كتاب الرائد للرياضيات

السنة الثانية ثانوي علمي

BEYMATHS+BELABIDI

جزء: التحليل

الدوال+ المتتاليات

تأليف الأستاذين: باي زواوي + بالعبيدي محمد العربي

السنة الدراسية: 2021/2020



الباب الأول

عموميات على الدوال

الكفاءات المستهدفة

- تفكيك دالة باستعمال الدوال المرجعية
- دراسة اتجاه تغير دالة الدوال المرجعية
- تمثيل بعض الدوال بيانيا باستعمال الدوال المرجعية

من بداية الأسبوع الثاني من سبتمبر إلى نهاية الأسبوع الرابع من سبتمبر

المدة: 3أسابيع

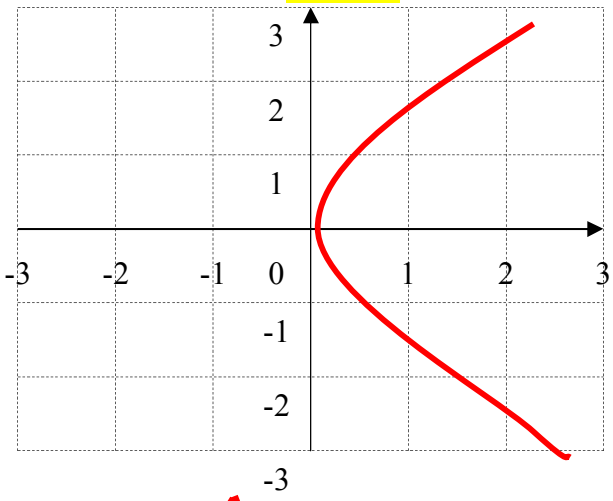
المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي **21 ساعة** و تقني رياضي **18ساعة**

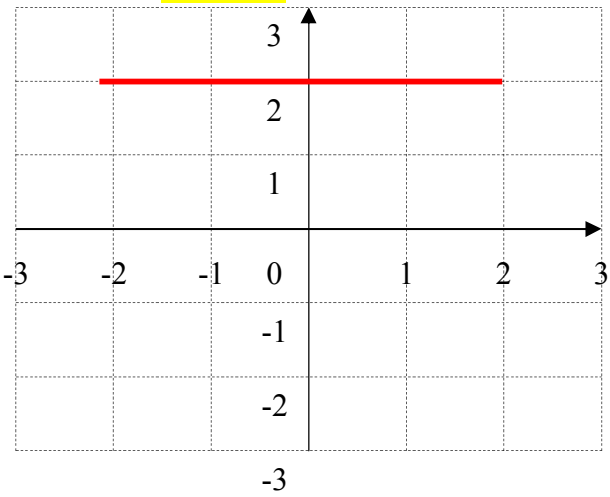
الدوال العددية

نشاط 01: أي التمثيلات يمثل تمثيل بياني لدالة مع التعليل

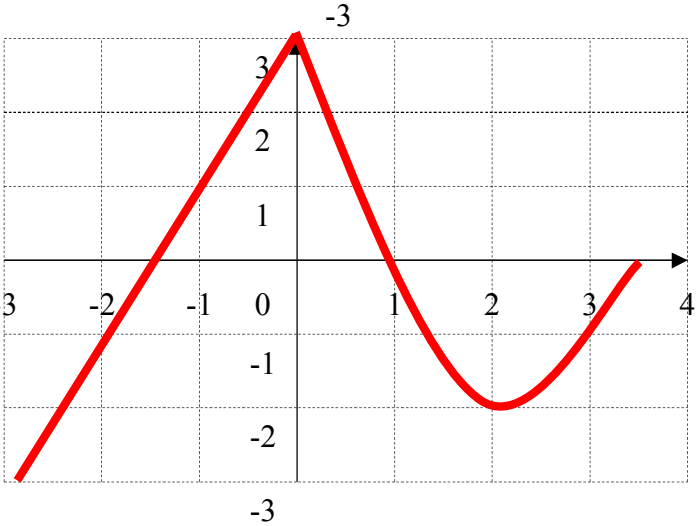
البيان ①



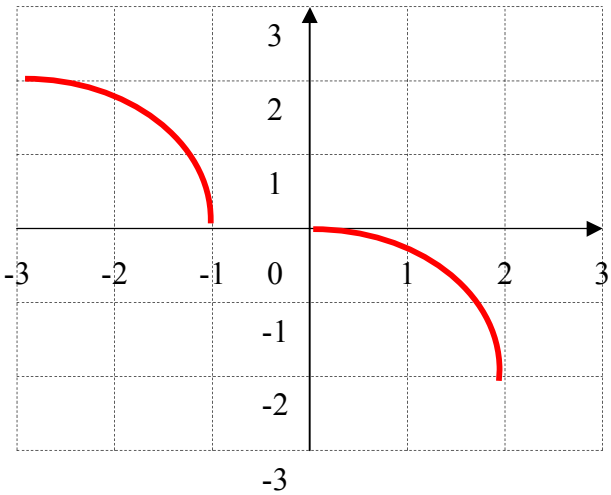
البيان ②



البيان ③



البيان ④



1. عين بيانيا مجموعة تعريف الدالة f_3 للبيان (C_3) " الرسم 3"
2. عين بيانيا من (C_3) صور كل من 1 ،0 ، 1- و سابقة 4
3. حل بيانيا المعادلتين ثم المتراجحة $f(x)=-2$, $f(x)=-x$, $f(x)<0$
4. شكل جدول تغيرات f_3
5. عين القيم الصغى و العظمى على المجال [4 ، 3 -] للدالة f_3

تذكير:

1. الدالة و مجموعة التعريف: D جزء من R إذاكان كل عدد حقيقي من D نرفق له عددا حقيقيا وحيدا من R بواسطة f نسمي f بدالة و f(x) هو صورة x D هي مجموعة تعريفها

ملاحظة: نسمي مجموعة تعريف دالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجاها f(x) ممكن حسابه

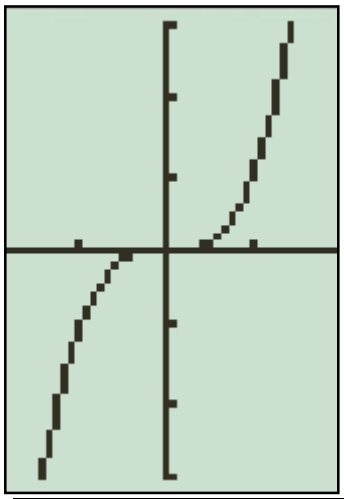
2. التمثيل البياني لدالة: f دالة D مجموعة تعريفها (C) هو التمثيل البياني للدالة f يعني أنه يمثل مجموعة النقط M(x,y) حيث x ∈D و y=f(x) أي أن y=f(x)هي معادلة البيان (C) في المعلم (O,I, J)

تطبيقات: عين مجموعة تعريف الدوال العددية الحقيقية التالية

$$f(x)=\frac{1}{x-1}\text{ ، }f(x)=\frac{1}{x^2-1}\text{ ، }f(x)=\frac{1}{x^2+1}\text{ ، }f(x)=\frac{1}{x^2-x}\text{ ،}f(x)=\frac{1}{|x|-1}\text{ ، }$$

$$f(x)=\sqrt{2x-6}\text{ ، }f(x)=\sqrt{6-2x}\text{ ، }f(x)=\frac{4}{\sqrt{2x-6}}\text{ ، }f(x)=\frac{\sqrt{2x-6}}{x-7}\text{ ، }f(x)=\sqrt{6-2|x|}$$

3. إتجاه تغير دالة:

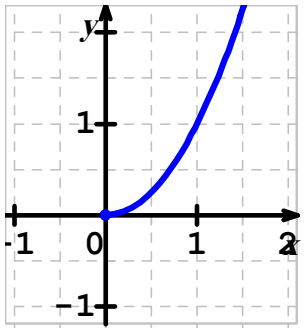
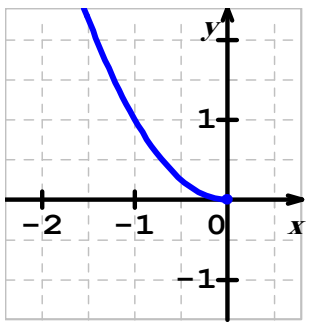
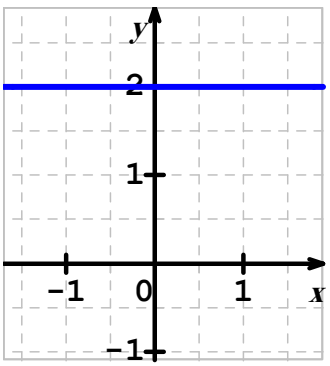


نشاط: باستعمال الألة الحاسبة البيانية مثلناالدالة "**مكعب** " f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3$

1. ماهو التخمين الذي يمكن أن نستنتجه حول اتجاه تغيرها من البيان

2. تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 لدينا:

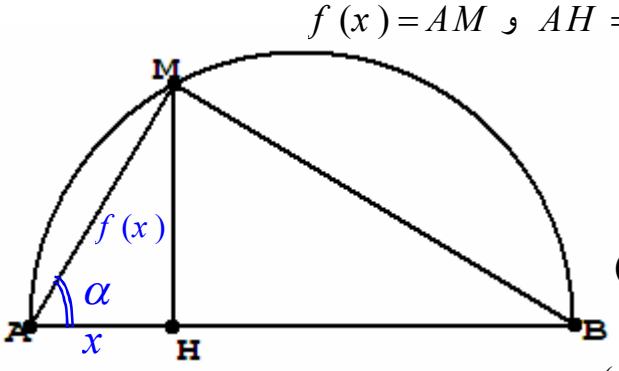
$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^{\,2}\right]$$ استنتج اتجاه تغيرها

الدالة f متزايدة تماما على **I** يعني أنه من أجل كل عددين x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$	
الدالة f متناقصة تماما على **I** يعني أنه من أجل كل عددين x_1 , x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$	
الدالة f ثابتة على **I** يعني أنه من أجل كل عددين x_1 , x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) = f(x_2)$	

واجب منزلي: التمرين رقم 08، 12، 14 ، 19 الصفحة 27

4. الدوال المرجعية:

نشاط: (C) نصف دائرة قطرها $[AB]$ حيث: $AB=1\,cm$ نرفق بكل نقطة M من (C) مختلفة عن A النقطة H المسقط العمودي للنقطة M على (AB) نضع : $\widehat{BAM}=\alpha$ و $AH=x$ و $f(x)=AM$



1. عبر عن $\cos(\alpha)$ بطريقتين مختلفتين
2. استنتج عبارة $f(x)$ بدلالة x
3. حدد مجموعة تعريف الدالة f
4. حدد اتجاه تغيرها ثم شكل جدول تغيراتها
5. ارسم التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

الجواب:

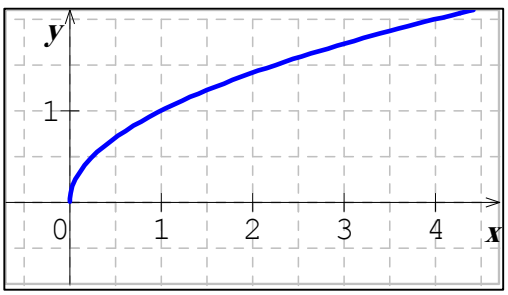
1. بما أن المثلث AHM قائم في H فإن: $\cos(\alpha)=\dfrac{AH}{AM}=\dfrac{x}{f(x)}$ (1)

وبما أن المثلث ABM قائم في M فإن: $\cos(\alpha)=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{f(x)}{1}=f(x)$ (2)

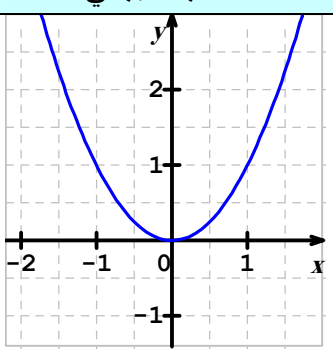
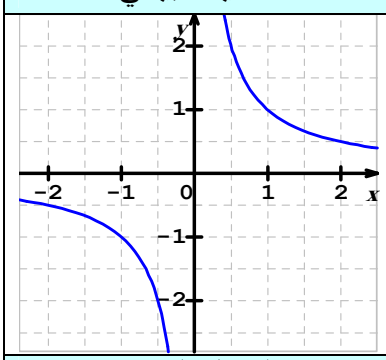
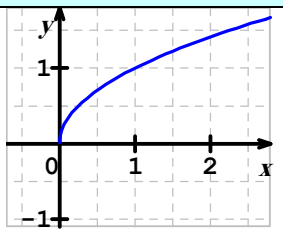
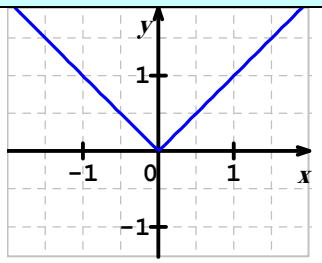
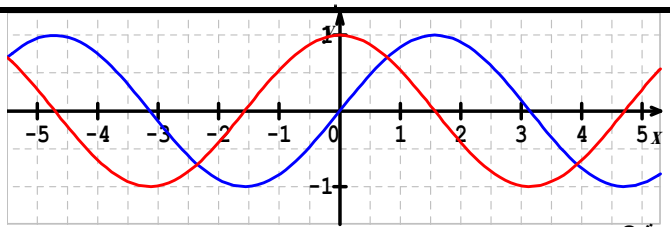
ومن (1) و (2) ينتج : $\dfrac{x}{f(x)}=f(x)$ ومنه: $(f(x))^2=x$ ومنه: $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$

2. لما M تتحرك (C) فإن: M تتحرك على $[AB]$ فإن: x تمسح $[0;1]$ ومنه: $D_f=[0;1]$ لأن: M مختلفة عن A

3. لكل a و b من D_f : نفرض $a<b$ لدينا: $f(b)-f(a)=\sqrt{b}-\sqrt{a}=\dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}>0$ ومنه: f متزايدة تماما



الدوال المرجعية:

الدالة مربع	التمثيل البياني	الدالة مقلوب	التمثيل البياني
$f:x\to f(x)=x^2$ f متزايدة على $[0;+\infty[$ و متناقصة على $]-\infty;0]$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$		$f:x\to f(x)=\dfrac{1}{x}$ f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ وهي معرفة على $\mathbb{R}^*$	
الدالة جذر تربيعي	**التمثيل البياني**	**الدالة قيمة مطلقة**	**التمثيل البياني**
$f:x\to f(x)=\sqrt{x}$ f متزايدة على $[0;+\infty[$ وهي معرفة على $[0;+\infty[$		$f:x\to f(x)=\lvert x\rvert$ f متزايدة على $[0;+\infty[$ و متناقصة على $]-\infty;0]$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$	
$f:x\to f(x)=\cos x$ و $f:x\to f(x)=\sin x$ دوريتان و دورهما 2π			

5. العمليات على الدوال:

نشاط: f و g دالتان معرفتان على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x^2+3$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ أجب بصح أو خطأ على مايلي:

(1) $(f+g)(5)=\dfrac{-22}{5}$ (2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=-x^3+3x$

(3) $(f+g)(x)=\dfrac{-x^2+3}{x}$ (4) $(2f+3g)(1)=7$

الجواب: 1. خطأ 2. صح 3. خطأ 4. صح

1. تساوي دالتان:

تعريف: لتكن f و g دالتان نقول أن الدالتان f و g متساويتان إذا:

- الدالتان f و g لهما نفس مجموعة التعريف D
- لكل $x\in D$: $f(x)=g(x)$

مثال01: لتكن f و g و h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ و $h(x)=x$

لدينا : $f=g$ لأن الشرطان محققان بينما : $f\neq h$ لأن مثلا: $f(-1)=1\neq h(-1)=-1$

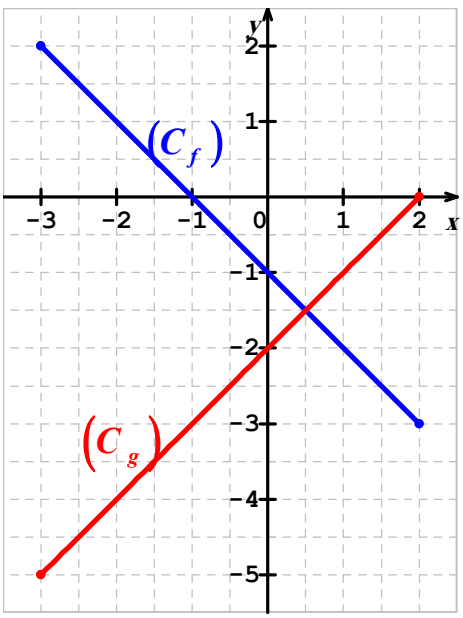
مثال02: لتكن f معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{(x-5)(x+2)}{x-5}$ و g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x+2$

$f\neq g$ لأن ليس لهما نفس مجموعة التعريف لكن $f=g$ على $\mathbb{R}-\{5\}$ فقط

2. العمليات الجبرية على الدوال:

لتكن f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب

العمليات	الترميز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع دالة بعدد حقيقي	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	D_f
مجموع دالتان	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f\cap D_g$
جداء دالة بعدد حقيقي	λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$	D_f
جداء دالتان	$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$D_f\cap D_g$
حاصل قسمة دالتان	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x\in D_f\cap D_g : g(x)\neq 0$



تمرين تطبيقي:

1. بين أن مجموع دالتان تألفيتان هو دالة تألفية
2. لتكن f و g دالتان معرفتان على $[-3;2]$ و المرسومان في المعلم التالي:
   - مثل في نفس المعلم السابق بيان الدالة $f+g$
   - أعطي العبارة الجبرية $(f+g)(x)$

واجبات منزلية: التمرين 27 الصفحة 27 و التمرين 28 الصفحة 28

3. تركيب الدوال:

تعريف: لتكن f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب

إذا كان لكل $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$ فإن: مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة $g(f(x))$

و نرمز لها بالرمز gof ونكتب: $(gof)(x) = g(f(x))$

مثال03: لتكن f و g معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2 + 2$

1. $(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 2 = (x+1)^2 + 2$
2. $(fog)(x) = f(g(x)) = (g(x)) + 1 = x^2 + 3$

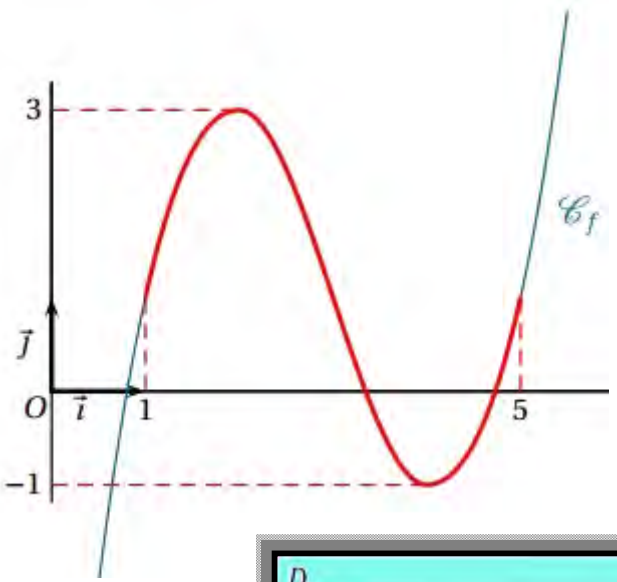
عموما: $gof \neq fog$

ملاحظات هامة:

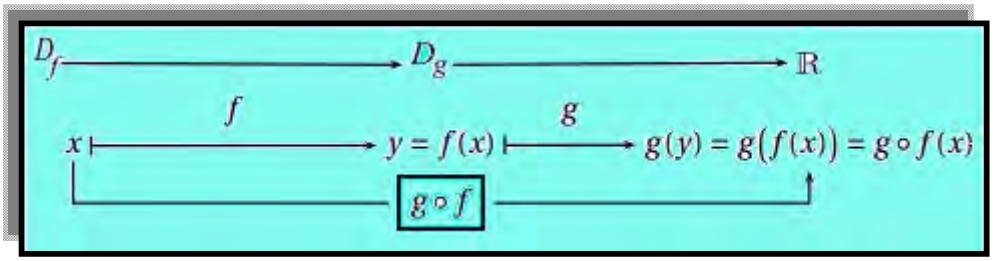
1. **صورة مجال** : لتكن f دالة و I مجال جزئي من مجموعة التعريف D_f

نسمي $f(I)$ مجموعة الصور "مجموعة القيم" لما x تمسح I أي: $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$

مثال: نقرأ من التمثيل البياني التالي : $f([-1;3]) =]1;5]$

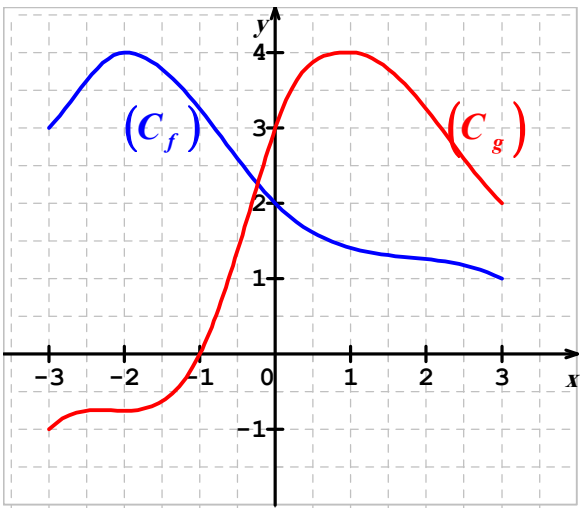


2. مخطط التركيب:



مثال03: لتكن f و g معرفتان على $[-3;3]$

و المرسومان في المعلم التالي:



1. عين إن وجدت الأعداد التالية: $(gof)(-3)$ ، $(gof)(-1)$ ، $(gof)(0)$ ، $(gof)(1)$ ، $(gof)(3)$
2. ماهي مجموعة تعريف الدالة gof
3. عين سابقة"أوسوابق" العدد 3 بواسطة g ، gof

واجبات منزلية: التمرين 34 الصفحة 28 و التمرين 39 الصفحة 28

6. اتجاه تغير الدوال:

نشاط01: لتكن f دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=-5x^2+3$

1. أكتب الدالة f على شكل تركيب دالتان إحداهما الدالة المرجعية مربع
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;0[$

الجواب: 1. $h(x)=x^2$ و $g(x)=-5x+3$ و $f(x)=g(h(x))=(goh)(x)$

2. لكل a و b من المجال $]-\infty;0[$ نفرض $a<b$ ومنه: $a^2>b^2$ لأن الدالة مربع متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

ومنه: $-5a^2<-5b^2$ "الضرب في عدد سالب "

ومنه : $-5a^2+3<-5b^2+3$ ومنه: $f(a)<f(b)$ ينتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

نشاط02: لتكن f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=(-2x+4)^2$

1. أكتب الدالة f على شكل تركيب دالتان: g دالة تألفية و h الدالة المرجعية مربع
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g ، h و f على $]2;+\infty[$
3. عين صورة المجال $]2;+\infty[$ بواسطة الدالة التألفية g

الجواب: 1. $f(x)=(x^2)o(-2x+4)=g(h(x))=(goh)(x)$ حيث: $g(x)=-2x+4$ و $h(x)=x^2$

2. لكل a و b من المجال $]2;+\infty[$ نفرض $a<b$

ومنه: $-2a>-2b$ "الضرب في عدد سالب " ومنه: $-2a+4>-2b+4$

ومنه: $g(a)>g(b)$ أي: g **دالة متناقصة تماما** أو" بما أن g دالة تألفية معاملها سالب فهي متناقصة تماما"

لدينا : a و b من المجال $]2;+\infty[$ معناه $a\geq 2\Leftrightarrow -2a\leq -4\Leftrightarrow -2a+4\leq 0$ بالمثل $b\geq 2\Leftrightarrow -2b\leq -4\Leftrightarrow -2b+4\leq 0$

وعليه : $(-2a+4)$ و $(-2b+4)$ تنتمي إلى $]-\infty;0[$ و **الدالة مربع هي متناقصة على** $]-\infty;0[$

ومنه: $f(a)<f(b)\Leftrightarrow (-2a+4)^2<(-2b+4)^2$ إذن: الدالة f متزايدة على $]2;+\infty[$

3. $g(]2;+\infty[)=]-\infty;0[$

نتيجة : الدالة التألفية g متناقصة تماما على $]2;+\infty[$

و $g(]2;+\infty[)=]-\infty;0[$ و الدالة مربع هي متناقصة على $]-\infty;0[$

ومنه: تركيب دالتان متناقصتان هو دالة متزايدة على $]2;+\infty[$

1. **اتجاه تغير الدالة $f+k$:** لتكن الدالة f رتيبة على D_f فإن f و $f+k$ لهما نفس اتجاه التغير على D_f مع $k\in\mathbb{R}$

2. اتجاه تغير **الدالة λf:** لتكن الدالة f رتيبة على D_f و $\lambda\in\mathbb{R}^*$ فإنه:
   - إذا كان $\lambda>0$ يكون للدالتين f و λf نفس اتجاه التغير على D_f
   - إذا كان $\lambda<0$ يكون للدالتين f و λf اتجاهين متعاكسين في التغير على D_f

3. اتجاه تغير **الدالة gof:** لتكن الدالة f رتيبة على مجال I و g رتيبة على مجال J و حيث: $f(I)\subset J$

f متناقصة تماما على I	f متزايدة تماما على I	
gof **متناقصة تماما على** I	gof **متزايدة تماما على** I	g متزايدة تماما على $f(I)$
gof **متزايدة تماما على** I	gof **متناقصة تماما على** I	g متناقصة تماما على $f(I)$

ملاحظة: إذا كانت g متزايدة تماما على $f(I)$ فإن gof لها نفس إتجاه تغير f على I

إذا كانت g متناقصة تماما على $f(I)$ فإن gof و f من اتجاهين متعاكسين في التغير على I

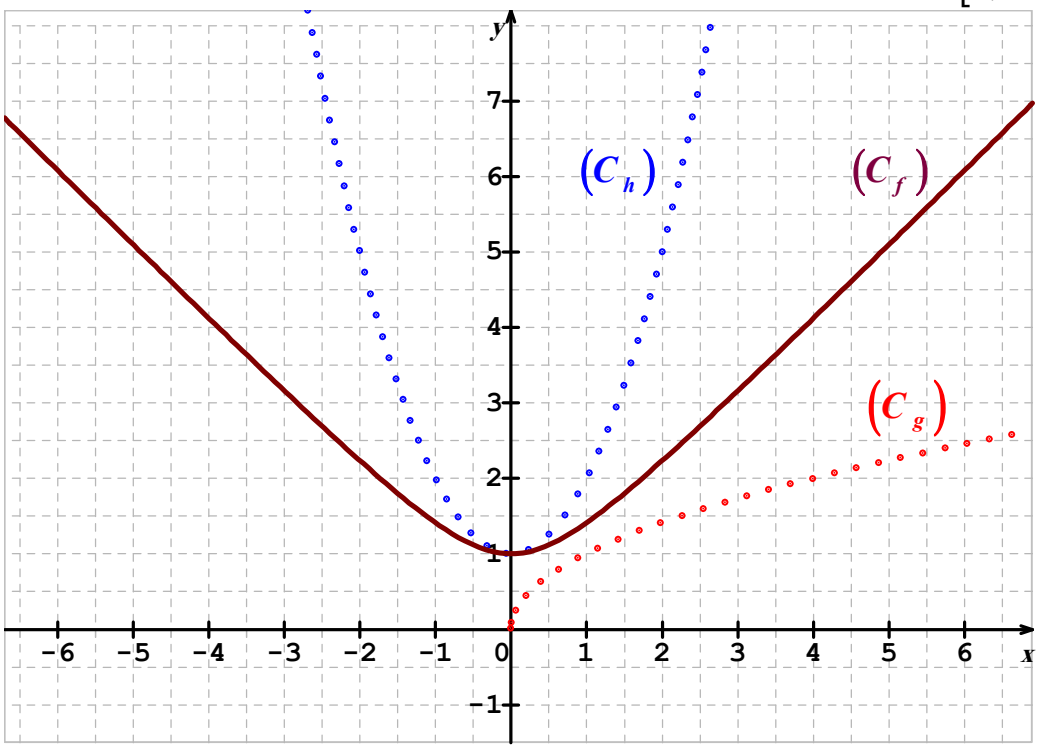
البراهين في الكتاب المدرسي

مثال01: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ يمكن تفكيك الدالة $f=goh$ حيث: $g(x)=\sqrt{x}$ و $h(x)=x^2+1$

