ومصطلحات

N : عدد التكرارات (المجموع الكلي)
Q_1 : الربعي الأول
Q_3 : الربعي الثالث
D_1 : العشري الأول
D_9 : العشري التاسع
Med : الوسيط

II. الربعيان Q_1 و Q_3 و العشريان D_1 و D_9

تحديد Q_1 ، Q_3 ، D_1 و D_9		
بالترتيب	**طبع كمي متقطع**	**طبع كمي مستمر**
❶ نرتب القيم ترتيبا تصاعديا مع تكراراتها ❷ Q_1 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{N}{4}$ ❸ Q_3 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{3N}{4}$ ❹ D_1 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{N}{10}$ ❺ D_9 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{9N}{10}$	❶* Q_1 هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{N}{4}$ * أو Q_1 هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{1}{4}$ ❷* Q_3 هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ * أو Q_3 هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3}{4}$	❶ Q_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$ ❷ Q_3 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$ ❸ D_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{10}$ ❹ D_9 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{9}{10}$

III. خواص الربعيات

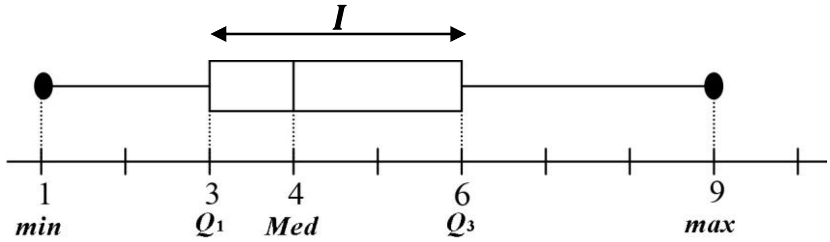
1) الانحراف الربعي $I = Q_3 - Q_1$

*ملاحظة1: الانحراف الربعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت
*ملاحظة2: في مضلع سلسلة مستمرة المستقيمات التي معادلاتها $x = Q_1$ ، $x = Med$ ، $x = Q_3$ تقسم المضلع إلى أربعة مجالات متساوية المساحات

2) المخطط بالعلب

① نضع قيم الطبع على محور (أفقي أو شاقولي)
② نعين على هذا المحور القيم: min ، max ، Q_1 ، Med ، Q_3
③ نكون عندئذ مستطيلا (العلبة) بالتوازي مع المحور بحيث طول المستطيل هو الانحراف الربعي وعرضه كيفي)

مثال: $min = 1$ ، $max = 9$ ، $Q_1 = 3$ ، $Med = 4$ ، $Q_3 = 6$



*ملاحظة: هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع احصائي والمقارنة بين عدة سلاسل احصائية

3) أثر تغيير تآلفي على الربعيين

A سلسلة إحصائية (x_i, n_i) وسيطها Med و ربعيها Q_1 و Q_3
B سلسلة إحصائية (y_i, n_i) بنفس التكرارات وسيطها Med' و ربعيها Q_1' و Q_3'
من أجل كل i لدينا:

- $y_i = ax_i + b$
- $Med' = aMed + b$
- $Q'_1 = aQ_1 + b$
- $Q'_3 = aQ_3 + b$

حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$

IV. الوسط الحسابي $\bar{X}$

$$\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i$$ أو $$\bar{X}=\sum_{i=1}^{p}f_ix_i$$ حيث: $N=\sum_{i=1}^{p}n_i$ و $f_i=\frac{n_i}{N}$

V. التباين V

$$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\bar{X}\right)^2$$ أو $$V=\sum_{i=1}^{p}f_i\left(x_i-\bar{X}\right)$$

أيضا $$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i^2-\bar{X}^2$$ أو $$V=\sum_{i=1}^{p}f_ix_i^2-\bar{X}^2$$

VI. الانحراف $S=\sqrt{V}$

VII. الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة e_m

$$e_m=\sum_{i=1}^{p}f_i\left|x_i-\bar{X}\right|$$

Prof Mustapha
KHALDI

VIII. خواص التباين والانحراف المعياري

1) الخاصية الأساسية

الدالة $g(a)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-a\right)^2$ تقبل قيمة حدية صغرى لما $a=\bar{X}$ و هذه القيمة هي التباين V

2) التغيير التآلفي

إذا كانت A (x_i,n_i) سلسلة إحصائية تباينها V_x و انحرافها S_x و B (y_i,n_i) سلسلة إحصائية تباينها V_y و انحرافها S_y بنفس التكرار و $\boxed{y_i=ax_i=b}$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$ و من أجل $i\in\{1,2,3,\dots,p\}$ يكون لدينا:

$\boxed{V_y=a^2V_x}$ و $\boxed{S_y=|a|S_x}$

IX. تلخيص سلسلة إحصائية

- يتم تلخيص سلسلة إحصائية بمؤشرين (مؤشر موقع ومؤشر تشتت)
- عموما نختار الثنائية (الوسيط ، الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة) : $(Med \text{ ، } e_m)$

  أو الثنائية (الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري) : $(\bar{X} \text{ ، } S_x)$
- يمكن استعمال ثنائيات أخرى لتلخيص سلسلة كالثنائية (الوسيط ، المدى) لكن يعاب على المدى تأثره بالقيم الشاذة
- تستخدم أحيانا الثنائية (الوسيط ، الانحراف الربعي) لتلخيص السلسلة و هي ثنائية لا تتأثر بالقيم الشاذة
- تلخيص سلسلة إحصائية يمكننا من مقارنته بسلسلة أخرى ملخصة بنفس الثنائية