أ) لدينا الدالة h متناقصة على $]-\infty;0]$ و $h(]-\infty;0])=[1;+\infty[$ و g دالة متزايدة جذرية إذن f دالة متناقصة على $]-\infty;0]$

ب) لدينا الدالة h متزايدة على $[0;+\infty[$ و $h([0;+\infty[)=[1;+\infty[$ و g دالة متزايدة جذرية إذن f دالة متزايدة على $[0;+\infty[$

التمثيل البياني يوضح النتائج:



تطبيقات : التمرين 49 الصفحة29

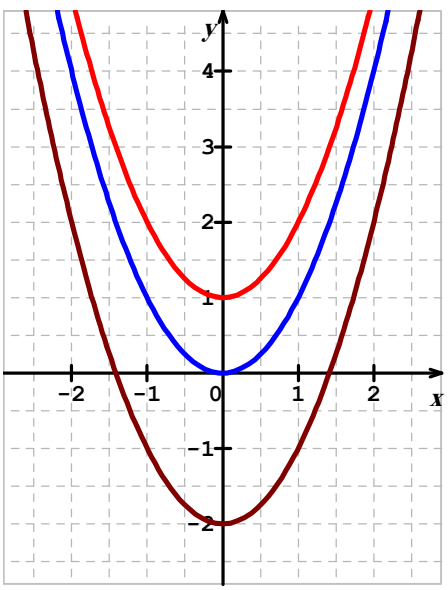
7. التمثيل البياني:

1. التمثيل البياني للدالة $f+k$: إذا كان (C_f) و (C_{f+k}) التمثيلان البيانيان في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

للدالتان f و $f+k$ على الترتيب حيث $k\in\mathbb{R}$ فإن (C_{f+k}) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $k.\vec{j}$

البرهان في الكتاب المدرسي

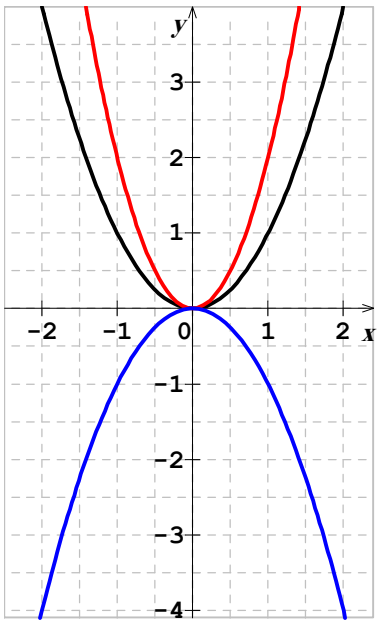
مثال:



- اللون الأزرق هو بيان الدالة مربع
- اللون الأحمر هو بيان الدالة $h(x)=x^2+1$
- اللون البني هو بيان الدالة $h(x)=x^2-2$

تطبيق: التمرين48 الصفحة 29

2. التمثيل البياني للدالة λf : إذا كان (C_f) و $(C_{\lambda f})$ التمثيلان البيانيان في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتان f و λf على الترتيب حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$ فإن $(C_{\lambda f})$ و لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x نحصل على نقطة من $(C_{\lambda f})$ ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد λ



مثال01:

- اللون الأسود بيان الدالة مربع
- اللون الأسود هو بيان الدالة $h(x)=2x^2$
- اللون الأزرق هو بيان الدالة $h(x)=-x^2$

مثال02: لتكن f ، g ، h ، k و l دوال معرفة كمايلي:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad / x \in [0;+\infty[$$
$$g(x)=3+\sqrt{x} \quad / x \in [0;+\infty[$$
$$h(x)=\sqrt{x+4} \quad / x \in [-4;+\infty[$$
$$k(x)=-\sqrt{x} \quad / x \in [0;+\infty[$$
$$l(x)=4\sqrt{x} \quad / x \in [0;+\infty[$$

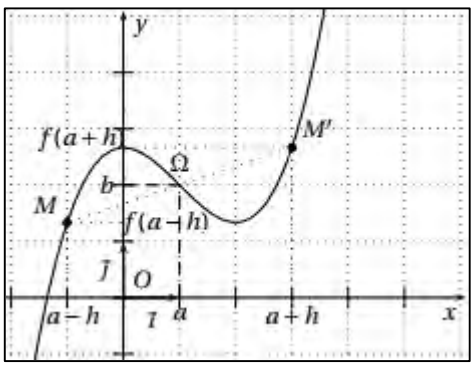
أرسم تمثيلاتهما البيانية ثم حدد التحويل الذي يحول بيان f إلى بيان g ثم إلى بيان h

تطبيق: التمرين51 الصفحة 30

3. عناصر التناظرلتمثيل بياني للدالة: في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نسمي (C_f) بيان دالة f معرفة على D_f

- **مركز تناظر بيان دالة:** نقول عن $I(\alpha;\beta)$ أنها مركز تناظر للبيان (C_f) إذاو فقط إذا تحقق الشرطان

1. $\alpha+h \in D_f$ و $\alpha-h \in D_f$ مهما تكن قيمة h
2. $f(\alpha+h)+f(\alpha-h)=2\beta$ أو $f(2\alpha-h)+f(h)=2\beta$



بيانيا:

ملاحظة : يمكن تبيان : $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta$

أو $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

بين أن $I(1;2)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

الجواب: لدينا: $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ومنه : نلاحظ: $1+h \in D_f$ و $1-h \in D_f$ مهما تكن قيمة h

نثبت أن: $f(1+h)+f(1-h)=4$????????

$$f(1+h)+f(1-h)=\frac{2(1+h)}{1+h-1}+\frac{2(1-h)}{1-h-1}$$
$$=\frac{2h+2}{h}+\frac{2-2h}{-h} \quad \text{نوحد المقام} \quad \text{نحسب الطرف الأول :}$$
$$=\frac{2h+\cancel{2}-\cancel{2}+2h}{h}=\boxed{4}$$

● **محور تناظر بيان دالة:** نقول عن $(\Delta): x=\alpha$ أنه محور تناظر للبيان (C_f) إذاو فقط إذا تحقق الشرطان

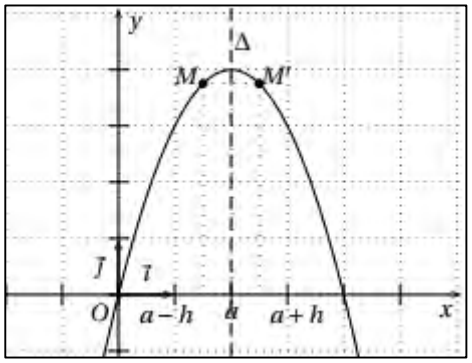
1. $\alpha+h\in D_f$ و $\alpha-h\in D_f$ مهما تكن قيمة h
2. $f(\alpha+h)=f(\alpha-h)$ أو $f(2\alpha-h)=f(h)$

ملاحظة : يمكن تبيان :

$f(\alpha+x)=f(\alpha-x)$

أو $f(2\alpha-x)=f(x)$

بيانيا:



مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2-4x+3$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

بين أن $(\Delta): x=2$ محور تناظر للبيان (C_f)

الجواب: لدينا: $D_f=\mathbb{R}$ ومنه : نلاحظ: $2+h\in D_f$ و $2-h\in D_f$ مهما تكن قيمة h

نثبت أن: $f(4-h)=f(h)$????????

نحسب الطرف الأول:

$$\begin{aligned} f(4-h) &= (4-h)^2-4(4-h)+3 \\ &= 16-8h+h^2-16+4h+3 \\ &= h^2-4h+3=f(h) \end{aligned}$$

تطبيق01: **1.** نعتبر الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{-4}{x+1}$

- عين مجموعة تعريفها D_g
- أدرس اتجاه تغيرها وضع جدول تغيراتها على D_g

2. لتكن f دالة معرفة على $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$

(C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

- عين ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c بحيث لكل $x\in D_f$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$
- باستعمال الجزء **(1)** أدرس اتجاه تغير الدالة f
- عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
- بين أن $I(-1;0)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

تطبيق02: لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x}$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

- عين مجموعة تعريفها D_f
- أكتب على الشكل النموذجي للعبارة x^2+4x ثم أعطي عبارة أخرى لـ: $f(x)$
- بين أن $(\Delta): x=-2$ محور تناظر للبيان (C_f)

1. التمثيل البياني للدالة $g : x \to g(x) = f(x-b)+k$:

f دالة مرجعية و (C_f) بيانها و g دالة مرجعية و (C_g) بيانها وحيث $g(x) = f(x-b)+k$

لتكن $M(x;y)$ نقطة من (C_f)

ولتكن $M'(x';y')$ نقطة من (C_g) ومنه: $y' = g(x') = \overbrace{f(x'-b)}^{x} + k$ أي: $\begin{cases} x = x'-b \\ y' = y+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-b \\ y = y'-k \end{cases}$

ومنه: $M(x'-b;y'-k)$

$\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j}$

لنحسب مركبات الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ ومنه: $\overrightarrow{MM'} = (x'-(x'-b))\vec{i} + (y'-(y'-k))\vec{j}$

$\boxed{\overrightarrow{MM'} = b\vec{i} + k\vec{j} = \vec{U}}$

معناه أن: (C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix} b \\ k \end{pmatrix}$

لاحظ أن b **يعدم** $(x-b)$

أمثلة:

1. $f(x) = (x-2)^2 + 3$ ومنه: (C_f) هو صورة بيان الدالة مربع بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

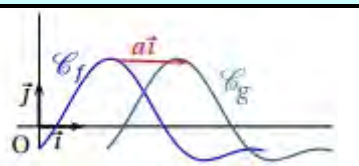
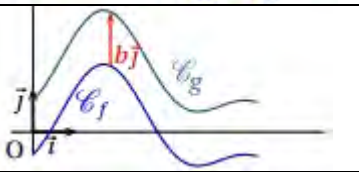
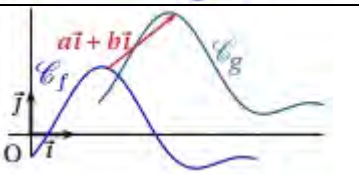
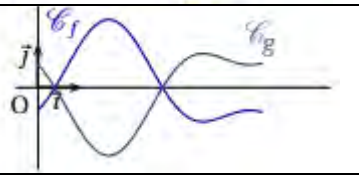
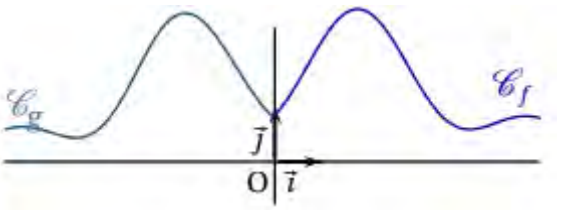
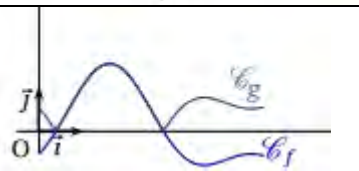
2. $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - 4$ ومنه: (C_f) هو صورة بيان الدالة مقلوب بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومنه: (C_f) هو صورة بيان الدالة جذر تربيعي بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

تطبيق: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. بين أن $x \in D_f$: $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) هو صورة بيان الدالة $(C_g): g(x) = -\dfrac{1}{x}$ بواسطة انسحاب يطلب شعاعه

جدول تلخيصي للتمثيلات البيانية المختلفة:

التحويل	(C_f) هو صورة (C_g)	عبارة $f(x)$
انسحاب شعاعه $a\vec{i}$		$g(x)=f(x-b)$
انسحاب شعاعه $b\vec{j}$		$g(x)=f(x)+b$
انسحاب شعاعه $a\vec{i}+b\vec{j}$		$g(x)=f(x-a)+b$
تناظر محوري محوره حامل محور الفواصل		$g(x)=-f(x)$
تناظر محوري محوره حامل محور التراتيب		$g(x)=f(-x)$
نطابق على الجزء الموجب و نرسم نظير الجزء السالب بالتناظر مع حامل محور الفواصل		$g(x)=\|f(x)\|$

تطبيق: التمرين50 الصفحة 30

2. تغيير المعلم:

$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ معلم للمستوي و $\Omega\,(a;b)$ بالنسبة إلى $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ نسمي $\left(\Omega;\vec{i};\vec{j}\right)$ معلم جديد

لتكن $M\,(x\,;y\,)$ بالنسبة إلى $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و $M\,(X\,;Y\,)$ بالنسبة إلى $\left(\Omega;\vec{i};\vec{j}\right)$

لدينا: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ إذا دساتير التغيير : $\begin{cases}x=X+a\\y=Y+b\end{cases}$

ملاحظة : يستعمل هذا الدستور لإثبات أن : **نقطة ما تختلف عن مبدأ المعلم أنها مركز تناظر للبيان**

أو: **محور ما يختلف عن حامل محور التراتيب هو محور تناظر للبيان**

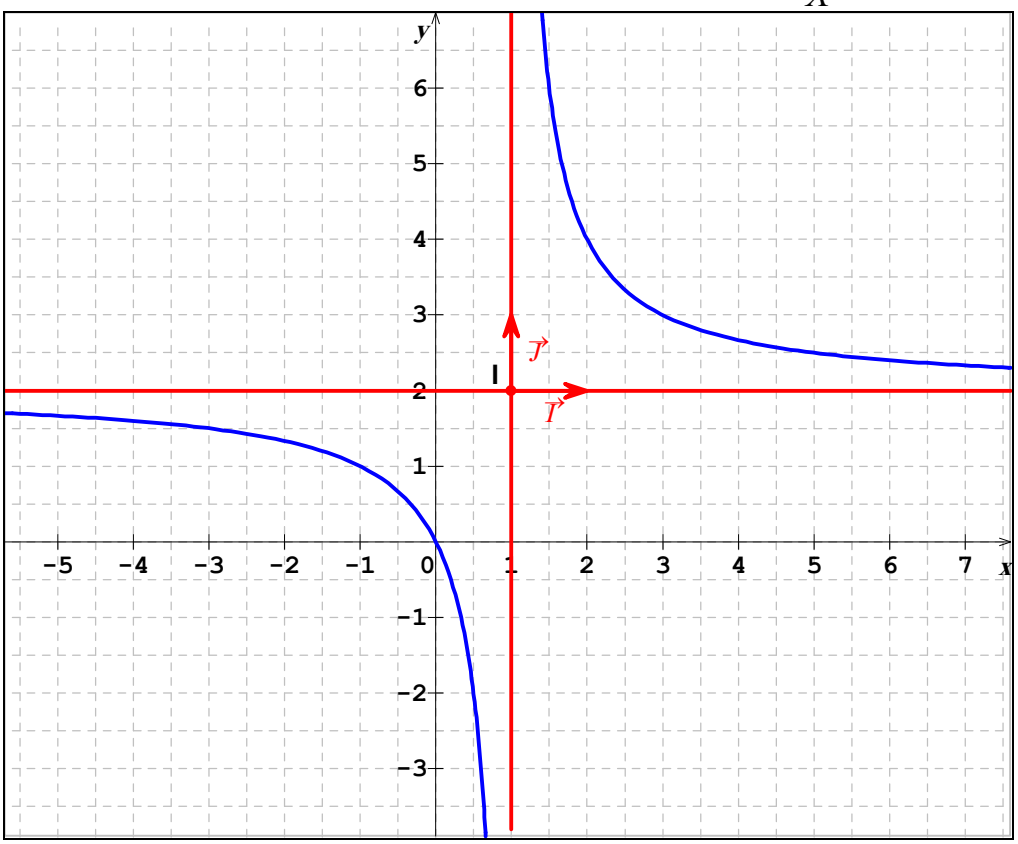
مثال: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f\,(x\,)=\dfrac{2x}{x\,-1}$ بيانها في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ $\left(\boldsymbol{C}_f\right)$

بين أن $\boldsymbol{I}\,(1;2)$ مركز تناظر للبيان $\left(\boldsymbol{C}_f\right)$

نغير المعلم من $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ إلى $\left(I;\vec{i};\vec{j}\right)$ إذا دساتير التغيير : $\begin{cases}x=X+1\\y=Y+2\end{cases}$ نعوض في عبارة $y=\dfrac{2x}{x\,-1}$

$$Y+2=\frac{2(X+1)}{X+1-1}\quad\text{ومنه}\quad Y=\frac{2X+2}{X}-2\quad\text{ومنه:}\quad Y=\frac{2}{X}=h(X)$$

ونلاحظ أن : $h(-X)=\dfrac{2}{-X}=-h(X)$ دالة فردية معناه أن $\boldsymbol{I}\,(1;2)$ مركز تناظر للبيان $\left(\boldsymbol{C}_f\right)$



تطبيقات على الدوال – عموميات –

التمرين01: عين مجموعة تعريف الدوال التالية : $1)f(x)=\dfrac{3-x}{2x+3}$ ، $2)f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4x}$ ، $3)f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$4)f(x)=\sqrt{2-x}$ ، $5)f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ ، $6)f(x)=\sqrt{x^2+x}$ ، $7)f(x)=\sqrt{9+x^2}$

التمرين02: **القراءة البيانية:** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=2x^3-6x^2-7x+21$

1. باستعمال الآلة الحاسبة البيانية مثل بيان هذه الدالة في نافذة: $x\in[-2,5\ ;\ 4]$ و $y\in[-15\ ;\ 30]$
2. باستعمال هذا البيان أجب على الأسئلة التالية :
   - شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$
   - عين عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ " تعطى النتائج كقيم تقريبية إلى 10^{-2}
   - شكل جدول إشارة f حسب قيم x
   - حل بيانيا المتراجحة $f(x)\geq 10$ موضحا الطريقة
   - حل بيانيا المتراجحة $f(x)\leq -x+11$ موضحا الطريقة
   - بين أن $f(3)=0$ ثم عين ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c بحيث: $f(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$
   - استنتج القيم المضبوطة لحلول المعادلة $f(x)=0$

التمرين03: شكل جدول تغيرات الدوال التالية على مجموعة تعريفها

$1)f(x)=2(x-4)^2+3$ ، $2)f(x)=-3(x+1)-5$ ، $3)f(x)=x(x-8)$

$4)f(x)=2+\dfrac{5}{x+2}$ ، $5)f(x)=1-\dfrac{1}{x-5}$

التمرين04: ① لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=|2x+3|$

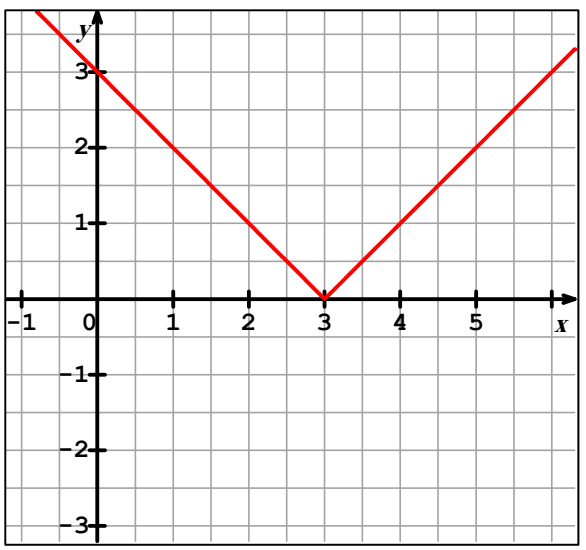
- أكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة
- شكل جدول إشارة f
- أرسم (C_f) بيان الدالة f

② لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=|2-x|$

- أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة
- شكل جدول إشارة g
- أرسم (C_g) بيان الدالة g

③ حل بيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$ ثم تحقق من ذالك حسابيا

التمرين05: أعطي على أبسط شكل عبارة الدالة الممثلة في البيان التالي :



التمرين06: أكتب الدالة f على شكل تركيب دوال مرجعية ثم ضع جدول تغيراتها على المجال I في كل حالة :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $I=]-\infty;0]$ و $J=[0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $I=]-\infty;0]$ و $J=[0;+\infty[$

3) $f(x)=2\sqrt{x}+4$, $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$, $I=]-3;+\infty[$

5) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+3}$, $I=]-\infty;1]$ و $J=[1;+\infty[$

6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2}{3-x}}$, $I=[3;+\infty[$

التمرين07: يعطى جدول تغيرات الدالة u المعرفة على المجال $[-3;3]$ **بدون أن تعطى العبارة الجبرية**

x	-3		0		3
$f(x)$	7	↘	1	↗	5

1. شكل جدول تغيرات الدالتان f و g المعرفة على المجال $[-3;3]$

1) $f(x)=-2u(x)+1$ و 2) $g(x)=\sqrt{u(x)}$

التمرين08: يعطى جدول تغيرات الدالة u **بدون أن تعطى العبارة الجبرية**

x	0		5		9
$f(x)$	9	↘	0	↘	-1

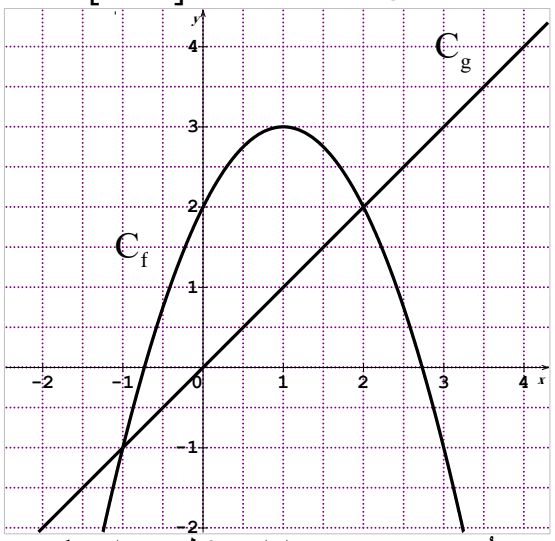
ولتكن الدالتان f و g المعرفتان كمايلي:

1) $f(x)=\sqrt{u(x)}$ و 2) $g(x)=[u(x)]^2$

أجب **بصح** أو **خطأ** على مايلي :

1. f معرفة على المجال $[0;9]$
2. f متناقصة على المجال $[0;5]$
3. $f(x)$ تنتمي إلى المجال $[0;\sqrt{5}]$
4. g معرفة على المجال $[0;9]$
5. g متناقصة على المجال $[0;9]$

10 فـ C_f و C_g هـ $(O;\vec{i};\vec{j})$ مـ $[-2;4]$ هـ g و f هـ



1) ك هـ صـ 1- ، 0 ، 3 ، 4 حـ f ؟ ت0 ددكـ ق مـ f ت
2) ح ا ف ان مـ $[-2;4]$.

أ) كـ هـ $f(x)=g(x)$ و $g(x)=-1$
ب) ان حـ هـ $f(x)\geq g(x)$ و $f(x)\prec 0$.

3) أوشـ خـ ا ذ ل خـ ئ مـ ا ذ ا خـ ا ذ ا و f و g.
4) h ان حـ ف ا ذ ا ان مـ $[-2;4]$ هـ $h(x)=f(x)+g(x)$.
م م ا ذ ا ا ر ا ر ا ك ا ذ ا ا ذ ا ا ذ ا

ا. ثم ضع جدول تغيرات الدالة h على المجال D_h.

3) تحقق أنه من أجل كل x من D_h: $h(x)=1-\frac{1}{x-1}$

4) استنتج اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $[-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$.

5) ما هو أكبر مجال تكون عليه الدالة h حتى تقبل دالة عكسية؟ عرف عندئذ الدالة العكسية h^{-1}.

التمرين 19

$u(x)=-x+4$ و $v(x)=\frac{1}{x}$ دالتان معرفتان على $]-\infty;4[$.

1) أكتب عبارة الدالة f المعرفة على $]-\infty;4[$ بـ: $f=v\circ u$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;4[$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;4[$ بـ: $g(x)=-f(x)+5$.

4) أ) أكتب عبارة الدالة h المعرفة على $]-\infty;4[$ بـ: $h(x)=\frac{5x-19}{x-4}$

ب) أثبت أنه من أجل كل x من $]-\infty;4[$: $h(x)=\frac{1}{x-4}+5$

ج) أدرس اتجاه تغير الدالة h على $]-\infty;4[$.

التمرين 01

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+4x+3$

0. أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x+a)^2+b$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty,-2]$ ثم على $[-2,+\infty[$.

2. أكتب معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=3$.

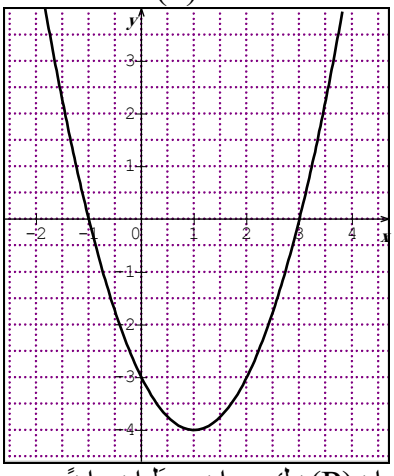
4. أحسب $f(-4)$ ثم عين صورة $\sqrt{2}-2$ بالدالة f.

5. بين أن: $f(-4-x)=f(x)$

6. أرسم (C_f) ثم المماس والمستقيم (D).

التمرين 00

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$



1) أ) عين بقراءة بيانية (P) ثم عين العددين a و b.

ب) أكمل جدول القيم التالي:

x	-1		1	
f(x)		-3		0

2) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=(x-1)^2-4$

ب) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

3) أرسم (P) ثم المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2$.

4) عين بقراءة بيانية حلول المعادلة $f(x)=-2$ ثم حلول المتراجحة $f(x)\geq -2$.

5) أ) بين أن النقطة $\Omega(1;-4)$ مركز تناظر لـ (P).

ب) أكتب معادلة المستقيم (Δ) محور تناظر (P).

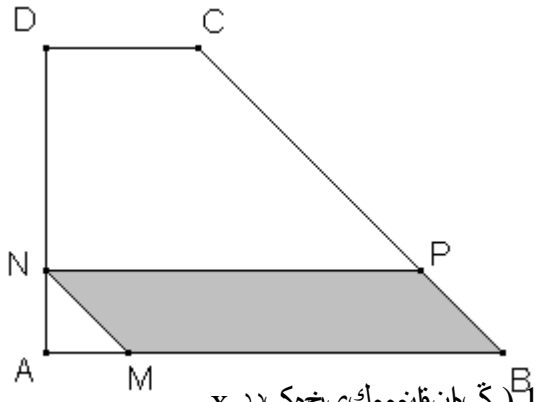
التمرين 02

ABCD شبه منحرف قائم في A بحيث: $AB=6$ ، $DC=2$ ، $AD=4$

M نقطة من $[AB]$ ، N نقطة من $[AD]$ بحيث $(MN)\parallel(DC)$

P نقطة من $[BC]$ بحيث $(MP)\parallel(AD)$

نضع $AM=x$ حيث x عدد حقيقي من المجال $]0;6[$



1) أكتب بدلالة x كلا من AN و MN.

2) بين أن مساحة شبه المنحرف MNPB هي: $f(x)=-x^2+6x$

3) عين موضع النقطة M حتى تكون مساحة شبه المنحرف MNPB تساوي $\frac{3}{4}$ مساحة شبه المنحرف ABCD.

4) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=-(x-3)^2+9$

ب) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]0;6[$.

5) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=3$ محور تناظر لـ (C_f).

ب) بين أن النقطة $\Omega(3;9)$ مركز تناظر لـ (C_f).

6) أ) بين أن الدالة $x\mapsto -x^2$ دالة فردية.

ب) استنتج أن Ω مركز تناظر لـ (C_f).

التمرين 03

f دالة معرفة على المجال $[-4;4]$ جدول تغيراتها كما يلي:

x	-4		0		1		2		4
$f(x)$	3	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	1

0. شكل جدول إشارة f.

2. عين عدد حلول المعادلة $f(x)=1$.

3. شكل جدول إشارة الدالة g في كل حالة:

$g(x)=2f(x)$ ، $g(x)=f(x)-1$ ، $g(x)=-f(x)$

4. h دالة معرفة على $[-4;4]$ بـ: $h(x)=|f(x)|$

شكل جدول إشارة h ثم جدول تغيرات h.

5. k دالة معرفة على $[-4;4]$ بـ: $k(x)=f(|x|)$

بين أن k دالة زوجية ثم شكل جدول إشارتها.

6. L دالة معرفة بـ: $L(x)=f(2x-2)$

أكتب مجموعة تعريف L ثم شكل جدول إشارتها.

الباب الثاني

كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على دالة كثير حدود و على درجتها.
- حل مسائل تستخدم فيها معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية.

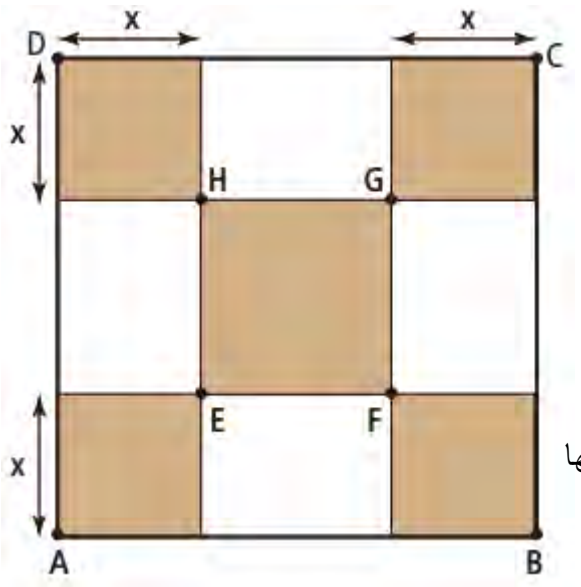
من بداية الأسبوع الثاني من سبتمبر إلى نهاية الأسبوع الرابع من سبتمبر

المدة: 2أسابيع

المدة الزمنية :

10 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي **14 ساعة** و تقني رياضي **12ساعة**

كثيرات الحدود



نشاط01: الشكل المقابل يمثل مربع طول ضلعه 5 نرسم بداخله مربعات طول ضلعها x ونهتم بـ: $S(x)$ مجموع المساحة الملونة للمربعات الخمسة

1. بين ببرهان هندسي أن : $S(x)=4x^2+(5-2x)^2$ و $S(x)=25-4x(5-2x)$
2. بين أن : $S(x)=8x^2-20x+25$
3. باستعمال العبارة المناسبة أحسب: $S(2,5)$ و $S(\sqrt{3})$
4. بين أن : $S(x)=8\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+12,5$
5. استنتج أن المساحة $S(x)$ تكون أدنى ما يمكن لما $x=\frac{5}{4}$ أعطي قيمتها
6. بين أن: $S(x)=(2x-1)(4x-8)+17$
7. عين قيمة x بحيث : $S(x)=17$

الجواب:

1. المساحة $S(x)$ هي مجموع مساحات أربع مربعات تساوي $4x^2$ ومساحة المربع $EFGH$ التي تساوي $(5-2x)^2$

ومنه : $S(x)=4x^2+(5-2x)^2 \rightarrow$ (*)

من جهة ثانية: المساحة $S(x)$ هي المساحة الكلية للمربع $ABCD$ والتي تساوي 25 نحذف منها المساحات البيضاء حيث: المساحة البيضاء الواحدة عرضها x و طولها $5-2x$ ومنه مساحتها تساوي $x(5-2x)$

وعليه : $S(x)=25-4x(5-2x) \rightarrow$ (**)

2. بعد النشر نجد: $S(x)=8x^2-20x+25 \rightarrow$ (***)
3. $S(2,5)=25$ باستخدام العبارة (*) و $S(\sqrt{3})=49-20\sqrt{3}$ باستخدام العبارة (***)
4. بعد النشر نجد: $S(x)=8\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+12,5=8x^2-20x+25$
5. لدينا : لكل $x \neq \frac{5}{4}$: $8\left(x-\frac{5}{4}\right)^2>0$ ومنه: $S(x)>12,5$ ومنه: $S(x)>S(\frac{5}{4})$

وعليه نستنتج أن المساحة $S(x)$ تكون أدنى ما يمكن لما $x=\frac{5}{4}$ و قيمتها هي: 12,5

6. بعد النشر نجد: $S(x)=(2x-1)(4x-8)+17=8x^2-20x+2$
7. $S(x)=17$ تكافئ $(2x-1)(4x-8)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x-8)+17=17$ ومنه: $S=\left\{\frac{1}{2};2\right\}$

ملاحظة: نسمي $S(x)=4x^2+(5-2x)^2$ كثير حدود من الدرجة الثانية

و $S(x)=8\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+12,5$ الشكل النموذجي له

1. الدوال كثيرات الحدود

1. الدالة كثير حدود

تعريف: نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$
حيث n عدد طبيعي و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ثابتة.

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x\mapsto k$ $(k\in\mathbb{R})$ هي دالة كثير حدود و بصفة خاصة الدالة المعدومة: $x\mapsto 0$.
- الدوال: $x\mapsto 0,3x^2+x-\sqrt{2}$ ، $x\mapsto(x+2)(x^2-2)$ ، $x\mapsto x^5$ هي كثيرات حدود.
- الدوال: $x\mapsto\dfrac{1}{x^5+4}$ ، $x\mapsto\sqrt{x^2+2}$ ليس كثيرات حدود

2. درجة كثير حدود

مبرهنة و تعريف: كل دالة كثير حدود غير معدومة f تكتب بطريقة وحيدة على الشكل:
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ مع $a_n\neq 0$
يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود f ، تسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n معاملاته و يسمى a_px^p الحدالذي درجته p.

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x\mapsto a_0$ $(a_0\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 0.
- كل دالة تآلفية: $x\mapsto ax+b$ $(a\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 1.
- كل دالة: $x\mapsto ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية)

ملاحظة: درجة كثير الحدود المعدوم غير معيّنة.

3. تساوي كثيري حدود

مبرهنة:

- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

مثال01: إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3+bx^2+cx+d=2x^3-x+3$
فإن: $a=2$ ، $b=0$ ، $c=-1$ و $d=3$.

مثال02: نعتبر كثير الحدود $P(x)=x^3+5x^2-3x-15$ عين الأعداد a ، b ، c بحيث لكل عدد حقيقي x لدينا :
$P(x)=(x+5)(ax^2+bx+c)$ ثم استنتج جذور $P(x)$

الجواب: بعد نشر الطرف الثاني
$$x^3+5x^2-3x-15=(x+5)(ax^2+bx+c)$$
$$=ax^3+(5a+b)x^2+(5b+c)x+5c$$

بالمقارنة: $\begin{cases}a=1\\5a+b=5\\5b+c=-3\\5c=-15\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\end{cases}}$ ومنه: $P(x)=(x+5)(x^2-3)=(x+5)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

جذور $P(x)$ هي الأعداد التي تعدمها ومنه $P(x)=0\Leftrightarrow\boxed{S=\{-5;-\sqrt{3};\sqrt{3}\}}$

2. عمليات على كثيرات الحدود: عمليات على كثيرات الحدود تسمح قواعد الحساب الجبري من التوصل إلى النتائج التالية:

نتائج: مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود. مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n+p)$.

ملاحظة: بصفة عامة حاصل قسمة كثير حدود f على كثير حدود g ليس كثير حدود و تسمى الدالة: $h: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ دالة ناطقة.

جذر كثير حدود:

تعريف: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي. العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha)=0$.

مثال: ليكن f كثير الحدود المعرف بـ: $f(x)=x^3-x^2-x-2$

لدينا: $f(2)=0$ ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود f بينما العدد 0 ليس جذرا له لأن $f(0)\neq 0$ $(f(0)=-2)$

تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x-\alpha)$

مبرهنة: ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي. إذا كان $f(\alpha)=0$ (α جذر لكثير الحدود f) فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x-\alpha)g(x)$

مثال01: ليكن f كثير الحدود المعرف بـ: $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

لدينا $f(1)=0$ و $f(2)=0$ و $f(3)=0$ و منه الأعداد 1، 2 و 3 هي جذور لكثير الحدود f.

يمكن إذن تحليل f و لدينا: $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

مثال02: f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

1. تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود f
2. عين كثير حدود g بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x-2)g(x)$

الجواب: لدينا: $f(2)=0$ و منه العدد 2 جذر لكثير الحدود f.

إذن حسب المبرهنة يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x-2)g(x)$

الطريقة العملية لتعيين: $g(x)$

x^3-x^2-4x+4	$x-2$
$-x^3+2x^2$	x^2+x-2
x^2-4x+4	
$-x^2+2x$	
$-2x+4$	
$2x-4$	
$0+0$	

نجد هكذا: $g(x)=x^2+x-2$

و منه: $f(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

طريقة أورنر HORNER:

	1	-1	-4	4
2	0	2	2	-4
0	1	1	-2	0
	x^2	x	1	

ومنه: $f(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

المعادلات من الدرجة الثانية

1. **المعادلات من الدرجة الثانية: تعريف:** هي كل معادلة من الشكل $ax^2+bx+c=0 \;/\; a\neq 0$

2. **الشكل النموذجي للعبارة $ax^2+bx+c=0$:** من أجل كلّ عدد حقيقي x و a عدد حقيقي غير معدوم،

لدينا: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ لكن $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

ومنه $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$

نضع $\Delta=b^2-4ac$، عندئذ $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

3. **تعريف:** العدد $\Delta=b^2-4ac$ هو مُميّز العبارة $ax^2+bx+c=0 \;/\; a\neq 0$ ونرمز إليه بالرمز Δ (نقرأ " دلتا").

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ هو الشّكل النموذجي للعبارة $ax^2+bx+c=0 \;/\; a\neq 0$

تطبق: أعطي الشكل النموذجي لمايلي: **1.** $3x^2-6x+4$ **2.** $-2x^2+x-4$ **3.** x^2+6x+9

مبرهنة: لتكن المعادلة $f(x)=ax^2+bx+c=0$ مع $(a\neq 0)$، Δ مميّزها:

- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين x_1، x_2: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و ينتج $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ المعادلة تقبل حلاً مضاعفا x_0: $x_0=\frac{-b}{2a}$ و ينتج $f(x)=a(x-x_0)^2$
- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا و العبارة ax^2+bx+c لا تقبل التحليّل.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1. $2x^2+5x-1=0$ **2.** $3x^2-2x-4=0$

3. $2x^2+(10\sqrt{2})x+25=0$ **4.** $(2x+4)^2+(x^2+5x+6)^2=0$

5. $2(x-2)^2+5(x-2)-1=0$ **6.** $x^2+10^{50}x+25\times 10^{98}=0$

4. **المتراجحات من الدرجة الثانية:**

تعريف: نسمي متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين: $ax^2+bx+c\geq 0;\leq 0$، $ax^2+bx+c>0;<0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

مثال: $2x^2+5x-1<0$ ، $3x^2-2x-4\geq 0$ .....

5. **إشارة ثلاثي الحدود ax^2+bx+c $(a\neq 0)$:**

$\Delta<0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولامن أجل كل عدد حقيقي x، إشارة ax^2+bx+c هي من نفس إشارة a

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	مع إشارة a	

$\Delta=0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعفا x_1

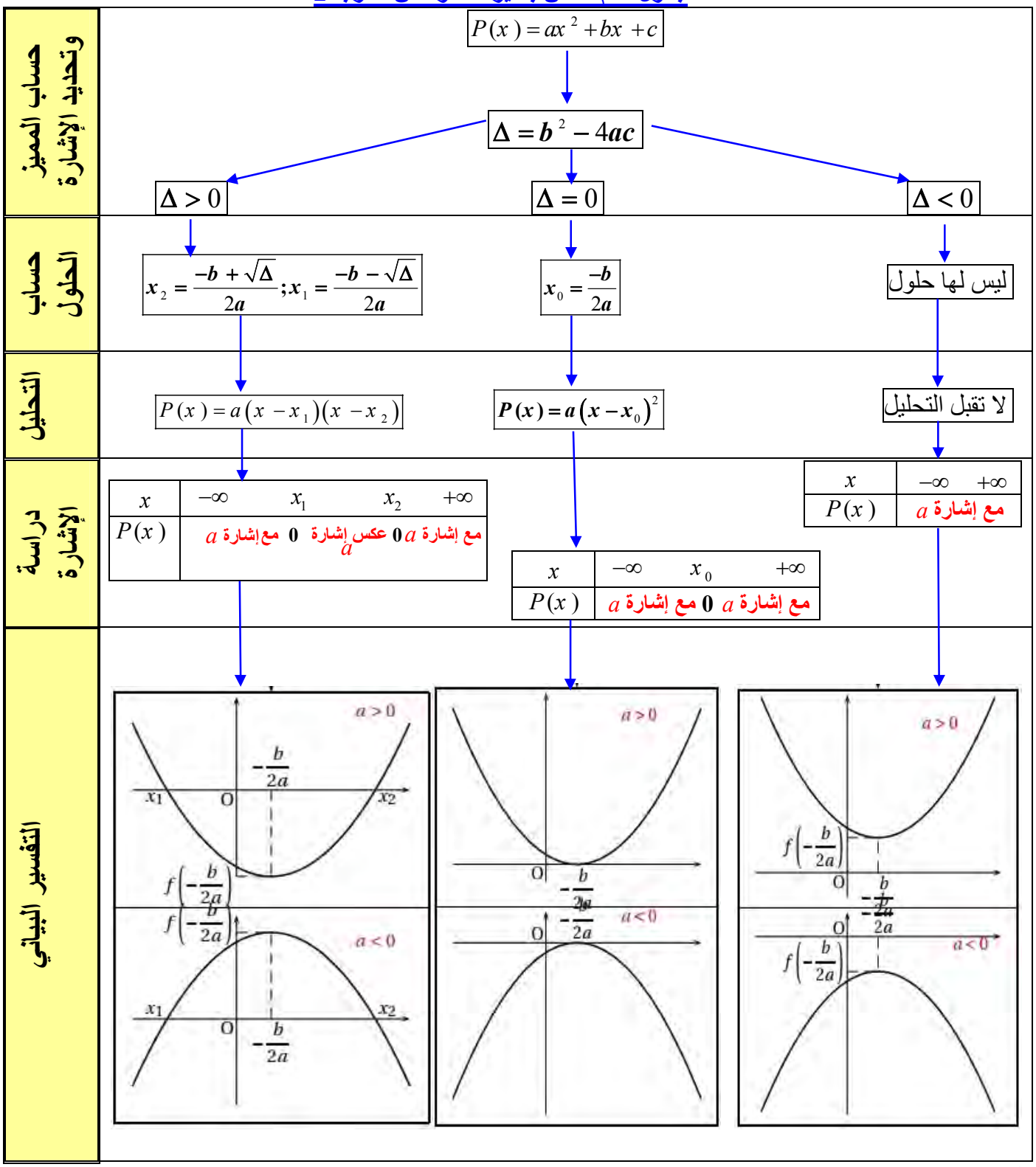
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	مع إشارة a	0	مع إشارة a

$\Delta>0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	مع إشارة a	0	عكس إشارة a	مع إشارة a

جدول عام خاص بكثير الحدود من الدرجة2



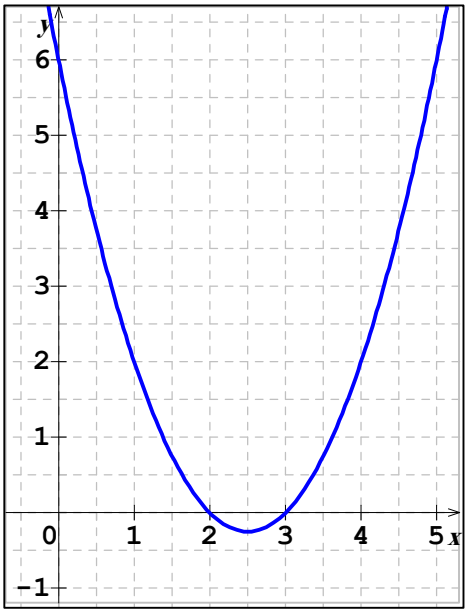
تطبيقات:

التمرين01: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: $-2x^2+7x-5\leq 0$ ، $x^2+x-2\leq 0$ ، $x^2-5x+6\leq 0$

التمرين02: لتكن $P(x)=2x^2+7x+5$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
- حلل إلى جداء $P(x)$
- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)<0$

التمرين03: حل بيانيا المتراجحة $x^2-5x+6\geq 0$
حيث بيانها مثلناه في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما يلي :



● **قاعدة الجداء المعدوم:** يكون الجداء معدوم إذا كان و فقط إذا كان أحدهما معدوم

$\boxed{A(x)\times B(x)=0}\Leftrightarrow \boxed{A(x)=0}$ أو $\boxed{B(x)=0}$

نتيجة: $\boxed{A(x)=0}\Leftrightarrow \boxed{(A(x))^n=0}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $3-7x-(1-x)=2(x+1)$ **2.** $(2x+3)^2=(x-5)^2$ **3.** $(2x+3)^5=0$

● **متراجحة جداء:** $\boxed{A(x)\times B(x)>0}\Leftrightarrow$ $A(x)$ و $B(x)$ من الإشارة

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $(3x^2-6)(4-x)=0$ **2.** $(5-x)(2x-1)-(5-x)^2\leq 0$

● **المعادلات الناطقة:** $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=0\\B(x)\neq 0\end{cases}$ نسمي الشرط $\boxed{B(x)\neq 0}$ بحيز الصحة

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $\dfrac{(x^2-1)^2}{x+1}=0$ **2.** $\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x+5}$

● **متراجحة حاصل قسمة:** $\dfrac{A(x)}{B(x)}<0\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)\times B(x)<0\\B(x)\neq 0\end{cases}$ نسمي الشرط $\boxed{B(x)\neq 0}$ بحيز الصحة

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $\dfrac{x-3}{x+2}<0$ **2.** $\dfrac{5-3x}{x}+\dfrac{3x}{x+1}\geq 0$ **3.** $\dfrac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10}\geq 0$

● **المعادلات الصماء:** $\sqrt{A(x)}=B(x)\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=(B(x))^2\\B(x)\geq 0\end{cases}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية **1.** $\sqrt{x+1}=2x-3$ **2.** $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=0$

● **المتراجحات الصماء:**

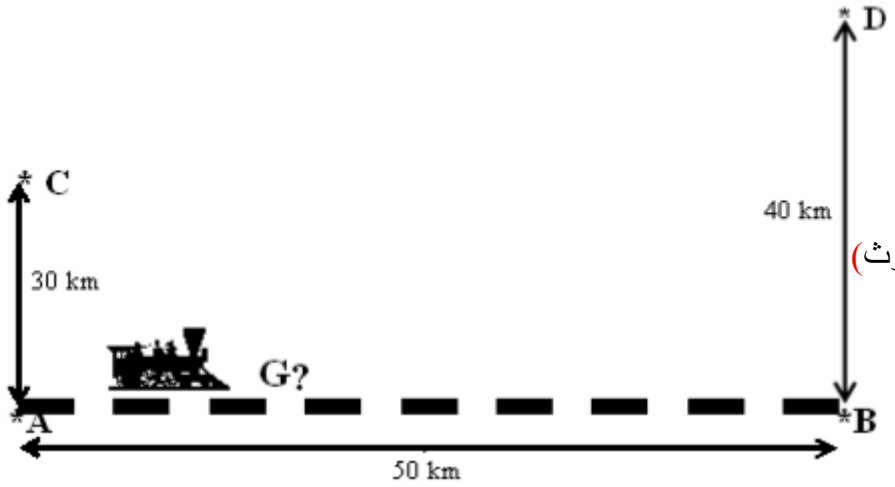
مثال: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية **1.** $x-\sqrt{2x+3}<0$ **2.** $\sqrt{4x^2-1}-5x<0$

تطبيقات و مسائل

التمرين01: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-3x^2+2x+1$ (C_f) بيانها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. ما طبيعة البيان (C_f) و عين إحداثيات ذروته"رأسه"
2. بين أن البيان (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في نقطتين A و B يطلب إحداثياتهما
3. ماهي مجموعة قيم (C_f) التي من أجلها البيان يقع فوق حامل محور الفواصل

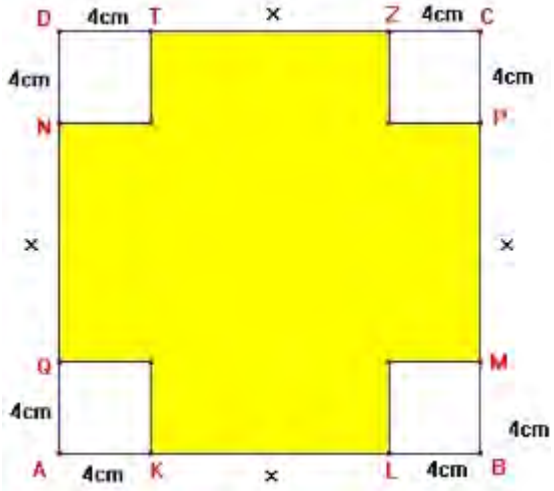
التمرين02:



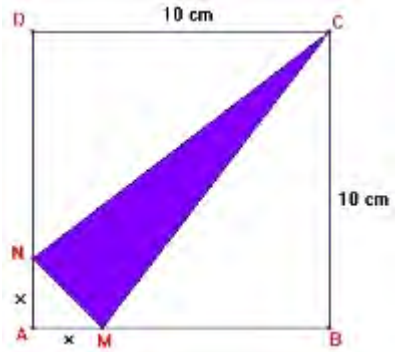
نريد إنشاء محطة قطار في نقطة G
تقع على الطريق المستقيم $[AB]$
وتبعد بنفس المسافة عن مدينتين C و D
عين وضعية النقطة G على $[AB]$
مساعدة:(نضع $AG=x$ و نستعمل مبرهنة فيتاغورث)

التمرين03:

1. **أ)** بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2+16x-1380=(x-30)(x+46)$
   ب) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $x^2+16x-1380>0$
2. نريد صنع علبة بدون غطاء من ورقة كرتون مربعة الشكل
   بحيث قطعنا من كل زاوية مربع طول ضلعه $4\,cm$
   كما هو مبين في الشكل عين قيمة x
   إذا علمت أن المساحة الملونة أكبر تماما من $1380\,cm^2$



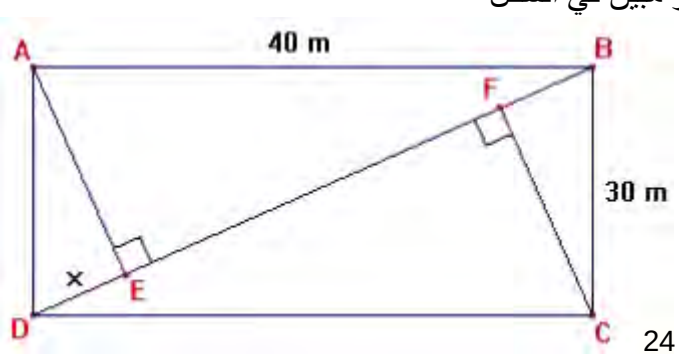
التمرين04: في الشكل المقابل $ABCD$ مربع و M و N نقطتان من $[AB]$ و $[AD]$ يحيث $AM=AN=x$



نسمي $S(x)$ مساحة المثلث MNC

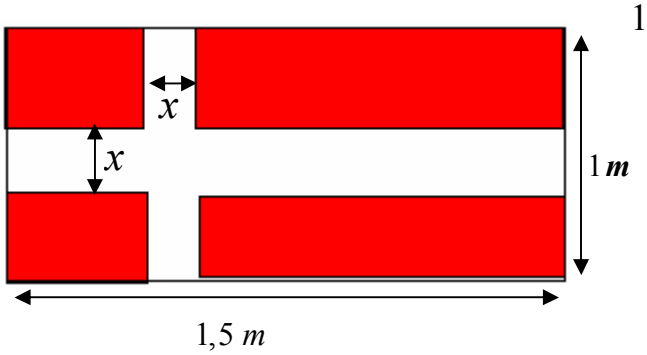
1. عبر عن $S(x)$ بدلالة x
2. **أ)** بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $-x^2+20x-100<0$
   ب) استنتج أن مساحة المثلث MNC هي أقل تماما من نصف مساحة $ABCD$
3. **أ)** تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-20x+36=(x-2)(x-18)$
   ب) استنتج قيم x بحيث $S(x)>18$

التمرين05: قطعة أرض $ABCD$ مستطيلة الشكل موزعة كماهو مبين في الشكل



أحسب EF
مساعدة:(نضع $DE=FB=x$)

التمرين06: علم الدانمارك على شكل مستطيل أبعاده $1\ m$ و $1{,}5\ m$
عين قيمة x حتى تكون المساحة البيضاء تساوي المساحة الحمراء



التمرين07: المسافة بين مدينتين A و B تساوي $42km$ تنطلق دراجة هوائية من A نحو B بسرعة ثابتة $18km/h$
و في نفس الوقت ينطلق شخص ماشيا في الاتجاه المعاكس من B نحو A بسرعة ثابتة $6km/h$
ماهو الزمن اللازم حتى يلتقيان

التمرين08: m عدد حقيقي نعتبر الدوال f_m المعرفة كمايلي : $f_m(x)=mx+5m+3$

و دالة h معرفة بـ: $h(x)=\dfrac{-x-2}{x+3}$ و نسمي : (D_m) و (C_h) التمثيلات البيانية لهما على الترتيب

1. عين حسب قيم العدد الحقيقي m عدد نقط تقاطع (D_m) و (C_h)
2. برهن أن جميع المستقيمات (D_m) تتقاطع في نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثيتيها
3. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\ cm$

أرسم (C_h)، (D_{-4})، (D_{-1}) و (D_0) في نفس المعلم

التمرين09: **الجزء ①:** 1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $4t^2-9t+2=0$
2. استنتج حلول المعادلة : $4(x-2)^2-9|x-2|+2=0$

الجزء②: عين أبعاد مستطيل علما بأن محيطه يساوي $7\ cm$ و مساحته تساوي $3\ cm^2$

التمرين10: 1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $x^2+5x+6=0$
2. نعتبر كثير الحدود P المعرف بـ: $P(x)=x^3+4x^2+x-6$
أ) تحقق من أن 1 هو جذر لكثير الحدود P
ب) حلل $P(x)$
جـ) حل في $\mathbb{R}$: $P(x)=0$ ثم $P(x)<0$
3. أ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x^2+11x+6\le 0$
ب) تحقق من أن: لكل عدد حقيقي x : $P(x+1)-P(x)=3x^2+11x+6$
جـ) استنتج أن لكل $x\in\left[-3;-\dfrac{2}{3}\right]$ لدينا : $P(x+1)\le P(x)$

التمرين11: 1. نعتبر كثير الحدود P المعرف بـ: $P(x)=x^4-5x^3+20x-16$
أ) تحقق من أن العددين 1 و 2 هما جذرين لكثير الحدود P
ب) حلل $P(x)$
جـ) حل في $\mathbb{R}$: $P(x)=0$
2. لتكن f و g دالتان ناطقتان معرفتان كمايلي:

$$f(x)=\frac{x^5-4x^4-5x^3+20x^2+4x-15}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{1}{x+1}$$

أ) عين مجموعة تعريف للدالتين f و g
ب) تحقق أن: $f(x)=P(x)+g(x)$
جـ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x)<g(x)$

00 في كل حالة أكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي، حل في $\mathbb{R}$ المعادلة f(x)=0 و حلل $f(x)$ الى جداء عاملين.

.0 $f(x)=3x^2-7x+2$

.2 $f(x)=2x^2-2\sqrt{2}x+1$

.3 $f(x)=-x^2+x-2$

.4 $f(x)=5x^2-10x$

02 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$x^2+5x-6=0$ ، $x^2+x+1=0$ ، $x^2-7x-8=0$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$ ، $(x^2+3x-4)^2=(x^2+8x+4)^2$

$x+4\sqrt{x}-5=0$ ، $2x^2+3|x-2|-5=0$ ، $x|x|+3x-4=0$

03 1)حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$2x^2+x-3\le 0$ ، $-4x^2-x+18\ge 0$ ، $x^2+3x\prec 0$.

$x^3-x^2-x+1<0$ ، $x^2-2x+1>0$

2)حل في $\mathbb{R}$ جملة المتراجحتين ذات المجهول الحقيقي x

$$\begin{cases} x^2-8x+7\ge 0 \dots(1) \\ (x+2)(x-3)\le 0 \dots(2) \end{cases}$$

04 1)انشر العبارة: $(\sqrt{3}+2)^2$

2)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $-2x^2-(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}=0$

3) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$-2x^2-(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}=-2(x-a)(x-b)$

4)حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-2x^2-(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}\ge 0$

05 ليكن كثير الحدود حيث: $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

1-أ)أحسب f(3)، ماذا تستنتج ؟.

ب)عين الأعداد الحقيقية α,β,δ بحيث : من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=(x-3)(\alpha x^2+\beta x+\delta)$.

ج)استنتج حلول المعادلة: $f(x)=0$.

د) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x)<0$.

2)عين كثير الحدود g(x) من الدرجة الثالثة والذي يقبل الجذرين 2 و 3- ويحقق : $g(-1)=g(3)=24$

06 ليكن كثير الحدود حيث $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

1)بيّن أن العدد 2 هو جذرا لكثير الحدود f(x)

2) استنتج تحليل f(x) إلى جداء عاملين.

3)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=-10$ ثم المتراجحة $f(x)<0$

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x\sqrt{x}-8x+17\sqrt{x}-10=0$

نعتبر كثير الحدود حيث: $f(x)=4x^3-16x^2+13x-3$.

1)احسب f(3) ثم استنتج تحليلا لـ f(x) .

2) عين قيم x في كل حالة: $f(x)=0$ ، $f(x)<0$.

07 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^2+x-1=0$.

2)P(x) دالة كثيرة حدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$P(x)=2x^3+5x^2+x-2$:

أ)احسب P(0) و P(-2) و $P(\sqrt{3})$ استنتج جذرا لـ P(x)

ب)بين انه يوجد كثير حدود Q(x) حيث:

$P(x)=(x+2)Q(x)$ ثم استنتج تحليلا لـ P(x)

ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)\le x-2$

08 a و b عددان حقيقيان و f(x) كثير حدود حيث:

$f(x)=x^3+ax+b$

1)عين a و b بحيث يكون 2 جذرا لـ f(x) و $f(0)=-2$

2) نفرض أن: $a=-3$ و $b=-2$

أ)بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يوجد كثير حدود g(x) حيث: $f(x)=(x-2).g(x)$.

ب)حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين : $f(x)=0$ ، $f(x)=-2$

2) نفرض أن: $a=-3$ و $b=-2$

أ)بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يوجد كثير حدود g(x) حيث: $f(x)=(x-2).g(x)$.

ب)حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين : $f(x)=0$ ، $f(x)=-2$

09 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-5x+6=0$

2)P(x) دالة كثيرة حدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$:

أ)احسب P(0)، P(1) و P(10) ثم استنتج جذرا لـ P(x)

ب) استنتج تحليلا لكثير حدود P(x) .

استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد 504

ج) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x)=0$.

استنتج حلول المتراجحة $(x-1)(x^2-5x+6)\ge 0$

3) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{p(x)}{x^2-4}$

أ)أثبت أن: $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+2)}$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x)\le 0$

00 نعتبر المعادلة (E) ذات الوسيط الحقيقي m التالية:

$$(m+1)x^2+2mx+m-2=0 \ldots (E)$$

أوجد قيم m في كل حالة من الحالات التالية:

0. العدد (-2) حلا للمعادلة (E)
2. المعادلة (E) تملك حل وحيد مضاعف
3. المعادلة (E) لا تملك حلول
4. المعادلة (E) تملك حلان متمايزان
5. المعادلة (E) تملك حلان مختلفان في الاشارة
6. المعادلة (E) تملك حلان موجبان

7-المعادلة (E) تملك حلان سالبان

00 لتكن المعادلة $(1) \ldots mx^2+5x+\frac{6}{m}$ و $m\neq 0$

0. تحقق أن (1) تقبل حلين x_1 و x_2 لا يطلب حسابهما
2. بين أن x_1 و x_2 من نفس الإشارة.
3. ناقش حسب قيم m إشارة الحلين x_1 و x_2
4. جد قيمة m علما أن $x_1+x_2=5$ ، استنتج $x_1\times x_2$

02 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلتين التاليتين:

$$x^2-(2m+3)x+m^2-2=0 \ldots (1)$$

$$x^2+3mx+2m^2+1=0 \ldots (2)$$

03 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية

1) $\frac{5x^2-11x+2}{3x^2-7x+2}=0$ ، $\frac{x^2+3x+3}{x+2}=-x$

2) $\frac{x^2-4}{x^2-2x}\geq 0$ ، $\frac{-4x^2+x+5}{1-x^2}\leq 0$ ، $\frac{x+1}{x-1}\leq\frac{x-1}{x+1}$

04 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية

1) $\sqrt{1-x}=x+1$ ، $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-3}=3$

2) $2x-\sqrt{x^2+1}\geq 0$ ، $2\sqrt{1+x^2}-x\leq 0$

05 تعطى المعادلة $2x^2-3x-5=0$.....(1)

دون حساب الحلين x_1 و x_2

1) بين أن المعادلة (1) تقبل حلين x_1 ، x_2 مختلفين في الإشارة

2) احسب $x_1^2+x_2^2$ ، $(x_1-x_2)^2$ ، $x_1^4+x_2^4$ ، $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

06 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$x^4-3x^2-4=0$ ، $x^4+4x^2-12=0$ ، $x^6-9x^3+8=0$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$x^4-1\leq 0$ ، $-x^4-x^2+6\geq 0$ ، $x^4-5x^2+4\leq 0$.

07 ABC مثلث قائم في A حيث:

$AB=x$ ، $AC=y$ ، $BC=10$

عين x ، y حتى يكون محيط المثلث ABC يساوي 24cm

08 x و y عددان طبيعيان حيث: $\begin{cases} x-y=1 \\ x^3-y^3=61 \end{cases}$

1) أنشر العبارة $(x-y)^3$ ، ثم استنتج الجداء xy .

2) جد قيمة x^2+y^2 دون حساب x و y . استنتج قيمتي x و y

09 ليكن $f_m(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x حيث:

$$f_m(x)=(m-2)x^2-(m+1)x+m+2$$

1) احسب $f_0(2)$ ، $f_2(0)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x: $f_2(x)=f_m(0)$.

2) عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة: $f_m(x)=0$

أ) حلين متساويين.

ب) حلين x' و x" يحققان: $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x"}=1$.

20 1) عين عددين a و b يحققان: $\begin{cases} a+b=17 \\ a\times b=60 \end{cases}$

2) هل يوجد مستطيل مساحته $60cm^2$ ومحيطه 34cm

20 $f_m(x)$ كثير حدود

حيث: $f_m(x)=(2m+1)x^2+2x+m+1$

عين قيم m الوسيط الحقيقي في كل حالة

1) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا يطلب تعيينه

2) (-2) حلا للمعادلة $f_m(x)=0$ استنتج الحل الآخر

3) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين أحدهما مقلوب للآخر

4) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين متناظران.

22 ABCD مستطيل طوله 10cm وعرضه 6cm

ننشئ مربعا AMNP بحيث تكون M على [AB]

و p على [AD] نضع : AM=x

1) أحسب a(x) مساحة شبه المنحرف MNCB بدلالة x.

2) عين قيمة x التي من أجلها المساحة a(x) اعظمية

ثم احسب a(x) في هذه الحالة.

3) هل توجد قيم للعدد x تكون من أجلها

مساحتا MNCB و NCDP متساويتين؟

4) هل توجد قيم للعدد x تكون من أجلها a(x) أصغر من مساحة المربع AMNP؟

أعمال موجهة

● مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: $ax^2+bx+c=0$ ..... (1) مع $(a\neq 0)$

نعلم أنه إذا كان $\Delta\geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين x' و x'' حيث: $x'=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x''=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

إذا وضعنا $S=x'+x''$ و $P=x'\times x''$ حيث S هو مجموع الحلين و P جداؤهما بين أن: $\boxed{S=-\dfrac{b}{a}}$ و $\boxed{P=\dfrac{c}{a}}$

تطبيق1: حساب أحد الحلّين بمعرفة الآخر: نعتبر المعادلة التالية: $2x^2+\alpha x-3=0$ حيث α عدد حقيقي.
عين α حتى يكون (-3) حلا لهذه المعادلة ثم استنتج الحل الآخر.

تطبيق2: تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما:

مبرهنة: يكون مجموع عددين هو S و جداؤهما هو P إذا و فقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x: $\boxed{x^2-Sx+P=0}$

تمرين تطبيقي: عين بعدي مستطيل مساحته $77cm^2$ ومحيطه $36cm$. هل يوجد مستطيلا مساحته $30cm^2$ و محيطه $20cm$ ؟

تطبيق3: تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية:

مبرهنة: نعتبر المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ ..... (1) مع $(a\neq 0)$.

1. إذا كان $\dfrac{c}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
2. إذا كان $\dfrac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\dfrac{b}{a}>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
3. إذا كان $\dfrac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\dfrac{b}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

تمرين تطبيقي01: ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:
$$(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$$

● المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع:

1. المعادلات مضاعفة التربيع:

تعريف: نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $\boxed{ax^4+bx^2+c=0}$
حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

حل المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$ يؤول إلى حل الجملة: $\begin{cases}t=x^2\\ at^2+bt+c=0\end{cases}$ يسمى المجهول t مجهولا مساعدا.

بعد حل المعادلة $at^2+bt+c=0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4+bx^2+c=0$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية: **1)** $x^4+x^2-6=0$ **2)** $x^4-5x^2+4=0$ **3)** $2x^4+5x^2+2=0$

2. المتراجحات مضاعفة التربيع:

تعريف: نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:
$\boxed{ax^4+bx^2+c\geq 0;\leq 0}$، $\boxed{ax^4+bx^2+c>0;<0}$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

يؤول حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة ax^4+bx^2+c

دراسة مثال: نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x : $x^4-7x^2+12<0$ .... (*)

1. نضع: $f(x)=x^4-7x^2+12$ تحقق أن 3 و 4 هما حلا المعادلة ذات المجهول t: $t^2-7t+12=0$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=(x^2-3)(x^2-4)$
3. أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$
4. استنتج حلول المتراجحة (*)

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x التالية: $-x^4+4x^2+5\leq 0$

باب الفروض المحروسة و المنزلية

الفرض المحروس رقم ① للثلاثي الأول

التمرين01: نعتبر الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$f(x)=(5x+2)(x+2)+x$ و $g(x)=(3-2x)(2+x)-2$

1. بين أن: $f(x)-g(x)=7x(x+2)$
2. أدرس إشارة $f(x)-g(x)$ وذالك حسب قيم العدد الحقيقي x
3. استنتج الأوضاع النسبية بين البيانين (C_f) و (C_g) للدالتين f و g على الترتيب

التمرين02: أدرس اتجاه تغير الدوال التالية مع تحديد الخواص المستعملة:

1. $f(x)=-2x+3-x^2$ على المجال $[0;+\infty[$
2. $g(x)=\sqrt{x^3}$ على المجال $[0;+\infty[$
3. $h(x)=(uov)(x)$ على المجال $]-\infty;0]$ مع $u(x)=2x+5$ و $v(x)=x^2+3$

التمرين03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-3;3]$ بالتمثيل البياني التالي: $t\in[-3;3]$

بدون تبرير حدد مجموعة تعريف و ارسم التمثيلات البيانية للدوال التالية في نفس المعلم السابق وبألوان مختلفة

- $f_1(t)=-f(t)$
- $f_2(t)=|f(t)|$
- $f_3(t)=f(t)+1$
- $f_4(t)=f(t+1)$

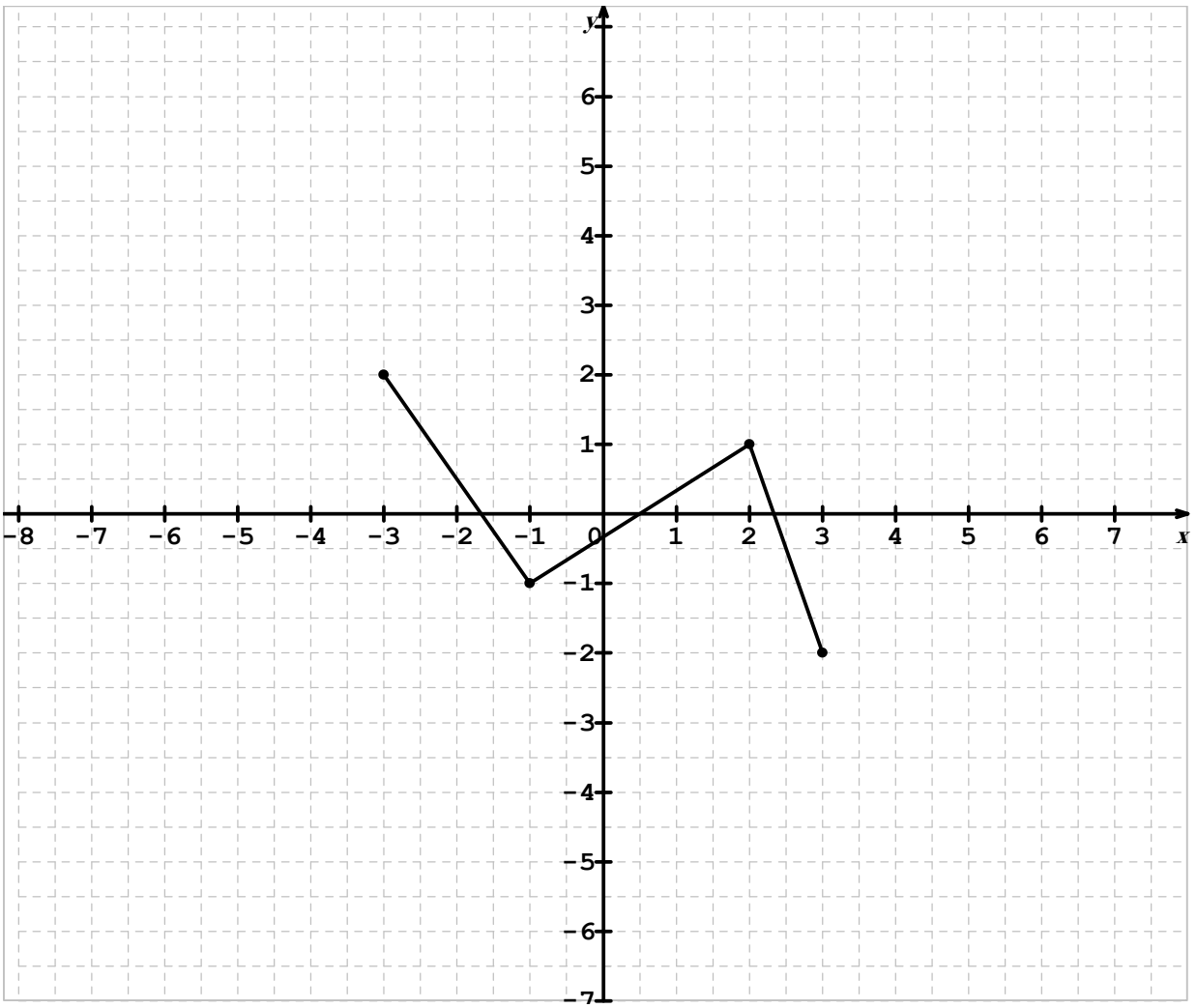
التمرين04: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$f(x)=x^2-4x+\frac{11}{4}$ نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

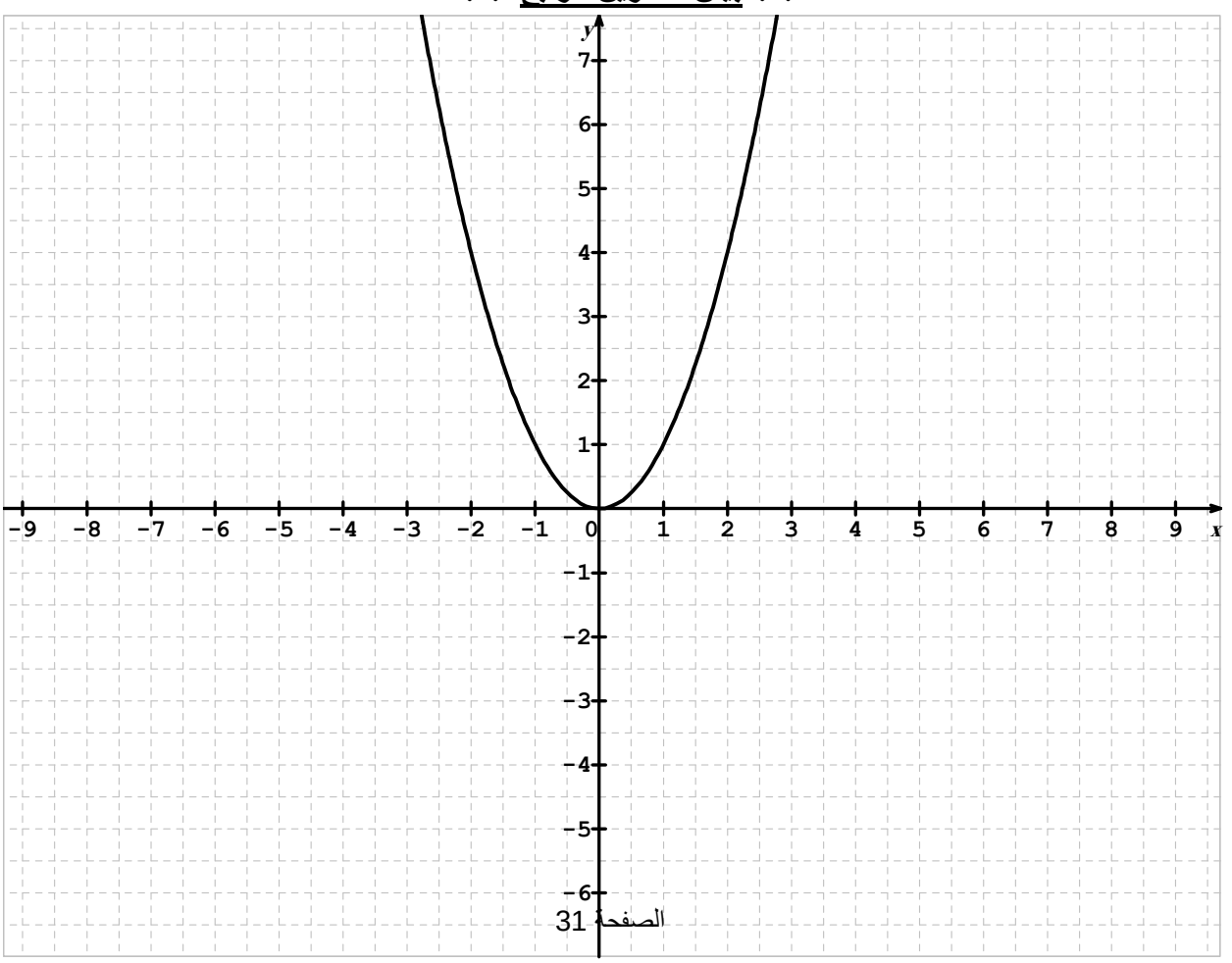
1. بين أن: $f(x)=(x-2)^2-\frac{5}{4}$
2. اشرح كيف نرسم البيان (C_f) باستعمال بيان الدالة مربع ثم ارسمهما في الورقة المرفقة
3. برهن أن (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة (C_f) كمحور تناظر له
4. بين أن العدد $-\frac{5}{4}$ هو قيمة حدية صغرى للدالة f
5. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$

يراعى تنظيم الإجابة و و ضوحها
الألة الحاسبة مسموح بها

بيان التمرين الثالث



بيان التمرين الرابع



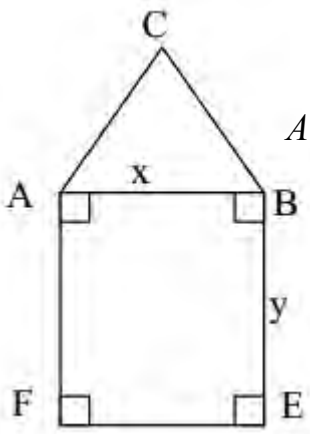
الفرض المحروس رقم ③ للثلاثي الأول

التمرين01: **1.** يعطى جدول إشارة كثير الحدود P المعرف بـ: $P(x)=ax^2+bx+c$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- ماهي إشارة العوامل a، b و c (مع الشرح)
- نضع $a=-2$ عين قيم b و c

2. بواسطة سلك مهمل السمك طوله $6\,cm$ نصنع مثلث متقايس الأضلاع ABC و مستطيل $ABEF$ خارج المثلث ABC **" أنظر الشكل"**



نضع: $AB=x$ و $BE=y$

- **أ)** تحقق أن: $y=3-2x$ ثم بين أن: $0<x<\frac{3}{2}$
- **ب)** عبر عن $A(x)$ مساحة المستطيل $ABEF$ بدلالة x
- **ت)** عين x حتى يكون $A(x)\geq 1$

- **أ)** تحقق من أن: $A(x)=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$
- **ب)** عين x حتى تكون المساحة $A(x)$ أعظمية
- **ت)** عين في هذه الحالة مساحة المثلث ABC

التمرين02: **1.** نعتبر المعادلة : $(E)\rightarrow -4x^2+3x+1=0$

أ) تحقق من أن المعادلة (E) لها حلان متمايزان x' و x'' **لا يطلب حسابهم**

ب) بدون حساب x' و x'' أحسب : $A=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$ ، $B=x'^2+x''^2$ ، $B=x'^3+x''^3$

2. نعتبر المعادلة : $(E_m)\rightarrow (m^2+1)x^2-2mx-2=0$ حيث $m\in\mathbb{R}$

أ) بين لماذا المعادلة (E_m) تقبل حلين متمايزين مهما يكون $m\in\mathbb{R}$

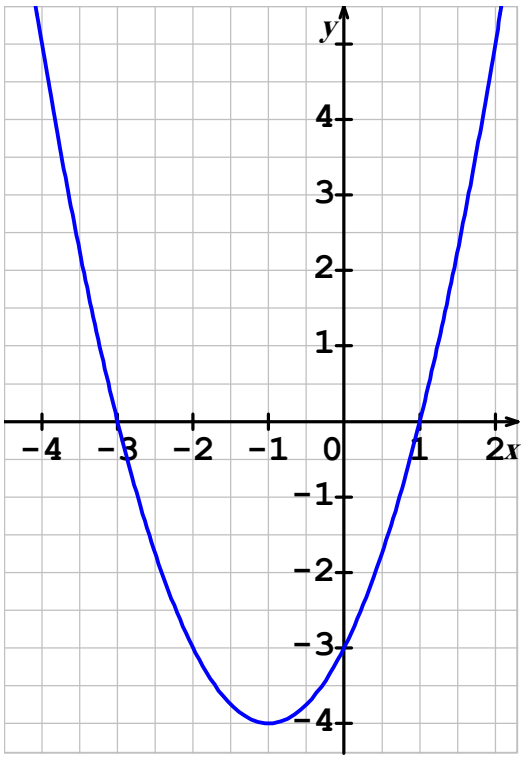
ب) عين m حتى يكون أحد حلول المعادلة (E_m) يساوي (-1) ثم عين الحل الأخر

جـ) نضع الآن $m=2$ و بدون حساب x' و x'' أحسب : $D=\frac{x'+1}{x''-1}+\frac{x''+1}{x'-1}$

يراعى تنظيم الإجابة و وضوحها
الآلة الحاسبة مسموح بها

الفرض المحروس رقم ② للثلاثي الأول

التمرين01: التمثيل البياني المقابل هو لدالة f كثير حدود من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$

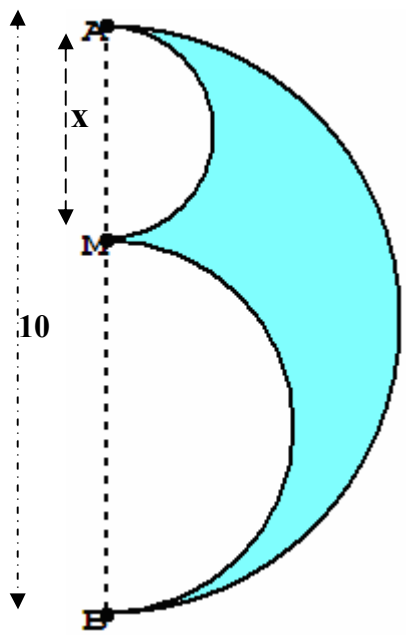


1. **أ)** عين بيانيا $f(1)$ ، $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$
   ب) استنتج أن f ليس لها شفعية
   ت) استنتج المعاملات a ، b و c بحيث $f(x)=ax^2+bx+c$
2. حل بيانيا في $\mathbb{R}$ $f(x)=-3$ و $f(x)<-3$
3. أعطي القيمة الحدية الصغرى للدالة f
4. بين أن المستقيم $(\Delta): x=-1$ محور تناظر للبيان
5. أرسم المستقيم $(D): y=2x+1$ ثم حل بيانيا $f(x)=2x+1$

التمرين02: نريد صنع قطعة حديدية بالشكل التالي:

نقطع نصف قرص قطره $[AB]$ ثم نقطع نصفي قرصين قطريهما على الترتيب $[AM]$ و $[BM]$

بحيث $M \in [AB]$ نضع $AB=10\,cm$ و $AM=x\,cm$ **أنظر الشكل**



1. ماهي مجموعة قيم x
2. بين $A(x)$ مساحة القطعة **(الجزء الملون)** هي:
$$A(x)=\frac{\pi}{4}\left(-x^2+10x\right)$$
3. ماهي قيم x إن وجدت حتى يكون :
   - $A(x)=0$
   - $A(x)=3\pi$
   - $A(x)=7\pi$
4. عين قيمة x التي من أجلها تكون المساحة $A(x)$ أعظمية وعين هذه القيمة

يراعى تنظيم الإجابة و وضوحها

الألة الحاسبة مسموح بها

الباب الثالث

الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

- حساب العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي
- تعيين معادلة مماس منحن في نقطة منه.
- حساب مشتقات الدوال المرجعية
- حساب مشتقات الدوال $f+g$، $f\times g$، $\frac{1}{g}$، $\frac{f}{g}$، $x\mapsto f(ax+b)$

من بداية الأسبوع الثالث من أكتوبر إلى نهاية الأسبوع الثاني من نوفمبر

المدة: 3أسابيع

المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي **21 ساعة** و تقني رياضي **18ساعة**

نشاط01: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3$

- أنشر $(a+b)^3$
- أحسب $f(1+h)$ ثم بين أن $f(1+h)=f(1)+ah+h\times g(h)$
  حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه و g عبارة جبرية بدلالة h
- استنتج قيمة تقريبية لـ: $f(1.002)$ ثم إستنتج أحسن تقريب للعدد $f(1+h)$ لما h تقترب من الصفر بالقدر الكافي
- استنتج $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ثم إلى ماذا تقترب هذه النسبة لما h تقترب من الصفر بالقدر الكافي
- نضع $x=1+h$ عبر عن $f(1+h)$ ثم $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ بدلالة x

الحل:

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
2. $f(1+h)=(1+h)^3=1+3h+3h^2+h^3=1+3h+h(3h+h^2)$

   ومنه $a=3$ و $g(h)=3h+h^2$
3. $f(1,002)=f(1+0.002)$
   $=1+3(0,002)+0.002\left[3(0.002)+(0.002)^2\right]$
   $\simeq 1+0,006=3.006$

   القيمة المؤطرة صغيرة وقريبة من 0

بمأن : $\lim\limits_{h\to 0} hg(h)=0$ فإن أحسن تقريب لـ: $f(1+h)\simeq 1+3h$

و بما أنه دالة تألفيه بدلالة h يسمى تقريب تألفي

4. $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=3+3h+h^2$ و منه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3+3h+h^2\right)=3$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$ ومنه إذن : $f'(1)=3$ يسمى هذا العدد 3 بالعدد المشتق و رمزه

5. لدينا $x=1+h$ ومنه $h=x-1$ إذن $f(1+h)=f(x)=1+3(x-1)+(x-1)(x^2+x-1)$

   ومنه $f(x)\simeq 1+3(x-1)$

أي أن معادلة المماس هي أحسن تقريب تألفي في جوار 1

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ ومنه $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

1. نهاية محدودة عند a :

مثال تمهيدي: لتكن الدالة $f:x\to f(x)=3x^2-5x+1$ أحسب $f(2)$ ثم أكمل الجدول التالي:

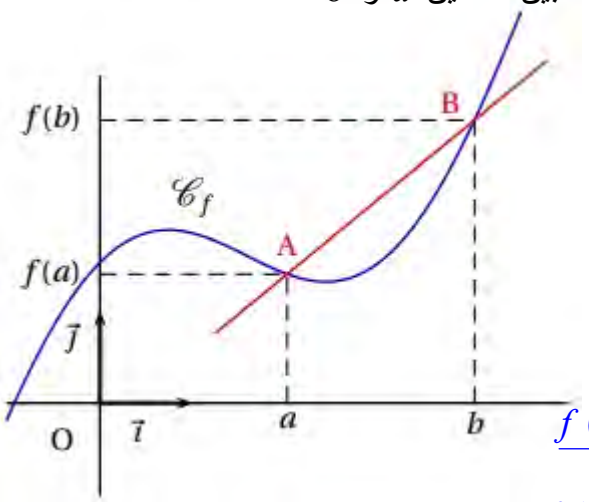
x	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	1,999
$f(x)$						

ماهو تخمينك لما x تقترب من العدد 2 إلى ماذا تقترب $f(x)$

نلاحظ أن كلما اقترب x من العدد 2 فإن $f(x)$ يقترب من $f(2)=3$ وهذا ما نسميه نهاية محدودة لدالة عند قيمة محددة ونكتب : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3=f(2)$

2. نسبة تزايد دالة :

لتكن الدالة f و (C_f) بيانها ولتكن A و B نقطتان متمايزتان من (C_f) ذات الفاصلتين a و b على الترتيب نسبة تزايد (نسبة تغير) دالة بين العددين a و b هو معامل توجيه المستقيم (AB)



لدينا: $A(a;f(a))$ و $B(b;f(b))$

ومنه: نسبة تزايد دالة بين العددين a و b هو:

$$\theta_{a,b}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}=\frac{\Delta_f}{\Delta_x}$$

أي فرق الصورتين على فرق السابقتين

ملاحظات :

1. نسبة تزايد دالة بين a و b هو نفسه بين b و a
2. إذا كانت الدالة متزايدة على المجال $[a;b]$ فإن: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq 0$
3. إذا كانت الدالة متناقصة على المجال $[a;b]$ فإن: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq 0$
4. العكس ليس صحيح

مثال مضاد: لتكن $f:x\to f(x)=x^2$ على المجال $[-1;2]$

لنحسب نسبة تزايد دالة على المجال $[-1;2]$ $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{4-1}{3}=1>0$

ولكن f دالة مربع متناقصة على $[-1;0]$ و متزايدة على $[0;2]$

نضع $b=a+h$ ومنه: $h=b-a$ وتصبح النسبة كما يلي: $\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

3. جوار عدد حقيقي:

نسمي جوار عدد حقيقي a كل مجال مفتوح أو مغلق يشمل a

أمثلة:

1. إليك المجال $[-1;5]$ لاحظ أن العدد 3 ينتمي إلى المجال إذن له جوار و كذالك العدد 5 له جوار اليسار فقط
2. إليك المجموعة $I=[-1;5]\cup\{7\}$ لاحظ أن العدد 7 ينتمي إلى المجموعة I ولكن لايوجد له جوار

4. العدد المشتق:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و a عدد حقيقي

تكون f قابلة للإشتقاق عند عدد a إذا وفقط حققت الشروط الثلاث التالية :

☜ a عنصر من I ☜ a له جوار (غير معزول) ☜

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\in\mathbb{R}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال01: (مضاد) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\frac{3}{x-2}$ هل f قابلة للإشتقاق عند 2

الجواب: f غير قابلة للإشتقاق عند 2 لأنها غير معرفة عند 2

مثال02: (مضاد)

- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2(x^2-1)\geq 0$ ونسمي مجموعة حلولها D
- نعتبر الدالة f المعرفة على D بـ: $f(x)=\sqrt{x^2(x^2-1)}$ هل f قابلة للإشتقاق عند 0

الجواب:

$$D=]-\infty;-1]\cup\{0\}\cup[1;+\infty[$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2	+		+	0	+		+		
x^2-1	+	0	−		−	0	+		
الجداء	+	0	−	0	−	0	+		

لاحظ أنها تعدم

وبالتالي 0 معزول ليس له جوار إذن f **غير قابلة للإشتقاق عند 0**

مثال03: (مضاد) لتكن f الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x} & /\ x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

هل f قابلة للإشتقاق عند 0

الجواب: $D_f=\mathbb{R}$ الشرط الأول والثاني محققان

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)=+\infty\notin\mathbb{R}$$ و **إذن** f **غير قابلة للإشتقاق عند 0**

مثال04: (مضاد) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$ هل f قابلة للإشتقاق عند 0

$D_f=\mathbb{R}$ الشرط الأول الثاني محققان و $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}\right)$

$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left(\frac{-x}{x}\right)=-1=f'_<(0)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{x}{x}\right)=1=f'_>(0)$ ومنه **إذن** f **غير قابلة للإشتقاق عند** 0 **لأن:** $f'_<(0)\neq f'_>(0)$

مثال05: لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$ هل f قابلة للإشتقاق عند 4

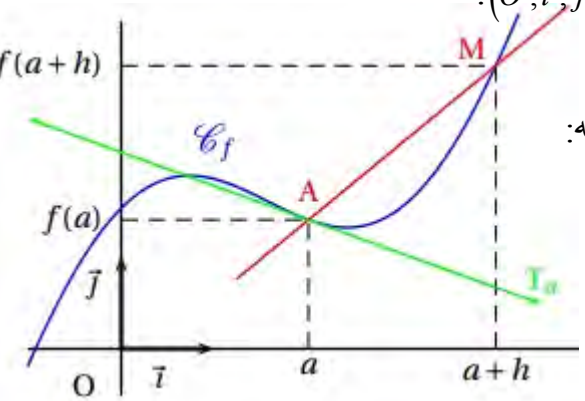
الجواب: $D_f=\mathbb{R}$ الشرط الأول و الثاني محققان

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)=\frac{1}{4}=f'(1)\in\mathbb{R}$$

ومنه: f **قابلة للاشتقاق عند** 4

التفسير البياني للعدد المشتق:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

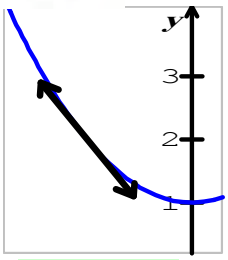


إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا (T_a) لا يوازي حامل محور التراتيب معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته:

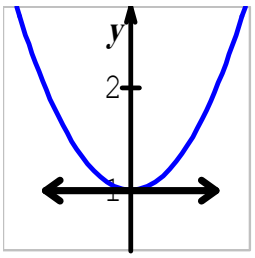
$$(T_a): y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

ملاحظة01: لما يكون المعلم متعامد و متجانس نسميه ميل المماس

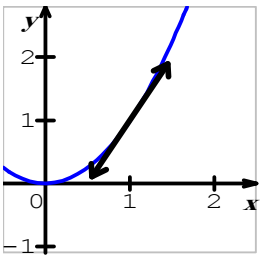
ملاحظة02: لاحظ المماس و إشارة المشتقة



$f'(x_0)<0$



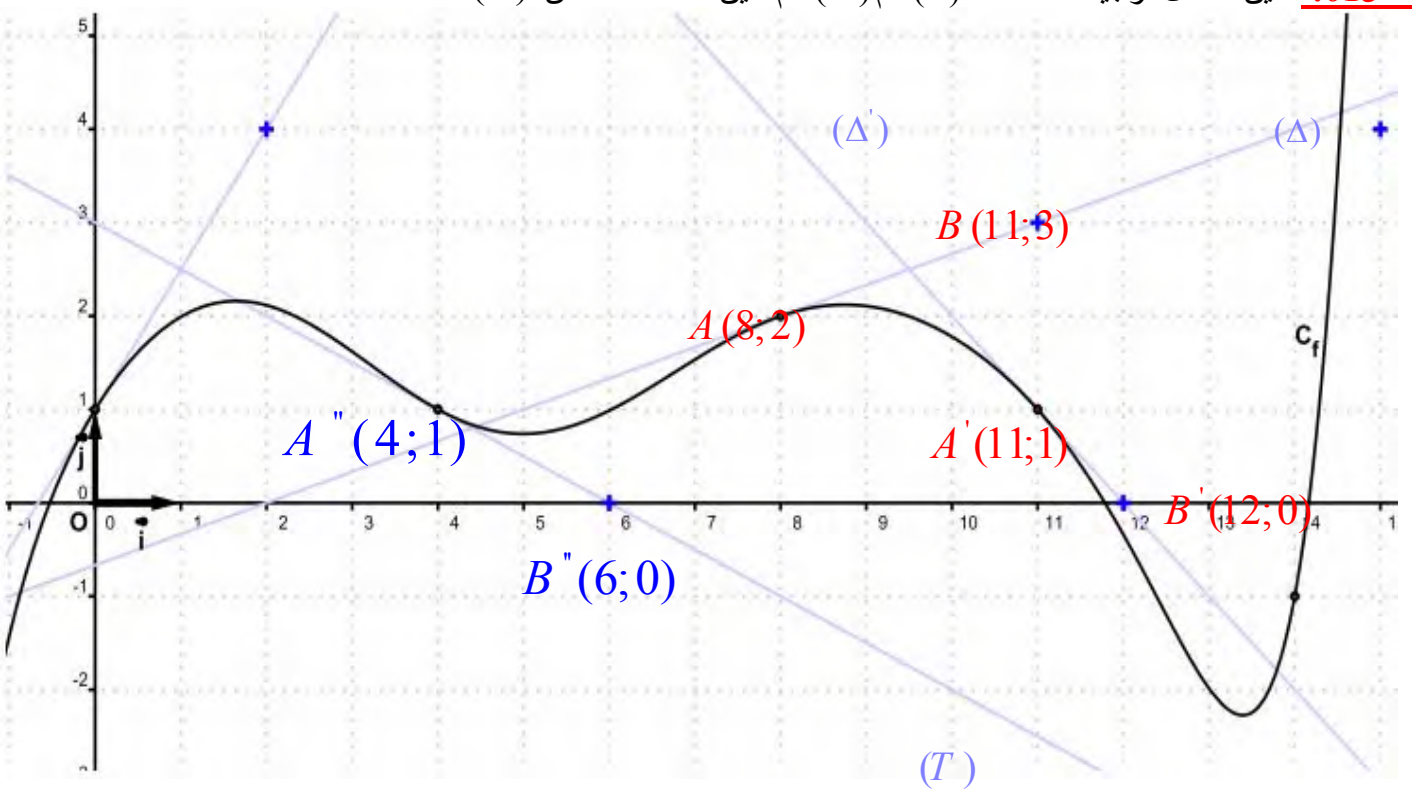
$f'(x_0)=0$



$f'(x_0)>0$

ملاحظة03: لتعيين $f'(x_0)$ بيانيا نعين من المماس إحداثيات نقطتان **ومنه** $f'(x_0)=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$

مثال01: عين معامل توجيه المماسات (Δ) ثم (Δ') ثم عين معادلة المماس (T)



الحل: (Δ) هو مماس عند النقطة $A(8;2)$ و هو يمر كذالك من النقطة $B(11;3)$ إذن : $f'(8)=\dfrac{11-8}{3-2}=3$

(Δ') هو مماس عند النقطة $A'(11;1)$ و هو يمر كذالك من النقطة $B'(12;0)$ إذن : $f'(11)=\dfrac{12-11}{0-1}=-1$

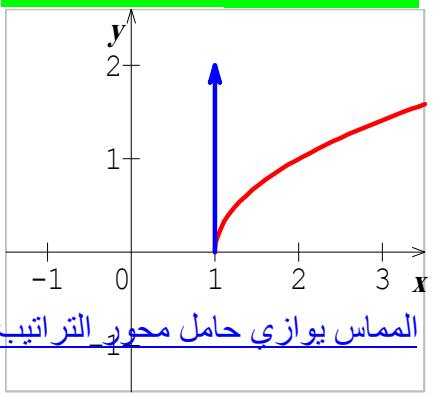
معادلة المماس (T) : هو مماس عند $A''(4;1)$ وهو يمر كذالك من النقطة $B''(6;0)$ إذن : $f'(4)=\dfrac{6-4}{0-1}=-2$

ومنه $y=f'(4)(x-4)+f(4)$
$=-2(x-4)+1=-2x+9$

ويوجد عدة طرق لإيجاد المعادلة

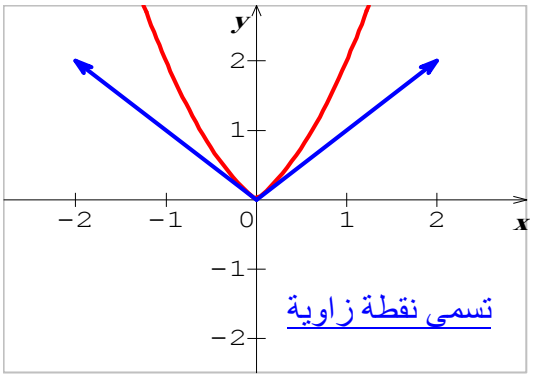
التفسير البياني للعدد المشتق لما تكون الدالة غيرقابلة للإشتقاق:

$f'(x_0) \notin \mathbb{R}$ إرجع إلى المثال03



المماس يوازي حامل محور التراتيب

$f'_<(x_0) \neq f'_>(x_0)$ إرجع إلى المثال04



تسمى نقطة زاوية

الدالة المشتقة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I

و تسمى الدالة $f': x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

مثال: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + 2$. أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعيّن دالتها المشتقة f'.

الجواب: لدينا $f(x) = -x^2 + 2$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

ليكن a عدد حقيقي . $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ هي نسبة تزايد الدالة f بين العددين a و $a+h$ مع $h \neq 0$

ومنه: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\left[-(a+h)^2+2\right]-(-a^2+2)}{h} = \dfrac{-2ah-h^2}{h} = -2a-h$

وبالتالي : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-2a-h) = -2a$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.ولدينا: $\boxed{f'(x) = 2x}$

مشتقات دوال مألوفة:

مبرهنة1: الدالة التآلفية $f: x \mapsto ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقةهي: $\boxed{f'(x) = a}$

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{a(x_0+h)+b-ax_0-b}{h} = \dfrac{ah}{h} = a$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$ و منه صحة المبرهنة.

ملاحظة: * إذا كان $a=1$ و $b=0$ نستنتج أن الدالة $f: x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي: $\boxed{f'(x) = 1}$

* إذا كان $a=0$ نستنتج أن الدالة $f: x \mapsto b$ (الدالة الثابتة)قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي: $\boxed{f'(x) = 0}$

مبرهنة 2: الدالة $f: x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ودالتها المشتقة هي: $\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$

مبرهنة 3: الدالة $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و على $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}}$.

مبرهنة 4: الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

مبرهنة5: (تقبل بدون برهان) الدالة $f: x \mapsto \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f'(x) = \cos x}$

مبرهنة 6: (تقبل بدون برهان) الدالة $f: x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f'(x) = -\sin x}$

البراهين في الكتاب المدرسي

جدول الدوال المشتقة للدوال المألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\frac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N}-\{0\})$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

تطبيق: أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية : $f(x)=4\sqrt{2}$ ، $f(x)=7x$ ، $f(x)=-3-5x$

$f(x)=x^4$ ، $f(x)=x^3$ ، $f(x)=\frac{1}{x^3}$ ، $f(x)=\frac{1}{x^8}$ ، $f(x)=5\sqrt{x}$ ، $f(x)=2\sin(x)$

المشتقات والعمليات على الدوال: f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	الدالة المشتقة
$f+g$	$f'+g'$
kf	kf'
$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$
f^n	$nf^{n-1}f'$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}\ (f(x)\neq 0)$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}\ (g(x)\neq 0)$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}\ (f(x)>0)$
$f(ax+b)$	$a\times f'(ax+b)$

تطبيق: أحسب الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى D_f.

1. $f(x)=x^3+3x-4+\cos x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$ ، $f(x)=5\left(x^3+3x+\frac{1}{x}\right)$ ؛ $D_f=\mathbb{R}^*$
2. $f(x)=\left(x^2+1\right)^2$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$ ؛ $D_f=]0;+\infty[$
3. $f(x)=x+\sqrt{3x-6}$ ؛ $D_f=]2;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^2+x+3}$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

ويوجد تطبيقات في الكتاب المدرسي صفحة 40

تمرين: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2-4x+3$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. عين معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة -1
2. أوجد نقط من (C_f) المماس عندها ميله يساوي 6 ثم معادلة المماس عندئذ
3. أوجد نقط من (C_f) المماس عندها يوازي $(d):y=-2x+7$
4. أوجد نقط من (C_f) المماس عندها يعامد $(d'):y=-3x+1$

الجواب: $f(x)=x^2-4x+3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=2x-4$

1. معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة -1 هي: $(\Delta):y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-6x+2$
2. إيجاد نقط من (C_f) المماس عندها ميله يساوي 6 معناه: $f'(x)=6\Leftrightarrow 2x-4=6$ ومنه : $x=5$

   و النقطة هي: $A(5;8)$ ومعادلة المماس هي: $(\Delta'):y=f'(5)(x-5)+f(5)=6x-22$
3. إيجاد نقط من (C_f) المماس عندها يوازي $(d):y=-2x+7$ معناه لهما **نفس معامل التوجيه** ومنه

   $f'(x)=-2\Leftrightarrow 2x-4=-2$ ومنه $x=1$ والنقطة هي: $B(1;0)$
4. إيجاد نقط من (C_f) المماس عندها يعامد $(d'):y=-3x+1$ معناه **" جداء معاملي التوجيه يساوي -1 "**

   ومنه: $-3\times f'(x)=-1\Leftrightarrow -3(2x-4)=-1$ ومنه: $x=\frac{13}{6}$ والنقطة: $C\left(\frac{13}{6};f\left(\frac{13}{6}\right)\right)$

التقريب التآلفي: **إرجع إلى النشاط** f دالة معرفة على مجال مفتوح I.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث x_0+h ينتمي إلى I

لدينا: $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$. تسمى الكتابة التفاضلية

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$

يسمى $f(x_0)+hf'(x_0)$ التقريب التآلفي لـ $f(x_0+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f.

نضع $x=x_0+h\Leftrightarrow h=x-x_0$ و منه: $f(x)\approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ وهي معادلة المماس عند x_0

إذن المماس هو أحسن تقريب تألفي لـ $f(x_0+h)$

مثال01: أعطي و بدون ألة حاسبة قيمة تقريبية للعدد: $\sqrt{25,006}$

الجواب: **1. باستعمال معادلة المماس:** نضع $f(x)=\sqrt{x}$ و $x_0=25$ لأننا في جوا العدد 25

ومنه: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ومعادلة المماس هي: $(\Delta):y=f'(25)(x-25)+f(25)=0,1x+2,5$

$$f(25,006)=\sqrt{25,006}\approx 0,1(25,006)+2,5\approx \boxed{5,0006}$$

2. باستعمال العلاقة $f(x_0)+hf'(x_0)$: لدينا : $25,006=25+0,006$

ومنه: $x_0=25$ و $h=0,006$ وعليه:

$$f(25,006)=f(25+0,006)\approx f(25)+0,006f'(25)$$

$$\approx 5+0,006(0,1)\approx \boxed{5,0006}$$

يمكن التحقق بالألة الحاسبة:



تطبيقات

التمرين01: أرسم (C_f) تمثيل بياني لدالة f معرفة على المجال $[-3;3]$ وتحقق الشروط التالية:

- f متناقصة على المجال $[-3;0]$
- $f(0)=-2$ و $f'(0)=0$
- f دالة زوجية
- $f(3)=9$

التمرين02: أرسم (C_f) تمثيل بياني لدالة f معرفة على المجال $[0;9]$ وتحقق الشروط التالية:

- $f(0)=0$
- $f(1)=3$ و $f'(1)=2$
- $f(3)=6$ و $f'(3)=1$
- $f(5)=7$ و $f'(5)=0$
- $f(6)=6$ و $f'(6)=-4$

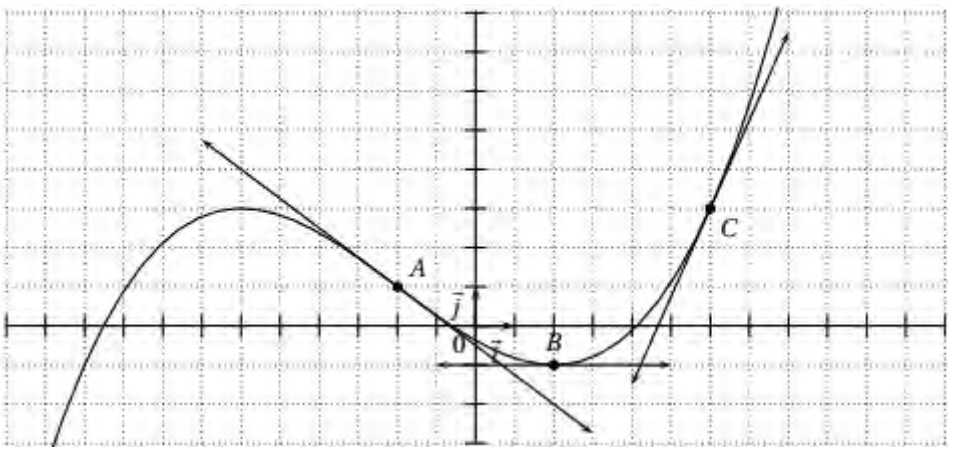
التمرين03: أرسم (C_f) تمثيل بياني لدالة f معرفة على المجال $[-4;0[\cup]0;4]$ وتحقق الشروط التالية:

- f دالة فردية
- $f(0,25)=4$ و $f(0,5)=2$
- $f(1)=1$ و $f'(1)=-1$
- (C_f) يقبل المنصف الأول $(\Delta): y=x$ كمحور تناظر له

التمرين04: ليكن (C_f) التمثيل بياني لدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و الممثل كمايلي:

حدد بيانيا مايلي:

- $f(-2)$ و $f(6)$
- $f'(-2)$ ، $f'(2)$ و $f'(6)$
- عين معادلة للبيان (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -2
- باستعما التقريب التألفي أعطي قيمة تقريبية لـ: $f(-1,9)$



التمرين05: 1. عين التقريب التألفي للدوال التالية في جوار 0 : $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

2. أحسب ذهنيا ما يلي: $\dfrac{1}{1,1}$ ، $\dfrac{1}{1,02}$ ، $\dfrac{1}{0,99}$ ، $\sqrt{1,1}$ ، $\sqrt{1,02}$ ، $\sqrt{0,99}$

الباب الرابع

تطبيقات الإشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

- تعيين اتجاه تغير دالة.
- استعمال المشتق لتعيين القيم الحدية.
- حل مسائل تستخدم فيها دوال ناطقة و دوال صماء.

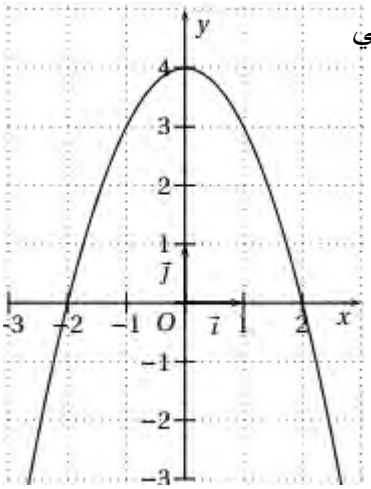
من بداية الأسبوع الثاني من نوفمبر إلى نهاية الأسبوع الرابع من نوفمبر

المدة: 2أسابيع

المدة الزمنية :

10 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي **14 ساعة** و تقني رياضي **12ساعة**

تطبيقات الإشتقاقية



نشاط01: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+4$ و (C_f) تمثيلها البياني

1. بقراءة بيانية ضع جدول تغيرات الدالة f
2. أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها
3. هل هناك رابط بين اتجاه تغير الدالة f و إشارة مشتقتها الأولى f'
4. استنتج قاعدة تربط بين اتجاه تغير الدالة f و إشارة مشتقتها الأولى f'
5. تحقق من هذه القاعدة باستعمال الدوال المرجعية المعروفة

الـــــدروس* Cours:

تطبيقات الإشتقاقية.

1. المشتقة و اتجاه تغير دالة

مبرهنة: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ($f'(x)\geq 0$) فإن الدالة f متزايدة تماما(متزايدة) على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ($f'(x)\leq 0$) فإن الدالة f متناقصة تماما(متناقصة) على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

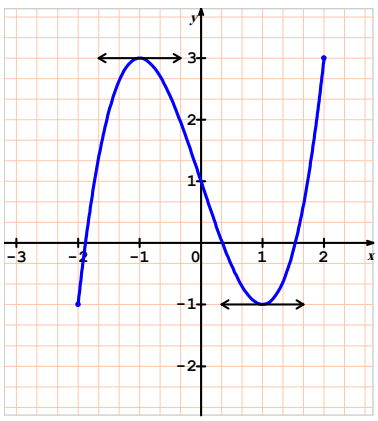
2. القيم الحدية المحلية:

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\leq f(x_0)$.

القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\geq f(x_0)$.

القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.



مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;2]$ بـ $f(x)=x^3-3x+1$

وليكن في الشكل المقابل تمثيلها البياني. $f(-1)=3$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

و $f(1)=-1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f في المجال $[0;2]$.

و $f(-1)=3$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f في المجال $[-2;0]$

مبرهنة: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

3. حصر دالة:

نتائج لتكن دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' دالتها المشتقة .

- إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$ $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$ تحافظ على الترتيب
- إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$ $f(b)\leq f(x)\leq f(a)$ لا تحافظ على الترتيب

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $[-3,1]$ كما يلي : $f:x\mapsto x^2+2x-3$. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' هي : $f':x\mapsto 2x+2$.

الدالة f' سالبة تماما على $]-3,-1]$ و $f'(-1)=0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-3,-1]$.

الدالة f' موجبة تماما على $[-1,1[$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1,1[$.

جدول التغيرات:

x	-3		-1		1
$f(x)$	0	↘	-4	↗	0

من أجل كل: $-3\leq x\leq -1$ فإن: $f(-1)\leq f(x)\leq f(-3)$ أي $-4\leq f(x)\leq 0$ لأن الدالة متناقصة

من أجل كل $-1\leq x\leq 1$ فإن: $f(-1)\leq f(x)\leq f(1)$ أي $-4\leq f(x)\leq 0$ لأن الدالة متزايدة

4. عنصرحاد من الأعلى – عنصر حاد من الأسفل :

تعريف: لتكن دالة f معرفة على مجال D_f .

- يسمي عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأعلى $(Majorant)$ للدالة f على المجال D_f إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x)\leq k$.
- يسمي عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأسفل $(Minorant)$ للدالة f على المجال D_f إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x)\geq k$.

بالنسبة للمثال السابق الدالة f المعرفة على $[-3,1]$ كما يلي : $f:x\mapsto x^2+2x-3$.

0 عنصر حاد من الأعلى و 4- عنصر حاد من الأسفل.

ملاحظة:

- القيمة الحدية الكبرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأعلى وهو أصغر العناصرالحادة من الأعلى.
- القيمة الحدية الصغرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأسفل وهو أكبر العناصرالحادة من الأسفل.

←←←تطبيقات و مسائل→→→

التمرين01: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2+2x-3$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. بين أن تقبل قيمة حدية

التمرين02: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-2x^2+4x-3$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. بين أن تقبل قيمة حدية

التمرين03: لتكن f دالة معرفة على $[0,2]$ كما يلي : $f(x)=8x^3-15x^2+18x-7$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. أنشئ المماسات عند 0 ، 1 و 2 ثم أنشئ القيم الحدية و البيان (C_f)

التمرين04: لتكن f دالة معرفة على $[-1,3]$ كما يلي : $f(x)=x^3-4x^2+4x$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) و حامل محور الفواصل
4. عين القيم الحدية و أنشئ البيان (C_f)

التمرين05: لتكن f دالة معرفة على $[0,5]$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x-2$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f و لتكن I نقطة من (C_f) فاصلتها 2
   - عين معادلة مختصرة للمماس (T) للبيان (C_f) عند النقطة I
   - نعتبر دالة h معرفة كما يلي : $h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-2$ بين أن h متزايدة تماما على $[0,5]$
   - أدرس الوضع النسبي للبيان (C_f) بالنسبة إلى (T)
4. أنشئ البيان (C_f)

التمرين06: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^3-3x-3$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. عين معادلة مختصرة للمماس (T) للبيان (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0
4. أدرس الوضع النسبي للبيان (C_f) بالنسبة إلى (T)
5. أنشئ المماس (T) والبيان (C_f)

التمرين07: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
2. ضع جدول تغيراتها
3. عين إحداثيات A نقطة تقاطع البيان (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أعطي معادلة مختصرة للمماس (T_A) للبيان (C_f) عند النقطة A
4. عين إحداثيات B نقطة تقاطع البيان (C_f) مع حامل محور التراتيب ثم أعطي معادلة مختصرة للمماس (T_B) للبيان (C_f) عند النقطة B

التمرين08: لتكن f دالة معرفة على $[-4;4]$ كما يلي: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. بين أن f دالة فردية ماذا تستنتج بيانيا
2. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
3. ضع جدول تغيراتها وعين القيم الحدية المحلية
4. أنشئ البيان (C_f) في المجال $[-4;4]$

التمرين09: لتكن (P) القطع المكافئ المعرف كما يلي: $y=ax^2+bx+c$ م م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $a\neq 0$

عين المعاملات a، b و c علما بأن : (P)يقطع حامل محور الفواصل في نقطة A فاصلتها 3 و يقطع حامل محور التراتيب في نقطة B فاصلتها 2 و يقبل عند B مماس معادلته $y=2x+2$

التمرين10: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1. عين المجموعة التي تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عليها
2. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها
3. ضع جدول تغيراتها
4. عين معادلة مختصرة للمماس (T) للبيان (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2
5. عين نقط من (C_f) المماس عندها يوازي حامل محور الفواصل
6. هل يوجد نقط من (C_f) المماس عندها يوازي المنصف الأول $y=x$
7. عين نقط من (C_f) المماس عندها ميله يساوي -3
8. أ) عين تقريب تألفي للدالة f في جوار 2

   ب) استنتج قيمة مقربة لمايلي: $f(2,003)$ ، $f(1,996)$
9. برهن أن النقطة $\Omega(1;-1)$ مركز تناظرللبيان (C_f)

مسائل الإستمثال

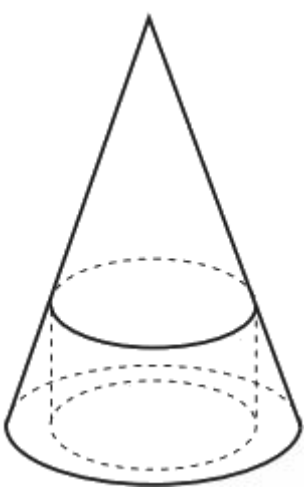
مسالة01: نعتبر مستطيل محيطه $P=4\,cm$

1. عين أبعاده (الطول L و العرض l) علما بأن مساحته S تساوي $\frac{3}{4}cm^2$
2. نريد الآن تعيين الأبعاد حتى تكون المساحة أعظمية
   - عبر عن المساحة S بدلالة العرض l
   - نعتبر دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x(2-x)$ أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها و ضع جدول تغيراتها ثم أنشئ بيانها (C_f) في المجال $[0;2]$
   - استنتج أبعاده المستطيل الذي محيطه $P=4\,cm$ و المساحة أعظمية S

مسالة02: أسطوانة دائرية نصف قطرها $x\ cm$ موجودة داخل مخروط دوراني نصف قطره $10\,cm$ و ارتفاعه $30\,cm$

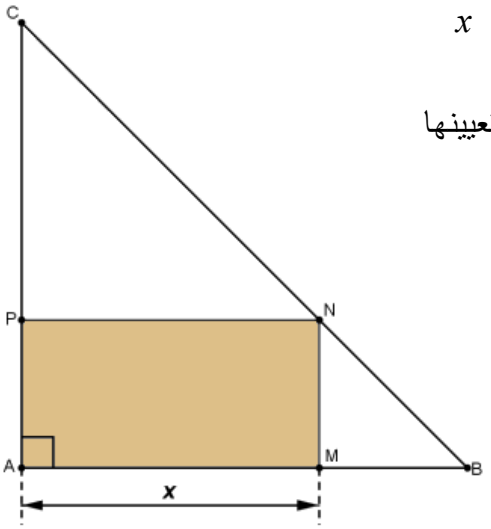
نفرض أن حجم الأسطوانة معطى بالدالة التالية $V(x)=30\pi x^2(1-\frac{x}{10})$ و $0\leq x\leq 10$

أوجد قيمة x حتى يكون الحجم أعظمي



مسألة03: نعتبر مستطيل مساحته $S=16\,cm^2$ نسمي نعتبر مستطيل محيطه x أحد أضلاعه

1. عبر عن المحيط نعتبر مستطيل محيطه $P(x)$ بدلالة نعتبر مستطيل محيطه x
2. أدرس اتجاه تغير الدالة P ثم ضع جدول تغيراها على المجال $]0;+\infty[$
3. استنتج أن المحيط $P(x)$ يقبل قيمة حدية صغرى عند قيمة للعدد x يطلب تعيينها



مسألة04: ABC مثلث قائم و متساوي الساقين بحيث $AB=AC=6\,cm$

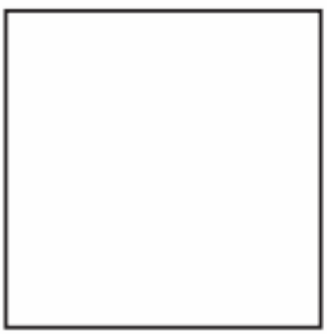
M نقطة متحركة على القطعة $[AB]$ بحيث: $AM=x$ و $(x\in[0;6])$

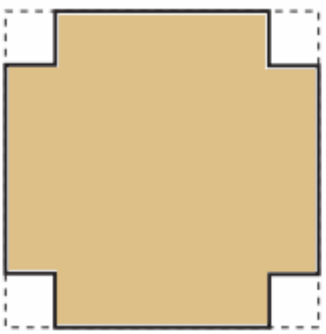
لتكن $N\in[BC]$ و $P\in[AC]$ بحيث يكون الرباعي $AMNP$ مستطيل

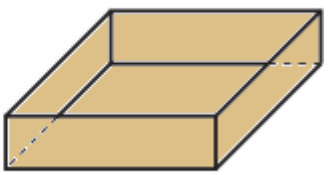
نقبل أن المثلثان CPN و BMN قائمان و متساويا الساقين **" أنظر الشكل"**

1. لتكن f ترفق بكل عدد x مساحة المستطيل $AMNP$
   - بين أن $f(x)=x(6-x)$
   - تحقق أن: $f(x)=-(x-3)^2+9$
2. ضع جدول تغيرات للدالة f
3. استنتج أن مساحة $AMNP$ تكون أعظمية من أجل وضعية للنقطة M يطلب تحديدها و إعطاء قيمة هذه المساحة

مسألة05: لتكن لدينا ورقة مربعة الشكل طول ضلعها $6\,cm$ نقطع من زواياها مربعات طول الضلع يساوي $x\,cm$ للحصول على تصميم لعلبة بدون غطاء نسمي V دالة ترفق بكل قيمة للعدد x العدد $V(x)$ حجم العلبة **"أنظر الشكل"**







1. ماهو المجال I الذي تتغير x
2. بين أن لكل x من المجال I لدينا $V(x)=4x^3-24x^2+36x$
3. أدرس اتجاه تغير الدالة V ثم ضع جدول تغيراها على المجال I
4. استنتج أن الحجم $V(x)$ يقبل قيمة حدية عظمى عند قيمة للعدد x يطلب تعيينها

مسألة06: تنتقل سيارة من مدينة A نحو مدينة B تفصلهما مسافة d_1 بسرعة متوسطة $80\,km/h$

ثم من المدينة B نحو مدينة C تفصلهما مسافة d_2 بسرعة متوسطة $x\,km/h$

نسمي $V(x)$ السرعة المتوسطة خلال رحلة هذه السيارة من A نحو C نعرف V على المجال $]0;130]$

1. ماهو اتجاه تغير الدالة V على المجال $]0;130]$
2. علما بأن المسافة d_2 أكبر مرتان من المسافة d_1 عبر بدلالة x السرعة المتوسطة $V(x)$
3. أدرس اتجاه تغير الدالة V عن طريق حساب $V'(x)$ المشتقة الأولى على المجال $]0;130]$
4. ضع جدول تغيرات الدالة V ثم استنتج السرعة المتوسطة الأعظمية و قيمة $x\,km/h$ المقابلة لذالك

الباب الخامس

النهايات و السلوك التقاربي

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- حساب نهاية دالة ناطقة عند عدد a حيث a حد لمجموعة تعريف هذه الدالة.
- التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0.
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي أحد محوري المعلم.
- تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب.البحث عن مستقيم مقارب مائل.
- استعمال النظريات الأولية(المجموع، الجداء، المقلوب و حاصل القسمة) لحساب نهايات.
- حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

من بداية الأسبوع الأول من ديسمبر إلى نهاية الأسبوع الأول من جانفي

المدة: 3أسابيع

المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي **21 ساعة** و تقني رياضي **18ساعة**

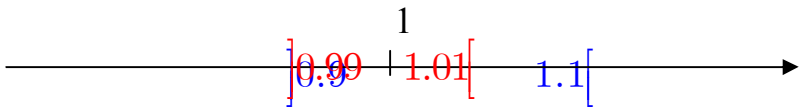
النهايات و السلوك التقاربي

نشاط01: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية و أرسم الحلول على محور عددي :

1. $|x|<1$ **2.** $|x-1|<0.1$ **3.** $|x-1|<0.01$

2. ماذاتلاحظ

الحل: **1.** $-1<x<1$ **2.** $0.9<x<1.1$ **3.** $0.99<x<1.01$



2. الملاحظة: هذه المجالات مركزية و كلما صغر طولها كانت x تقترب من 1 يعني أنها ستنتهي عند 1

نشاط02 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

1. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. أكمل، باستعمال آلة حاسبة، جدول القيم الموالي:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$								

3. ماذا تلاحظ ؟

4. بين أنه حتى يكون $f(x)\geq 10^8$ يكفي أن يكون x عنصرا من $\left]3-10^{-4};3\right[\cup\left]3;3+10^{-4}\right[$

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يكون $f(x)\geq A$ لما $x\in\left]3-\dfrac{1}{\sqrt{A}};3\right[\cup\left]3;3+\dfrac{1}{\sqrt{A}}\right[$

الحل: **1.**

$$f'(x)=\frac{-2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{-2x+6}{(x-3)^4}$$

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8	10^8	10^6	10^4	10^2

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		↗	$\|\|$	↘	

الملاحظة : لما x يقترب من 3 بالقدر الكافي فإن $f(x)$ يكبر

مما يعني أن : لما $x\to 3$ فإن $f(x)\to+\infty$

2.

$$f(x)\geq 10^8 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-3)^2}\geq 10^8 \Leftrightarrow (x-3)^2\leq 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow |x-3|\leq 10^{-4} \Leftrightarrow -10^{-4}\leq x-3\leq 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 3-10^{-4}\leq x-3\leq 3+10^{-4} \Leftrightarrow x\in\left]3-10^{-4};3\right[\cup\left]3;3+10^{-4}\right[$$

3.

$$f(x)\geq A \Leftrightarrow \frac{1}{(x-3)^2}\geq A \Leftrightarrow (x-3)^2\leq \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\Leftrightarrow |x-3|\leq \frac{1}{\sqrt{A}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{A}}\leq x-3\leq \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{1}{\sqrt{A}}\leq x-3\leq 3+\frac{1}{\sqrt{A}} \Leftrightarrow x\in\left]3-\frac{1}{\sqrt{A}};3\right[\cup\left]3;3+\frac{1}{\sqrt{A}}\right[$$

وهو برهان الملاحظة

مفهوم النهاية: بعض التعاريف

تعريف1: نقول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ε ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-x_0|<\alpha$ يكون $0\le|f(x)-l|<\varepsilon$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

ملاحظة: $0<|x-x_0|<\alpha$ تعني $x\in]x_0-\alpha;x_0[\cup]x_0;x_0+\alpha[$ تعني $0\le|f(x)-l|<\varepsilon$ $f(x)\in]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$

تعريف2: نقول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجدعلى الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x>B$ يكون $0\le|f(x)-l|<\varepsilon$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

تعريف3: نقول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجدعلى الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x>B$ يكون $f(x)>\mathrm{A}$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تعريف4: نقول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجدعلى الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x<-B$ يكون $f(x)>\mathrm{A}$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

تعريف5: نقول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x-x_0<\alpha$ يكون $f(x)>A$ و نكتب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=+\infty$

تعريف6: نقول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x_0-x<\alpha$ يكون $f(x)>A$ و نكتب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=+\infty$

ملاحظة: يمكنك الحصول على بقية التعاريف بإتباع نفس المبدأ السابق .

عمليات على النهايات

1. المبرهنات الأولية على النهايات: f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

حالات عدم تعيين : $0\times\pm\infty\ ,\ +\infty-\infty\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

****هذه العمليات ليس لها نتائج بل يجب التخلص منها وذالك برفع الحالة****

طرق رفع حالات عدم تعيين :

حالة $\infty-\infty+$ ثم $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ و كثيرات الحدود:

(أكبر حد)

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n\right)$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_n x^n}{b_n x^n}\right)$

مثال01:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^3-4x+5)=\lim_{x\to+\infty}(3x^3)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+4x+5)=\lim_{x\to+\infty}(-3x^3)=-\infty$$

البسط درجته أكبر

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-4x+5}{2x^2+x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3}{2x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{2}\right)=+\infty$$

لهما نفس الدرجة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-4x+5}{2x^3+x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3}{2x^3}\right)=\frac{3}{2}$$

المقام درجته أكبر

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-4x+5}{2x^4+x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3}{2x^4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2x}\right)=0^+$$

حالة $\frac{0}{0}$: *) حالة كثير حدود على كثير حدود يجب تحليل البسط و المقام ثم الإختزال **وهنا x يؤول إلى عدد**

مثال01:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3x^3-4x+1}{2x^2+x-3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(3x^2+3x-1)}{(x-1)(2x+3)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{3x^2+3x-1}{2x+3}\right)=1$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2-x}\right)=\lim\left(\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-3}{x}\right)=-2$$

*) حالة الجذور يجب الضرب في المرافق مرة أومرتان **وهنا x يؤول إلى عدد**

حالة مرة واحدة

- $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2}\right)=\dfrac{1}{4}$

حالة مرتان

- $$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x-3}-1}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x-3}-1}\times\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x-3}+1}\times\frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x+5}+3}\right)$$
$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\cancel{x+5-9}}{\cancel{x-3-1}}\times\frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x+5}+3}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ونلاحظ ضربنا في مرافق البسط و مرافق المقام

- النهاية من اليمين و النهاية من اليسار

تمرين: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

- أحسب النهاية عند أطراف مجموعة التعريف

الحل: $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x}{x}\right)=3=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=-\infty\begin{pmatrix}N=7\\D=0^-\end{pmatrix}\quad\text{و}\quad\lim_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=+\infty\begin{pmatrix}N=7\\D=0^+\end{pmatrix}$$

جدول إشارة المقام ضروري

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

0^- 0^+

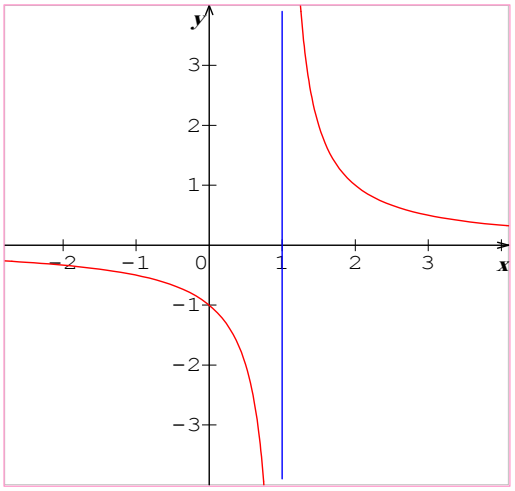
ملاحظة: N تعني البسط و D تعني المقام

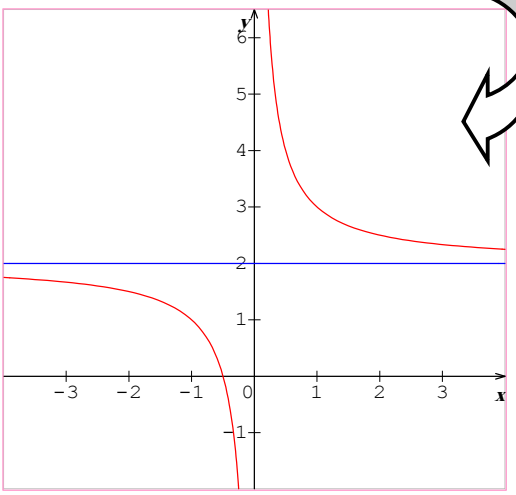
يمكن التدرب على حساب النهايات في التطبيقات و السلاسل

السلوك التقاربي لبيان الدالة

التفسير البياني لـ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow$ (يعني (C_f) بيان f يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=a$ كمقارب له)
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \Leftrightarrow$ (يعني (C_f) بيان f يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=b$ كمقارب له)





إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ فهناك إمكانية وجود خط مقارب مائل

المستقيم المقارب المائل

1. مثال تمهيدي

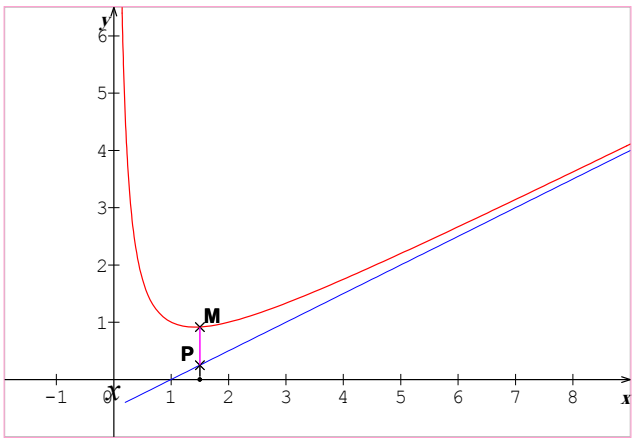
لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$$

باستعمال راسم منحنيات تحصلنا على (C_f) التمثيل البياني

للدالة f كما قمنا بتمثيل المستقيم $(\Delta): y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

لتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و لتكن P نقطة (Δ) لتي فاصلتها x. (أنظر الشكل المقابل)



لدينا بالنسبة لهذه الوضعية $MP=f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$ و منه $MP=\frac{1}{x}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

فإن MP يؤول إلى 0 لما يؤول x إلى $+\infty$. نلاحظ أن المنحني (C_f) يقترب من المستقيم (Δ) لما يؤول x إلى $+\infty$.

نقول في هذه الحالة أن المستقيم مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$

نقول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

يعني أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

ملاحظة: إذا كانت f دالة بحيث: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإنه من الواضح أن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ لأن $f(x)-(ax+b)=g(x)$ بالتالي فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$. (نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+3-\dfrac{3}{x-2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $f(x)-(x+3)=-\dfrac{3}{x-2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{3}{x-2}=0^-$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{3}{x-2}=0^+$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

البحث عن المستقيم المقارب المائل

نعتبر في معلم (O,I,J) للمستوي المنحني (C_f) الممثل لدالة f.

و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ نفرض أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ نفرض أن (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$

ومنه حسب التعريف $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ نضع: $g(x)=f(x)-(ax+b)$ و منه $f(x)=g(x)+ax+b$

حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{g(x)+ax+b}{x}=\dfrac{1}{x}\times g(x)+a+\dfrac{b}{x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a}$ لدينا من جهة ثانية

و بما أن $f(x)-ax=g(x)+b$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b}$

الخلاصة1: إذا كان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

1. نفرض أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ من الواضح أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ و منه

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

الخلاصة2: إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $\boxed{y=ax+b}$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ملاحظة: ننجز برهانا مماثلا لما يؤول x إلى $-\infty$

نتيجة: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$

يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b}$ (على الترتيب $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b}$)

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
2. عين معادلاتها المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f).

الحل: • لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ وبنفس الطريقة نثبت أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty\begin{pmatrix}N=-1\\D=0^-\end{pmatrix}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty\begin{pmatrix}N=-1\\D=0^+\end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty\begin{pmatrix}N=1\\D=0^+\end{pmatrix}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty\begin{pmatrix}N=1\\D=0^-\end{pmatrix}$

• من نتائج حساب النهايات نستنتج أن المستقيمين الموازيين لمحور التراتيب و اللذين معادلتاهما: $\boxed{x=-1}$ و $\boxed{x=1}$ مستقيمان مقاربان للمنحني (C_f).

• لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و منه إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل

لدينا من جهة: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}\times\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

لدينا إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=3}$

و بالتالي المستقيم $\boxed{(\Delta):y=x+3}$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$. (نفس النتيجة عند $-\infty$)

مخطط دراسة دالة

1. **مجموعة التعريف**
   - تحديد مجموعة تعريف الدالة إذا لم تكن قد أعطيت في النص.
   - دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة) قصد تقليص مجموعة الدراسة و تحديد مراكز أو محاور تناظر المنحني الممثل للدالة.
2. **حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة**
3. **دراسة اتجاه تغير الدالة**
   - حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق
   - دراسة إشارة المشتقة و استنتاج اتجاه تغير الدالة.
   - تحديد القيم الحدية في حالة وجودها.
4. **تشكيل جدول تغيرات الدالة**
5. **تحديد المستقيمات المقاربة**
6. **التمثيل البياني للدالة**
   - رسم المستقيمات المقاربة.
   - تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب إحداثياتها و نذكر بصفة خاصة النقط الحدية و نقط تقاطع المنحني مع محوري الإحداثيات.
   - رسم المماسات عند القيم الحدية و أخرى مطلوبة في النص.
   - استغلال عناصر تناظر المنحني إن وجدت.

مسائل

1.دراسة الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

مسألة01: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3-3x+2$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f=]-\infty;+\infty[$
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;+\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. أحسب $f(1)$ و حل في $]-\infty;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$
5. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
6. عين إحداثيات I نقطة الإنعطاف
7. بين أن I مركز تناظر للبيان (C_f)
8. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

مسألة02: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3+3x^2-4$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f=]-\infty;+\infty[$
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;+\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. أحسب $f(1)$ و حل في $]-\infty;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$
5. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
6. عين معالة المماس (T) عند النقطة $I(-1;-2)$
7. أدرس الوضع النسبي بين المماس (T) و البيان (C_f)
8. استنتج أن $I(-1;-2)$ نقطة الإنعطاف
9. بين أن $I(-1;-2)$ مركز تناظر للبيان (C_f)

2.دراسة الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة:

مسألة03: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^4-2x^2+1$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. بين أن البيان (C_f) يقبل حامل محور التراتيب كمحور تناظر له
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $f(0)$
3. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;+\infty[$
4. ضع جدول تغيرات الدالة f
5. أحسب $f(1)$ و حل في $]-\infty;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$
6. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

مسألة04: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^4-4x$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f=]-\infty;+\infty[$
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;+\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. حل في $]-\infty;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$
5. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
6. عين معالة المماس (T) عند المبدأ O
7. أدرس الوضع النسبي بين المماس (T) و البيان (C_f)
8. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=-4x+m$

3.دراسةالدوال التناظرية:

مسألة05: f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. أحسب النهايات عند أطراف $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ثم أعطي تفسيرا هندسيا لهذه النهايات
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
5. بين أن I نقطة تقاطع الخطوط المقاربة هي مركز تناظر للبيان (C_f)
6. أرسم الخطوط المقاربة و البيان (C_f)

مسألة06: f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad /c\neq 0$

و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و a ، b، $c\neq 0$ و d أعداد حقيقية

1. عين الأعداد a ، b، c و d علما بأن البيان (C_f) يقبل المستقيمان $(\Delta):x=1$ و $(\Delta'):y=-2$ كمقاربات له والبيان (C_f) يشمل النقطة $A(0;-4)$
2. نعتبر الآن أن: $f(x)=\dfrac{2x-4}{1-x}$
   - أحسب النهايات عند أطراف $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
   - أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
   - ضع جدول تغيرات الدالة f
   - عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
   - بين أن I نقطة تقاطع الخطوط المقاربة هي مركز تناظر للبيان (C_f)
   - أرسم الخطوط المقاربة و البيان (C_f)
3. نعتبر الدالة g معرفة كمايلي: $g(x)=\dfrac{2|x|-4}{1-|x|}$ و (C_g) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
   - عين مجموعة تعريفها D_g
   - بين أن الدالة g زوجية
   - بين كيف نرسم (C_g) باستعمال البيان (C_f)
   - أرسم البيان (C_g) في نفس المعلم السابق

مسألة07: f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{x-3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. بين أن لكل $x\in\mathbb{R}-\{3\}$: $f(x)=x\,\dfrac{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى البيان
2. بين أنه يوجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b، c بحيث لكل $x\neq 3$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$
3. استنتج أن البيان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تحديد معادلة له
4. أدرس وضعية البيان (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
5. أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}f(x)$ ثم أعطي تفسيرا لهذه النهايات
6. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات f
7. عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 2
8. أوجد نقط من البيان (C_f) المماس عندها ميله يساوي $\frac{5}{4}$

9. عين إحداثيات نقط تقاطع البيان (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات
10. أرسم الخطوط المقاربة و المماس (T) و البيان (C_f)
11. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$
12. بين أن نقطة تقاطع الخطوط المقاربة هي مركز تناظر للبيان (C_f)
13. نعتبر الدالة g معرفة كمايلي: $g(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{|x-3|}$ و (C_g) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

- أكتب $g(x)$ بدون قيمة مطلقة ثم استنتج $g(x)$ بدلالة $f(x)$
- بين كيف نرسم (C_g) باستعمال البيان (C_f)
- أرسم البيان (C_g) في نفس المعلم السابق

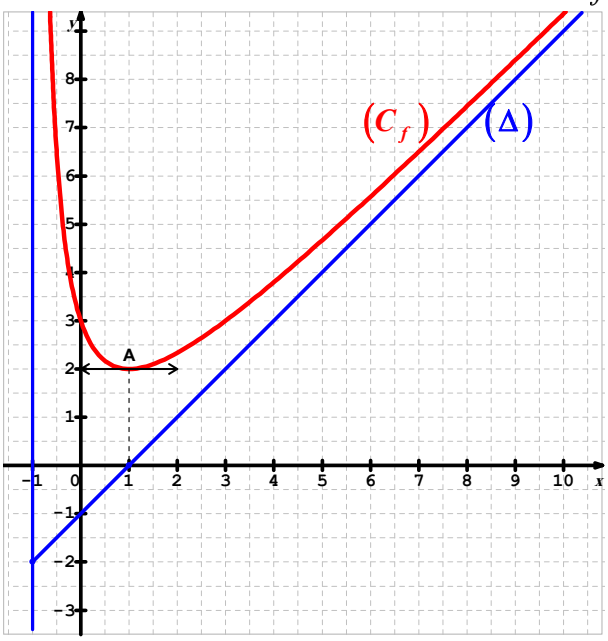
مسألة08: f دالةعددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{1-2x}{-x^2+2x+3}$ و (C_f)تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. أحسب النهايات عند أطراف D_f ثم أعطي تفسيرا لهذه النهايات
2. أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على D_fثم ضع جدول تغيرات f
3. أعطي جدول إشارة $f(x)$ ثم استنتج وضعية البيان (C_f) مع حامل محور الفواصل
4. أرسم الخطوط المقاربة و البيان (C_f)
5. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

مسألة09: f دالةعددية معرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$

و (C_f)تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ في الرسم المقابل

البيان (C_f) يقبل مما أفقي عند النقطة $A(1;2)$ و (Δ) مستقيم مقارب له



1. عين معادلة مختصرة للمستقيم (Δ)
2. عين الأعداد a ، b، c باستعمال المعطيات السابقة
3. ضع جدول تغيرات الدالة f
4. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m
   عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$
5. أرسم في معلم أخر بيان (C')نظير (C_f) بالنسبة إلى $I(-1;-2)$
6. ليكن (C_g) بيان دالة gمعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+3$

- أدرس الوضع النسبي بين البيانين (C_f) و (C_g)
- أرسم في نفس المعلم السابق البيان (C_g)

←←←مسائل الإستمثال→→→

مسألة01: تنطلق سيارة من مدينة A نحو مدينة B قاطعة مسافة d_1 بين المدينتين بسرعة متوسطة $80\ km/h$
ثم تقطع مسافة d_2 نحو مدينة C بسرعة متوسطة $x\ km/h$
لتكن $V(x)$ السرعة المتوسطة للسيارة على كامل الرحلة $A \to B \to C$
نعرف هذه الدالة V على المجال $]0;130]$

1. ماهو اتجاه تغير الدالة V على المجال $]0;130]$
2. إذا علمت أن $d_2 = 2d_1$ عبرعن $V(x)$ بدلالة x
3. أحسب $V'(x)$ ثم ضع جدول تغيراتها على المجال $]0;130]$
4. بين أن الدالة V تقبل قيمة حدية صغرى
5. مثل هذه الدالة في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

مسألة02: نعتبر مستطيل مساحته $16\,cm^2$ نسمي x طول إحدى أضلاعه

1. عبر عن محيطه $P(x)$ بدلالة x
2. أدرس تغيرات الدالة P في المجال $]0;+\infty[$
3. بين أن الدالة P تقبل قيمة حدية صغرى من أجل قيمة محددة للعدد x
4. ليكن (C_P) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
   - بين أن المستقيم ذو المعادلة $(\Delta): y = 2x$ هو مقارب للمنحني (C_P)
   - أدرس وضعية (C_P) بالنسبة إلى (Δ)
   - أرسم المستقيم (Δ) والبيان (C_g)
5. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$

مسألة03: في م م م م م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبر النقطة $A(1;2)$ وليكن x عدد حقيقي أكبر تماما من 1 $(x > 1)$
ولتكن النقطة $M(x;0)$ ، المستقيم (AM) يقطع حامل محور التراتيب في نقطة N

1. بين أن ترتيبة النقطة N تساوي $\dfrac{2x}{x-1}$
2. نعرف الآن دالة f كمايلي: $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$
   - عين مجموعة تعريفها D_f
   - أدرس تغيرات الدالة f على D_f
   - استنتج أن الدالة f محدودة من الأسفل بالعدد 2
3. نعرف الآن دالة g ترفق بكل عدد x إلى $g(x)$ هي مساحة المثلث OMN
   - عين مجموعة تعريفها D_g
   - عين عبارة $g(x)$
   - أدرس تغيرات الدالة g على D_g
   - استنتج أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى ثم ضع رسم لهذه الحالة

10 أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند a في كل حالة

1) $f(x)=x^2-1$ ، $a=2$ 2) $f(x)=\dfrac{2x}{x+3}$ ، $a=-2$

3) $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $a=3$ 4) $f(x)=x|x-1|$ ، $a=1$

18 أحسب $f'(x)$ في كل حالة ثم ادرس اشارته

1) $f(x)=-x^2+2x-1$ 2) $f(x)=-x^3+3x+4$

3) $f(x)=(x+1)(x^2-1)$ 4) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

5) $f(x)=\sqrt{3x-6}$ 6) $f(x)=\sin x$ على المجال $[0;\pi]$

13 أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ω ذات الفاصلة x_0 في كل حالة:

1) $f(x)=x^2+3x-4$ ، $x_0=0$ 2) $f(x)=x^3-x^2$ ، $x_0=-1$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{1-2x}$ 4) $f(x)=\sqrt{2x-3}$ ، $x_0=1$ ، $x_0=2$

10 f الدالة المعرفة على $[1;5]$ بـ: $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

وليكن (C_f) هو التمثيل البياني لها.

1) أحسب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+1)-f(1)}{h}$ وفسر النتيجة هندسيا.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" أنشئ (C_f)

10 f دالة معرفة على $[-1;3]$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+4$

1) حسب $f'(x)$ وادرس اشارته ثم استنتج اتجاه تغير f

2) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) جد معادلة المماس (T) لـ (C_f) في نقطة ذات الفاصلة 1

4) أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

5) اعط حصرا للعدد $f(x)$ من أجل $1\le x\le 3$

10 f دالة معرفة على $[-2;2]$ بـ: $f(x)=x^4-2x^2-3$

1) ادرس شفعية الدالة f . ماذا تستنتج بالنسبة لـ $\mathcal{C}_f$ ؟

2) ادرس اتجاه تغير f على $[0;2]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) جد فواصل نقط تقاطع $\mathcal{C}_f$ مع محوري الإحداثيات.

4) عين معادلة المماس (Δ) لـ $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

5) أنشئ بعناية المماس (Δ) والمنحنى $\mathcal{C}_f$

10 f دالة معرفة على $[-8;8]$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$

1) عين العدد الحقيقيين a و b بحيث المنحنى (C_f) يقبل مماسا افقيا عند النقطة $A(0;3,5)$

2) تحقق ان: $f(x)=1+\dfrac{5x+5}{x^2+2x+2}$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) جد نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات

5) ادرس وضعية (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y=1$.

6) بين أن: $f(-2-x)+f(x)=2$ ثم فسر النتيجة هندسيا

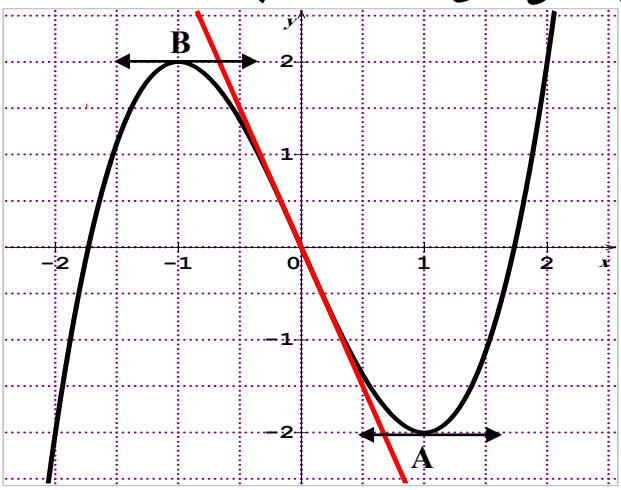
7) أرسم كلا من (Δ) و (C_f) .

12 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^3+bx+c$

حيث a، b، c أعداد حقيقية. (C) هو المنحنى الممثل لـ f

عين الأعداد a، b و c بحيث المنحنى (C) يشمل النقطة $A(1;-3)$ و يقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم D الذي معادلته $y=-6x$

12 (C_g) المقابل هو التمثيل البياني لدالة عددية g معرفة على المجال $]-2;2[$ بـ: $g(x)=ax^3+bx+c$



1) بقراءة بيانية عين مايلي:

أ) $g(-1)$ ، $g(1)$ ، $g(0)$ و $g'(1)$ ، $g'(0)$ ، $g''(0)$

ب) أكتب معادلة المماس لـ (C_g) عند النقط O و A و B

ج) شكل جدول تغيرات g

2) باستعمال نتائج 1-أ) بيّن أن: $a=1$ ، $b=-3$ و $c=0$

01 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1}$

1) أحسب $f'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

2) بين أن (C_f) يقبل مماسين ميل كل منهما يساوي 3

ثم اكتب معادلتي هاذين المماسين.

3) هل يوجد مماس لـ (C_f) توازي حامل محور الفواصل

00 f دالة معرفة على المجال $I=[-3;+3]$ بجدول تغيراتها

x	-3	-2	-1	0	1	2	+3
f'(x)		0	-		-	0	
f(x)	-5	0	2	0		0	2
					-3		

1) أكمل الجدول السابق

2) حل في I المعادلة $f(x)=0$ استنتج إشارة $f(x)$ على I

3) g دالة معرفة على I بـ: $g(x)=[f(x)]^2$.

أ) بين أن $g'(x)=2f(x).f'(x)$ ثم استنتج اشارة $g'(x)$

ب) ارسم جدول تغيرات الدالة g على المجال I

جـ) عين القيم الحدية المحلية لـ g ثم جد حصرا للدالة g

08 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x^2+\alpha x$

1) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون معامل توجيه المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1- هو 4-

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f من أجل $\alpha=5$

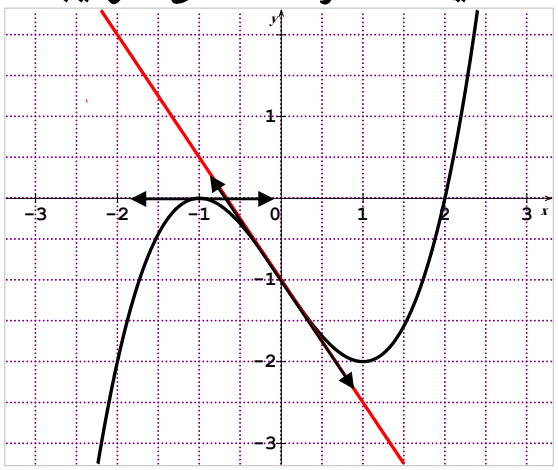
3) عين قيم α التي من اجلها تكون f متزايدة على $\mathbb{R}$.

03 1) احسب نسبة التزايد عند العدد 1 للدالة f حيث $f(x)=\frac{2}{x+1}$ ، ثم استنتج العدد الحقيقي $f'(1)$

2) احسب $g'(1)$ علما أن نسبة تزايد الدالة g عند 1 هي: $\frac{g(h+1)-g(1)}{h}=\frac{3h+2}{(h+1)^2}$

3-أ) الشكل(1) هو منحى دالة k بقراءة بيانية أوجد: $k(-1)$ ، $k'(-1)$ ثم $k(0)$ ، $k'(0)$

ب) استنتج معادلتي المماسين لـ (C_k) عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $x=-1$ و $x=0$ على الترتيب.



جـ) أرسم المماس عند $A(-2;-2)$ علما أن $k'(-2)=\frac{9}{2}$

00 f دالة معرفة على المجال $[-1;3]$ بالعبارة: $f(x)=x^3-3x^2+2$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني

1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f على المجال $[-1;3]$

2) أحسب $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f'(0)$ و $f'(2)$

3) أدرس إشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) أكتب معادلة المماس المنحنى (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1

5) أرسم المماس (Δ) والمنحنى (C_f)

6) أدرس بيانيا الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

أعط تفسيرا هندسيا للنقطة $\omega(1;0)$.

00 f دالة معرفة على $[-2;2[\cup]2;8]$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+5}{x-2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، و (D) مستقيم معادلته $y=x+2$.

1) الأعداد a ، b و c بحيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

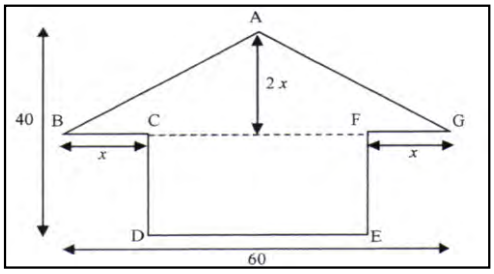
2) عين وضعية (C_f) بالنسبة (D)

3 - أ) بين أن: $f'(x)=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$

ب) عين $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه f وشكل جدول تغيراتها

00 تريد إحدى المؤسسات صنع "رمز" لها له الشكل و الأبعاد أدناه. وحدة الأطوال هي السنتيمتر cm.

و قصد التقليص من التكاليف، نبحث عن قيمة x التي من أجلها مساحة الشكل أدناه أصغرما يمكن



1) عبر بدلالة x عن كل من: *الطول CD والطول CF.

*مساحة المستطيل CDEF و مساحة المثلث ABG.

2) بين أن مساحة الشكل هي: $f(x)=4x^2-140x+2400$

3) أدرس اتجاه تغير f على $[0;20]$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) أرسم التمثيل البياني للدالة f.

5) استنتج مما سبق قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أصغر ما يمكن. حدد هذه المساحة

الباب السادس

المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة

- وصف ظاهرة بواسطة متتالية.
- التعرف على اتجاه تغير متتالية.
- التعرف على متتالية حسابية (هندسية).
- حساب الحد العام لمتتالية حسابية (هندسية).
- حساب مجموع p حدا متعاقبا.
- حساب نهاية متتالية عددية.

من بداية الأسبوع الأول من ديسمبر إلى نهاية الأسبوع الأول من جانفي

المدة: 3أسابيع

المدة الزمنية :

15 ساعة بالنسبة للعلوم تجريبية أما بالنسبة للشعبة رياضي **21 ساعة** و تقني رياضي **18ساعة**

نشاط01: النشاط رقم 05 الصفحة

A. تقترح مؤسسة اقتصادية عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ $10000\ DA$ في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر بـ 10% نسمي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n \geq 1)$.

1. أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 ، u_7 .
2. عين علاقة بين u_{n+1} و u_n .

B. تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ $10000\ DA$ الشهر الأول و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـ $1200\ DA$ بعد كل سنة نسمي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .

نرمز بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n \geq 1)$.

1. أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 ، v_7.
2. عين علاقة بين v_{n+1} و v_n .
3. يريد موظف أن يتعاقد مع إحدى الشركتين لمدة 7 سنوات . أي العقدين أكثر فائدة ؟

الجواب: *A*.

$u_1 = 10000\ DA$

$u_2 = u_1 + 0,1u_1 = 1,1u_1 = 11000\ DA$

$u_3 = u_2 + 0,1u_2 = 1,1u_2 = (1,1)^2 u_1 = 12100\ DA$

$u_4 = u_3 + 0,1u_3 = 1,1u_3 = (1,1)^3 u_1 = 13310\ DA$

$u_5 = u_4 + 0,1u_4 = 1,1u_4 = (1,1)^4 u_1 = 14641\ DA$

$u_6 = u_5 + 0,1u_5 = 1,1u_5 = (1,1)^5 u_1 = 16105\ DA$

$u_7 = u_6 + 0,1u_6 = 1,1u_6 = (1,1)^6 u_1 = 17715,61\ DA$

ومنه: $\boxed{u_{n+1} = u_n + 0,1u_n = 1,1u_n = (1,1)^n u_1}$

B.

$v_1 = 10000\ DA$

$v_2 = v_1 + 1200 = 11200\ DA$

$v_3 = v_2 + 1200 = 12400\ DA$

$v_4 = v_3 + 1200 = 13600\ DA$

$v_5 = v_4 + 1200 = 14800\ DA$

$v_6 = v_5 + 1200 = 16000\ DA$

$v_7 = v_6 + 1200 = 17200\ DA$

ومنه : $\boxed{v_{n+1} = v_n + 1200}$

لنجمع حدود كل متتالية: $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = \boxed{94871,61.DA}$

$S' = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = \boxed{95200.DA}$

نلاحظ أن : $\boxed{S' > S}$ ومنه العقد الثاني أفضل من العقد الأول

التفسير الرياضي للظاهرة: العقد *A* يتناول متتالية هندسية أساسها 1,1 وحدها الأول u_1

العقد *B* يتناول متتالية حسابية أساسها 1200 وحدها الأول v_1

1. المتتاليات العددية.

تعريف: متتالية عددية حقيقية (u_n) هي دالة معرفة كمايلي: $(u_n): I \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ، $n \to u_n$

ترميز: (u_n) **هو رمز المتتالية** ، n هو رمز الدليل ، u_n هو رمز الحد العام

إختصار الكتابة : بدلا من الكتابة $(u_n): I \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ، $n \to u_n$ نكتب مثلا : $(u_n)_{n\geq 1}$ أو $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

أمثلة: • المتتالية (u_n) حيث : $u_n = -5n^2 + 2$ معرفة على $\mathbb{N}$.

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ ،

6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b $(b \in \mathbb{N})$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $\boxed{b-a+1}$.

2.طرق توليد متتالية عددية.(يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

● **توليد متتالية عددية بالحد العام:**

مثال: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = -n^2 + 3$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد من الحدود .

$u_0 = 3$ ، $u_1 = 2$ ، $u_2 = -1$

الدالة المرفقة : يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f ونكتب $u_n = f(n)$ حيث $f: x \mapsto -x^2 + 3$.

● **توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:** **مثال:** نعتبر المتتالية (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$.

لدينا $u_0 = 5$ و منه $u_1 = 3u_0 + 4 = 19$ ، $u_2 = 3u_1 + 4 = 61$ نسمي العلاقة $u_{n+1} = 3u_n + 4$ بعلاقة تراجعية

3. التمثيل البياني لمتتالية عددية:

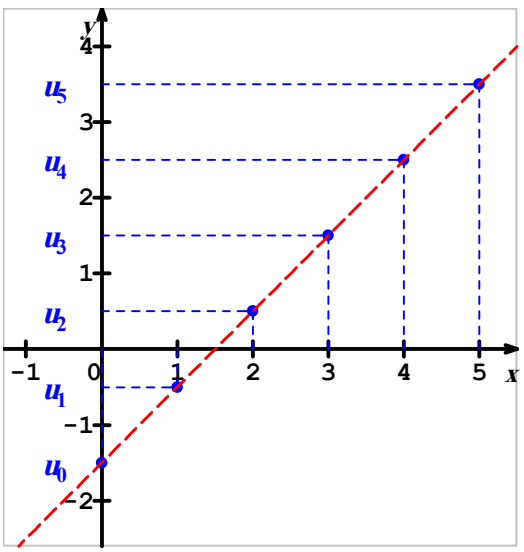
في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ التمثيل البياني لمتتالية (u_n) **هو مجموعة النقط** $M_n(n;u_n)$

وبالتالي بما أنها معرفة على $\mathbb{N}$ فإنالنقطة $M_{1,5}(1,5;u_{1,5})$ غيرموجودة ومنه التمثيل عبارة عن غيمة نقط **nuages de points**

أ) حالة متتالية معرفة بحدها العام: **مثال:** المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = n - 1,5$ ومنه:

n	0	1	2	3	4	5
u_n	$-1,5$	$-0,5$	$0,5$	$1,5$	$2,5$	$3,5$

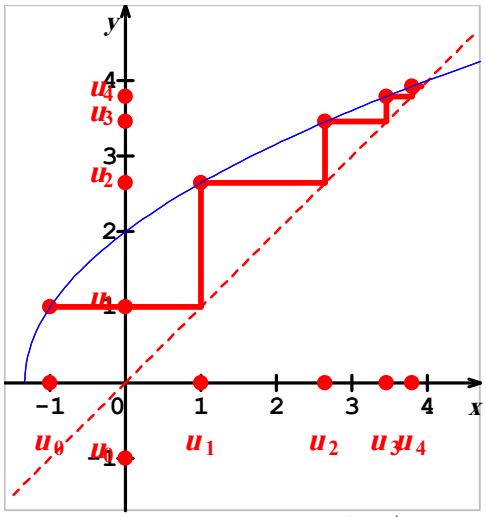
النقط: $M_0(0;-1,5)$ ، $M_1(1;-0,5)$ ، $M_2(2;0,5)$ ، $M_2(3;1,5)$ ، $M_4(4;2,5)$ ، $M_5(2;3,5)$



ب) حالة متتالية معرفةعلاقة ترجعية: **مثال:** $(u_n):\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4} \end{cases}$

الخطوات:

1. نعتبر الدالة المرفقة إلى هذه المتتالية و معرفة كمايلي : $f:x\mapsto f(x)=\sqrt{3x+4}$
2. نرسم التمثيل البياني (C_f) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$
3. نرسم النصف الأول $(\Delta):y=x$
4. نعلم الحد الأول u_0 على حامل محور الفواصل
5. نستعمل البيان (C_f) لإنشاء $u_1=f(u_0)$ على محور التراتيب
6. ننقل u_1 على محور الفواصل باستعمال المنصف الأول
7. نستعمل البيان (C_f) لإنشاء $u_2=f(u_1)$ على محور التراتيب
8. ننقل u_2 على محور الفواصل باستعمال المنصف الأول وهكذا ....



4. اتجاه تغير متتالية عددية:

1. متتالية متزايدة: تكون متتالية (u_n) متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0

إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي $n\geq n_0$

2. متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0

إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي $n\geq n_0$

3. متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$.

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq n_0$

4. متتالية رتيبة: المتتالية **الرتيبة** على مجال I من $\mathbb{N}$ هي متتالية **متزايدة** على المجال I من $\mathbb{N}$ أو **متناقصة** I من $\mathbb{N}$

5. طرق دراسة اتجاه تغير متتالية عددية:

أ) دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$:

مثال: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بحدها العام : $u_n=\frac{1}{n}$

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى
2. أعطي تخمينا حول اتجاه تغيرها
3. برهن على صحة تخمينك

الجواب: $u_1=1$ ، $u_2=\frac{1}{2}$ ، $u_3=\frac{1}{3}$ **التخمين:** يبدوا أن المتتالية متناقصة تماما

لنحسب الفرق: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)}<0$ ومنه المتتالية متناقصة تماما

ب) المقارنة بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و العدد 1: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **ذات الحدود الموجبة تماما**

- إذا كان لكل $n\geq n_0$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة
- إذا كان لكل $n\geq n_0$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$ إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة

مثال: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بحدها العام : $u_n=\dfrac{2^n}{n}$ أدرس اتجاه تغيرها

الجواب: نلاحظ أن $n\in\mathbb{N}^*$ فإن : $\dfrac{2^n}{n}>0$ إذن جميع الحدود موجبة تماما

لنحسب :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}}=\frac{2^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{2^n}=\frac{2n}{n+1}$$

لدينا $n\in\mathbb{N}^*$ ومنه $n\geq 1$ وبإضافة n على الطرفين ينتج : $2n\geq n+1$

و بقسمة الطرفين على $(n+1)$ ينتج لدينا: $\dfrac{2n}{n+1}\geq 1$ ومنه: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ وعليه المتتالية متزايدة إبتداءا من الحد الأول

جـ) استعمال اتجاه تغير الدالة المرفقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية معرفة بدستور $f(n)$ يمكن الإعتماد على المبرهنة التالية

مبرهنة: لتكن متتالية (u_n) معرفة بالعلاقة $f(n)$ حيث f هي دالة معرفة على الأقل على $[a;+\infty[$ (أو $]a;+\infty[$)
حيث $a\in\mathbb{R}^+$ و n_0 هو العدد الطبيعي الأول الأكبر من a
إذا كانت الدالة f رتيبة على $[a;+\infty[$ (أو $]a;+\infty[$) إذا المتتالية (u_n) رتيبة إبتداءا من الرتبة n_0
ولها نفس اتجاه تغير الدالة f

مثال: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بحدها العام : $u_n=\dfrac{1}{n}$ أدرس اتجاه تغيرها

الجواب: لتكن f دالة معرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ وهي الدالة مقلوب و هي متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

ومنه: المتتالية متناقصة تماما

ملاحظة هامة : عكس المبرهنة خاطئ

مثال مضاد: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها العام : $u_n=n+\sin(2\pi n)$

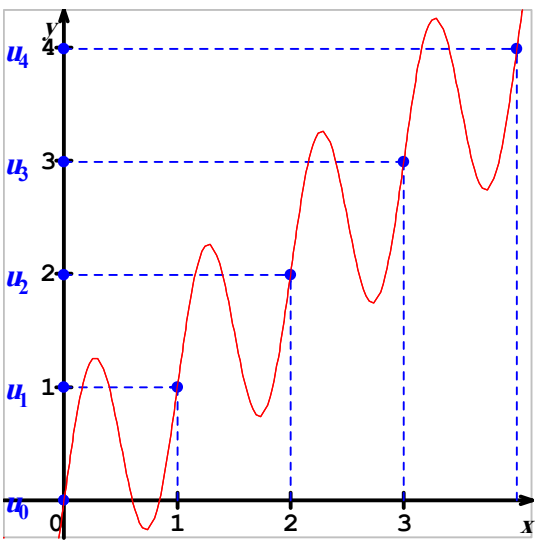
أدرس اتجاه تغيرها ثم ادرس اتجاه تغير الدالة المرفقة

الجواب: لدينا لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $\sin(2\pi n)=0$ ومنه: $u_{n+1}-u_n=(n+1)-n=1>0$ وعليه المتتالية متزايدة تماما

ولكن الدالة $f(x)=x+\sin(2\pi x)$ المعرفة على $[0;+\infty[$

لنرسم بيانها و نرى اتجاه تغيرها ونمثل في نفس الوقت المتتالية

نلاحظ أن الدالة ليست رتيبة بينما المتتالية متزايدة تماما



تطبيقات:

التمرين01: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها العام : $u_n = 2n^2 + n - 3$

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى
2. عين الحد السابع
3. هل العدد **2015** حدا من حدودها
4. أحسب u_{n-1} ، u_{n+1} ، $u_n + 1$ ، u_{3n-1}
5. حل في $\mathbb{N}$ المعادلة $u_n = 207$

التمرين02: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول والعلاقة التراجعية كمايلي: $(u_n): \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 4 \end{cases}$

1. أحسب الحدود الأربعة لأولى
2. عبر عن $u_{n+1} - u_n$ بدلالة u_n
3. لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي: $v_n = u_n + 4$
   - أحسب الحدود الأربعة لأولى من حدود المتتالية (v_n)
   - عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

التمرين03: أدرس اتجاه تغير المتتاليات التالية : $u_n = \dfrac{1}{n+2} \quad / n \in \mathbb{N}$ ، $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3} \quad / n \in \mathbb{N}$

$w_n = n - n^2 \quad / n \in \mathbb{N}$ ، $k_n = 3^n \quad / n \in \mathbb{N}$ ، $p_n = n + \dfrac{1}{n} \quad / n \in \mathbb{N}^*$

التمرين04: لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بحدها العام : $u_n = \dfrac{2n}{n^2}$

1. أحسب الحدود الأربعة لأولى
2. نريد أن نبرهن أن المتتالية متزايدة ابتداءا من الرتبة $n = 3$
   - حل المتراجحة $\dfrac{2x^2}{(x+1)^2} > 1$
   - بين أن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n^2}{(n+1)^2}$
   - استنتج مايمكن استنتاجه

التمرين05: نعتبر المتتاليات التالية: $(u_n): \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$ ، $(v_n): \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_n}{v_n + 1}\right) \end{cases}$ ، $(w_n): \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \dfrac{2w_n + 3}{w_n + 4} \end{cases}$

لكل متتالية:

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى
2. أرسم التمثيل البياني **" حلزوني"** في معالم مختلفة
3. أعطي تخمينا حول اتجاه تغير كل متتالية و ماذا يحدث لو أخذ العدد n قيما كبيرة

التمرين06: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها العام : $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 5n + 6}$

1. أحسب الحدود الثلاثة الأولى
2. أدرس اتجاه تغيرها
3. بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{a}{n+2} + \dfrac{b}{n+3}$
4. استنتج قيمة المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_3 + \ldots + u_n$

المتتاليات العددية

① المتتاليات الحسابية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{u_{n+1}-u_n=r}$ أي $\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$

نتيجة: ☜ $r<0$ المتتالية متناقصة تماما ☜ $r>0$ المتتالية متزايدة تماما ☜ $r=0$ المتتالية ثابتة

مثال01: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=-5n+4$

1. برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب أساسها وحدها الأول
2. استنتج اتجاه تغيرها
3. هل العدد -2012 حدا من حدودها

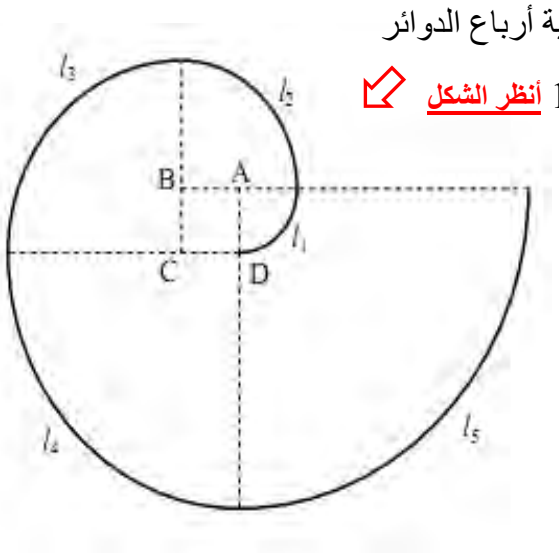
الجواب: 1. لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\left[-5(n+1)+4\right]-\left[-5n+4\right]=-5$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ وحدها الأول $u_0=4$

2. $r<0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

3. $-5n+4=-2012\Leftrightarrow n=\dfrac{2016}{5}\notin\mathbb{N}$ ومنه العدد -2012 ليس حدا من حدودها

مثال02: حلزونية الأقواس نعتبر المربع $ABCD$ طول ضلعه 1 و متتالية أرباع الدوائر ذات المراكز $A,B,C,D,A,B,.....$ و أنصاف أقطارها $1,2,3,4,5,6,.....$ أنظر الشكل



1. برهن أ، الأطوال $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ لأقواس الدوائر هي متتالية حسابية يطلب أساسها

الجواب : **تذكير:** طول دائرة نصف قطرها r هو $2\pi r$

إذن طول ربع دائرة نصف قطرها n هو $\boxed{l_n=\dfrac{1}{4}2\pi n=\dfrac{\pi}{2}n}$

$$l_{n+1}-l_n=\frac{\pi}{2}(n+1)-\frac{\pi}{2}n=\frac{\pi}{2}$$

الأطوال $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ لأقواس الدوائر هي متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{\pi}{2}$

الحد العام لمتتالية حسابية :

1. **تبدأ بـ u_0:** $\boxed{u_n=u_0+nr}$ 2. **تبدأ بـ u_1:** $\boxed{u_n=u_1+(n-1)r}$ 3. **تبدأ بـ u_p:** $\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

(الحد الأخير +الحد الأول) $\times$ عدد الحدود / 2 = المجموع ، عدد الحدود =(الدليل الأخير –الدليل الأول) +1

مثال01: أحسب المجاميع التالية

$$S_1=u_0+u_1+u_2+.....+u_{30}$$
$$S_2=u_2+.....+u_{45}$$
$$S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$$
$$S=u_p+u_1+u_2+.....+u_n$$

الجواب:

$$S_1=u_0+u_1+u_2+.....+u_{30}=\frac{31}{2}\left[u_0+u_{30}\right]$$
$$S_2=u_2+u_3+u_4+.....+u_{45}=\frac{44}{2}\left[u_2+u_{45}\right]$$
$$S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n=\frac{n+1}{2}\left[u_0+u_n\right]$$
$$S=u_p+u_1+u_2+.....+u_n=\frac{n-p+1}{2}\left[u_p+u_n\right]$$

تمرين01: نعتبر المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات الأساس 3 و علما بأن $u_{11}=21$

1. أوجد حدها الأول
2. أكتب عبارة u_n بدلالة n
3. أحسب المجاميع التالية : $S_1=u_0+u_1+u_2+.....+u_{30}$

$S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

الجواب:

1. $u_0=u_{11}+(0-11)r \Leftrightarrow u_0=21-11\times 3=-12$
2. $u_n=u_0+nr=-12+3n$
3. $S_1=u_0+u_1+u_2+.....+u_{30}=\frac{31}{2}[u_0+u_{30}]=\frac{31}{2}[-12+78]=1023$

$$S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n=\frac{n+1}{2}[u_0+u_n]=\frac{n+1}{2}[-24+3n]$$

تمرين02: نعتبر المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ والمعرفة بـ: $u_{11}=27$ و $u_{17}=39$

1. عين أساسها و حدها الأول
2. أكتب عبارة u_n بدلالة n
3. أحسب المجموع بدلالة n : $S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$

الجواب:

1. $\begin{cases}u_{17}=39\\u_{11}=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_0+17r=39\\u_0+11r=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6r=12\\u_0=27-11r\end{cases}$ بالطرح طرف بطرف

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\u_0=5\end{cases}$$

2. $u_n=u_0+nr=5+2n$
3. $S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n=\frac{n+1}{2}[u_0+u_n]=\frac{n+1}{2}[10+2n]=(n+1)(5+n)$

الوسط الحسابي: كل ثلاث حدود متتابعة $a\ ,b\ ,c$ من متتالية حسابية فإن: $a+c=2b$

لأن : $a+c=(b-r)+(b+r)=2b$

مثال: عين ثلاث حدود متتابعة $a\ ,b\ ,c$ من متتالية حسابية علما بأن مجموعهم 12 و جداؤهم 28

الجواب: $\begin{cases}a+b+c=12\\a\times b\times c=28\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}b-r+b+b+r=12\\(b-r)b(b-r)=28\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}b=4\\(4-r)4(4-r)=28\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}b=4\\16-r^2=7\end{cases}$

إذن $r=3$ أو $r=-3$ وبالتالي: $r=3\begin{cases}a=1\\b=4\\c=7\end{cases}$ أو $r=-3\begin{cases}a=7\\b=4\\c=1\end{cases}$

4.المتتاليات الهندسية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ أو $u_{n+1}=qu_n$ بفرض الحدود غير معدومة

نتيجة: ☜ $0<q<1$ المتتالية متناقصة تماما ☜ $q>1$ المتتالية متزايدة تماما ☜ $q=1$ المتتالية ثابتة

ملاحظة: لما $q<0$ المتتالية ليست رتيبة مثال: متتالية هندسية $q=-2$ $1\ ;-2\ ;4\ ;-8\ ;16\ ;\ldots\ldots$

☙ الحد العام لمتتالية هندسية:

1. **تبدأ بـ u_0:** $u_n=u_0q^n$
2. **تبدأ بـ u_1:** $u_n=u_1q^{(n-1)}$
3. **تبدأ بـ u_p:** $u_n=u_pq^{(n-p)}$

☙ مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

(عدد الحدود (الأساس)-1) × الحد الأول = المجموع ، 1+ (الدليل الأول – الدليل الأخير)= عدد الحدود
(الأساس)-1

مع $q\neq1$ و إذا كان $q=1$ فإن $S=(n+1)u_0$.

مثال: $S=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ مع $q\neq1$

تمرين01:

1. $u_n=\frac{2^{n+1}}{3^n}$ هو حد عام لمتتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ لأن $q=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{2^{n+1}}=\frac{2}{3}$
2. $u_n=(-5)^{n+1}$ هو حد عام لمتتالية هندسية أساسها $q=-5$ لأن $q=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-5)^{n+2}}{(-5)^{n+1}}=-5$

تمرين02: نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات الأساس 2 و علما بأن $u_9=64$

1. أوجد حدها الأول
2. أكتب عبارة u_n بدلالة n
3. أحسب المجاميع التالية : $S_1=u_0+u_1+u_2+\ldots..+u_{30}$

$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots..+u_n$ بدلالة n

الجواب:

1. $u_0=u_9q^{0-9}=64\times2^{-9}=\frac{64}{2^9}=\frac{64}{8\times68}=\frac{1}{8}$
2. $u_n=\frac{2^n}{8}=2^{n-3}$
3. $S_1=u_0+u_1+u_2+\ldots..+u_{30}=\frac{1}{8}\left[\frac{1-2^{30}}{1-2}\right]=\frac{1}{8}\left[2^{30}-1\right]$

$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots..+u_n=\frac{1}{8}\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]=\frac{1}{8}\left[2^{n+1}-1\right]$

الوسط الهندسي: كل ثلاث حدود متتابعة $a\ ,b\ ,c$ من متتالية هندسية فإن: $a\times c=b^2$ لأن : $a\times c=(\frac{b}{q})\times(b\times q)=b^2$

ملاحظة هامة:

☙ كل حد عام من الشكل $u_n=an+b$ مع $a\neq0$ هو حد عام لمتتالية حسابية أساسها $r=a$

☙ كل حد عام من الشكل $u_n=ab^n$ مع $b\neq0$ هو حد عام لمتتالية حسابية أساسها $q=b$

تقارب متتالية عددية:

نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ و α عدد حقيقي

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة

نتيجة:

حالة متتالية حسابية:

1. إذا كان $r>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. إذا كان $r<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

☞ في كلتا الحالتين تكون المتتالية (u_n) متباعدة

حالة متتالية هندسية:

- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q\le -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة)

مثال01:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right) = \frac{3}{2}$ إذن: المتتالية ذات الحد العام $u_n = \frac{3n+1}{2n+5}$ هي متتالية متقاربة
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n+5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}n\right) = +\infty$ إذن: المتتالية ذات الحد العام $u_n = \frac{3n^2+1}{2n+5}$ هي متتالية متباعدة

مثال02: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

و $v_n = u_n + 3$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n , $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .
2. عين نهاية لكل من المتتاليات (u_n) , (s_n) و (t_n)
3. مثل بيانيا الحدود الأربعة الأولى من المتتالية (u_n)

الجواب: 1. $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\frac{1}{3}u_n-2+3=\frac{1}{3}u_n+1=\frac{1}{3}(u_n+3)=\frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=5$ ومنه حدها العام يكتب على الشكل: $v_n=v_0q^n=5\left(\frac{1}{3}\right)^n$

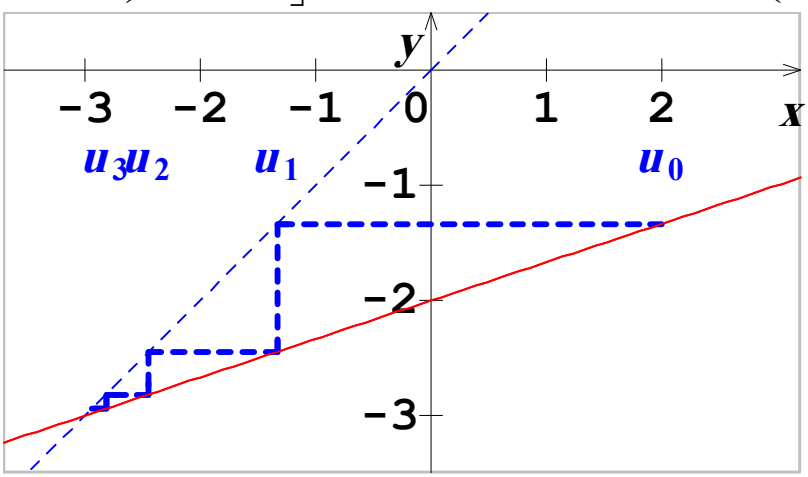
حساب المجاميع:

$$s_n=\underbrace{v_0+v_1+\ldots+v_n}_{\text{متتالية هندسية}}=5\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{15}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

لدينا $v_n=u_n+3$ و منه $u_n=v_n-3$ إذن $t_n=s_n-3(n+1)$ و منه $t_n=\frac{15}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)-3(n+1)$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ متتالية متقاربة

$\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{15}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)=\frac{15}{2}$ و كذالك $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{15}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)-3(n+1)\right]=-\infty$



التمرين01:

① u_1هو الحد الأول ، u_n هو الحد العام ، r هو أساس المتتالية و S_nهو مجموع n حدا أولى من متتالية حسابية **أحسب:**

1. u_n و S_n علما أن : $u_1=7$ و $n=120$ و $r=5$
2. u_1 و S_n علما أن : $u_n=326$ و $n=72$ و $r=2$
3. r و S_n علما أن : $u_1=397$ و $u_n=64$ و $n=1000$
4. u_n و n علما أن : $u_1=50$ و $r=-4$ و $S_n=330$
5. r و n علما أن : $u_1=-3$ و $u_n=6$ و $S_n=28,5$
6. u_1 و u_n علما أن : $S_n=270$ و $n=54$ و $r=4$

② u_1هو الحد الأول ، u_n هو الحد العام ، q هو أساس المتتالية و S_nهو مجموع n حدا أولى من متتالية هندسية **أحسب:**

1. u_n و S_n علما أن : $u_1=2$ و $n=5$ و $q=3$
2. q و S_n علما أن : $u_1=162$ و $u_n=32$ و $n=5$
3. u_1 و S_n علما أن : $u_n=54$ و $q=3$ و $n=4$
4. u_1 و u_n علما أن : $n=7$ و $q=0,5$ و $S_n=571,5$
5. q و n علما أن : $u_1=48$ و $u_n=243$ و $S_n=633$

التمرين02:

① نعتبر المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي $u_n=3n-5$ و $v_n=-7n+2$

1. أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)
2. بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) حسابيتين يطلب تعيين أساسيهما و حديهما الأولين
3. أحسب بدلالة n المجاميع التالية: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: $(v_n):\begin{cases}v_0=0\\ v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+3./\,n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

1. أحسب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3
2. مثل الحدود السابقة في معلم متعامد و متجانس
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=v_n-4$ برهن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول
4. عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n$ ماذا تستنتج
5. أحسب بدلالة n المجاميع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ثم $S_n'=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n
6. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n'$

التمرين03: (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_{15}=65$ و $u_{24}=101$

1. عين أساسها و حدها الأول
2. عبر عن u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$
3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$
4. عين n إن وجدت حتى يكون $S_n=102$

التمرين04: (v_n) متتالية هندسية أساسها موجب معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_3=24$ و $u_5=96$

1. عين أساسها و حدها الأول
2. عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n$
3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين05:

① لتكن a ، b ، c ، d و e خمسة حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها r حيث: $\begin{cases} a+b+d+e=60 \\ d+e=42 \end{cases}$

1. عبر عن a ، b ، d و e بدلالة : c و r
2. عين الحدود a ، b ، c ، d و e

② 1. عين الحدود المتتابعة v_0 ، v_1 ، v_2 ، v_3 من متتالية حسابية علما بأن مجموعهم 16 و جداؤهم 105

2. عين الحدود المتتابعة v_1 ، v_2 ، v_3 من متتالية هندسية علما بأن مجموعهم 777 و جداؤهم 343000

التمرين06: (u_n) متتالية هندسية أساسها $q>1$ معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_1 \times u_3 = 144 \\ u_1+u_2+u_3=63 \end{cases}$

1. عين u_1 ، u_2 ، u_3
2. عبر عن u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$
3. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

التمرين07: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي: $(u_n): \begin{cases} u_0 = \dfrac{10}{3} \\ 9u_n+3u_{n-1}=4 \ / \ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n + \dfrac{1}{3}$ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول
3. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ ماذا تستنتج
4. أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_n$ ثم $S_n' = u_0+u_1+\ldots+u_n$ بدلالة n
5. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n'$

التمرين08: ليكن a ، b عددان حقيقيان بحيث:

1. $(a\ ;\ a+4b\ ;\ 5a+2b)$ حدود متتابعة من متتالية حسابية
2. $(6a+b\ ;\ a+1\ ;\ b+3)$ حدود متتابعة من متتالية هندسية

عين العددين a ، b

التمرين09: ① (u_n) متتالية حسابية متزايدة بحيث: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=9 \\ u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}=63 \end{cases}$

1. عين أساسها r و حدها الأول u_0
2. عبر عن u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$
3. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: $v_n = 2^{u_n}$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها q و حدها الأول v_0
2. أحسب بدلالة n المجاميع $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_n$
3. أحسب بدلالة n الجداء $P = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين10: نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: $(v_n):\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+5. \end{cases} / n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\alpha v_n-10$ حيث α عدد حقيقي
   - عين قيمة α تكون (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول
   - عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ ماذا تستنتج
   - أحسب بدلالة n المجاميع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ثم $S_n'=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n

التمرين11: نعتبر المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي: $u_n=\frac{2^n-4n+3}{2}$ و $v_n=\frac{2^n+4n-3}{2}$

نضع : $d_n=u_n-v_n$ و $w_n=u_n+v_n$

1. برهن أن: (d_n) متتالية حسابية يطلب أساسها و حدها الأول
2. برهن أن: (w_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول
3. استنتج $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و $S_n'=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين12: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي: $(u_n):\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases} / n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب الحدين u_1 ، u_2
2. هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية؟
3. مثل الحدود السابقة في معلم متعامد و متجانس وماهو تخمينك حول اتجاه تغيرها
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=1+\frac{2}{u_n}$ بحيث $u_n\neq 0$
   - أحسب الحدود v_0 ، v_1 ، v_2
   - عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n ثم استنتج أن (v_n) متتالية حسابية يطلب أساسها
   - عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ ماذا تستنتج
   - أحسب بدلالة n المجاميع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين13: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي: $(u_n):\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1 \end{cases} / n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب الحدين u_1 ، u_2
2. نعتبر المتتالية (v_n) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-2n+6$
   - أحسب الحدود v_0 ، v_1 ، v_2
   - عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n ثم استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها
   - عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ ماذا تستنتج
   - أحسب بدلالة n المجاميع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ثم $S_n'=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n

التمرين14: عند اختراق شعاع الضوء من مصباح لقطعة زجاج ملونة يفقد 23% من تواتره

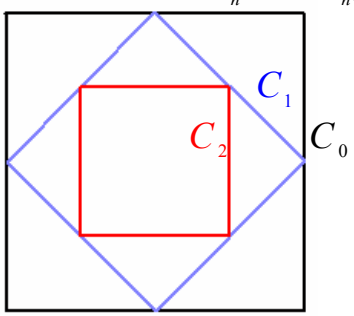
1. نسمي I_0 تواتر الشعاع قبل دخول الزجاجة و I_1 تواتر الشعاع عند الخروج من الزجاجة عبر عن I_1 بدلالة I_0
2. نفرض n قطعة زجاج متقايسة و I_n تواتر الشعاع عند الخروج من الزجاجة رقم n
   - عبر عن I_n بدلالة I_{n-1}
   - ما طبيعة المتتالية (I_n) ثم أعطي عبارة I_n بدلالة I_0 و n
   - ماهو اتجاه تغير المتتالية (I_n)
3. ماهو التواتر الأولي للشعاع إذا علمت أنه اخترق أربعة قطع زجاج و تحصلنا على تواتر يساوي 15
4. ماهو العدد الأدنى لقطع الزجاج حتى يكون التواتر الخارج أقل من ربع التواتر الداخل

التمرين15: **من مربع إلى مربع :**

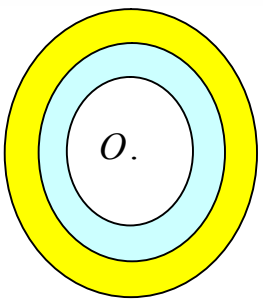
1. أحسب طول قطر مربع طول ضلعه a

في البداية لدينا مربع C_0 طول ضلعه $u_0 = 1cm$

2. نوصل بين منتصفات أضلاعه لنحصل على مربع C_1 طول ضلعه هو u_1 أحسب u_1
3. نوصل بين منتصفات أضلاع C_1 لنحصل على مربع C_2 طول ضلعه هو u_2 أحسب u_2 ..... **أنظر الشكل**
4. عبر عن u_3 بدلالة u_2 ثم عن u_6 بدلالة u_5
5. نعتبر المربعين C_n و C_{n+1} طول ضلعيهما u_n و u_{n+1} على الترتيب عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n
6. عبر عن u_6 بدلالة u_0 ثم استنتج u_n بدلالة u_0
7. أحسب مجموع 5 حدود أولى



التمرين16: نعتبر الدوائر (c_1) ، (c_2) ، ..... (c_n) ذات نفس المركز O وأنصاف أقطارها 1، 2 ، .... n



نسمي A_1 مساحة الحلقة المحصورة بين (c_1) و (c_2)

نسمي A_2 مساحة الحلقة المحصورة بين (c_2) و (c_3)

وهكذا نسمي A_n مساحة الحلقة المحصورة بين (c_n) و (c_{n+1})

نضع: $d_n = A_{n+1} - A_n$

1. أحسب : d_1 ، d_2 ، d_3
2. بين أن لكل $n \geq 1$ فإن: d_n مستقل عن n
3. استنتج طبيعة المتتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ محددا عناصرها

التمرين17:

1. أحسب المجاميع التالية: $S_0 = 1+2+3+...+100$

$$S_1 = 3+5+7+...+199$$

$$S_2 = -1+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+3+\frac{16}{3}+...+99$$

2. نضع: $S = \frac{1}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{3}{5\times 7}+...+\frac{1}{99\times 101}$

والمتتالية (u_n) بحيث لكل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

- عين العدد الحقيقي a بحيث: $u_n = \frac{a}{2n+1} - \frac{a}{2n+3}$
- استنتج قيمة المجموع S



التمرين18: قمنا بتنظيم مجموعة من الأنابيب على الشكل التالي:

1. ماهو عدد الأنابيب لو كان تنظيمهم في 5 طبقات ثم في 12 طبقة
2. نريد تنظيم 153 أنبوب كم طبقة نحصل عليها
3. لتنظيم 200 أنبوب كم طبقة نحصل عليها و ماهو عدد الأنابيب الباقية لدينا

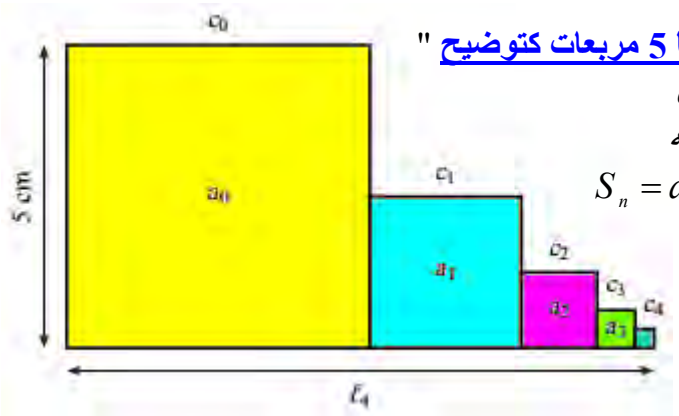
تطبيقات للتعمق

التمرين19: **نريد حساب المجموع التالي:** $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$

1. باستعمال مجدول Excel أعطي قيمة S
2. نعتبر كثير الحدود P من الدرجة الثالثة حيث : $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

- عين المعاملات : a ,b ,c d بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n+1) - P(n) = n^2$
- استنتج أن : $S = P(101) - P(0)$
- تحقق من نتيجة السؤال الأول

التمرين20: لدينا n مربع مرسومة كما في الشكل التالي " **رسمنا 5 مربعات كتوضيح** "



المربع الأول طول ضلعه $c_0 = 5\,cm$ ومساحته a_0

و كل مربع يلي طول ضلعه نصف طول ضلع الذي قبله

نضع $l_n = c_0 + c_1 + c_3 + ... + c_n$ و $S_n = a_0 + a_1 + a_3 + ... + a_n$

1. أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليتين (l_n) و (S_n)
2. أ) عبر عن l_n و S_n بدلالة n

ب) هل يوجد عدد p بحيث $l_p \geq 10$

التمرين21: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $u_n = 8 - \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{a}{2^n}$ مع $a \in \mathbb{R}$

1. بين أن $u_0 = a$
2. أعطي قيمة تقريبية للحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية من أجل $a = 2$ ، $a = 4$ ثم $a = 8$
3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{8-a}{2^{n+1}}$

ب(استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)و ذالك حسب قيم a

قال عماد الأصفهاني:

رأيت انه لا يكتب إنسان كتابا في يومه إلا قال في غده لو غير هذا لكان أحسن ولو زيد كذا لكان يستحسن ولو قدم هذا لكان أفضل ولو ترك هذا لكان أجمل وهذا من أعظم العبر وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر..

وأخيراَ بعد أن تقدمنا باليسير في هذا المجال الواسع

آملين أن ينال القبول ويلقى الاستحسان..

من إخواني الأساتذة و أخواتي الأستاذات

وصل اللهم وسلم على سيدنا وحبيبنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم....

أخوكم فى الله الأستاذ : باي زواوي

أطلب منكم دعاءا في ظهر الغيب