ملخص كثيرات الحدود

مع مجموعة من التمرينات

الدوال كثيرات الحدود : نسمي دالة كثيرة حدود كل دالة p معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي يسمى درجة كثيرة الحدود و a_0 ، a_1 ، ..... ، a_n هي أعداد حقيقية ثابتة تسمى بالمعاملات .

عمليات على كثيرات الحدود :

مجموع و فرق و جداء كثيرات الحدود هو كثيرات حدود .

جداء كثيري حدود غيرمعدومين درجتاهما n و m على الترتيب هو كثير حدود درجته $n+m$.

يكونا كثيري حدود متساويان إذا وفقط إذا كان من نفس الدرجة و كانت المعاملات من نفس الدرجة متساوية .

تحليل كثير حدود :

✓ العدد α الذي يحقق $p(\alpha)=0$ يسمى جذراً لكثير الحدود p .

✓ إذا كان α هو جذر لكثير الحدود أي يحقق : $p(\alpha)=0$ فإنه يوجد كثير حدود Q وحيد بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x)=(x-\alpha).Q(x)$.

المعادلات من الدرجة الثانية :

تعريف : نسمي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x كل معادلة من الشكل : $ax^2+bx+c=0$ ، حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة و $a \neq 0$.

العدد $\Delta = b^2-4ac$ يسمى المميز .

طريقة حل معادلة من الدرجة الثانية :

نحسب المميز Δ نتحصل على ثلاثة حالات :

1) إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين هما :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ، \quad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

و إشارته تكون من الشكل :

حيث : $x_1 < x_2$

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a	مخالف لإشارة a	موافق لإشارة a

✓ و تحليل عبارتها يكون من الشكل $a(x-x_1)(x-x_2)$.

2) إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل جذراً (حلا) مضاعفاً هو : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

إشارته تكون من الشكل :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a		موافق لإشارة a

✓ و تحليل عبارتها يكون من الشكل $a(x-x_1)^2$.

3) إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ ليست لها حلول ، ولا يوجد لها تحليل .
إشارته تكون من الشكل :

x	$-\infty$	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a	

التمرين الأول

نعتبر كثير الحدود p المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $p(x)=x^3-3x^2+4x-2$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير :

1) العدد (-1) هو جذرا لـ $p(x)$. 2) $p(3)=0$.

3) $p(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$. 4) p له ثلاثة جذور .

التمرين الثاني

1) عيّن كثير حدود h من الدّرجة الثانية مُعرّف على $\mathbb{R}$ ويُحقّق: $h(x+1)-h(x)=x$.

2) ليكن f و g كثيرا حدود معرّفين على $\mathbb{R}$ ب:

$g(x)=x^2+2x-3$ و $f(x)=(h\circ g)(x)$.

أ) أحسب $f(x)$ بدلالة x.

ب) أثبت أنّ العددين -3 و 1 جذران لـ f.

ج) حلل f إلى جداء كثيري حدود من الدّرجة الثانية.

د) عيّن حلول المعادلة $f(x)=0$.

التمرين الثالث

نعتبر كثير الحدود P المعرّف على $\mathbb{R}$ بـ: $P(x)=x^3-5x^2+3x+1$، نفرض أنّ P يقبل ثلاث جذور حقيقيّة نرمز لها بـ α، β و γ حيث α و γ مترافقان و α هو الجذر السّالب.

1) أثبت أنّ $\alpha+\beta+\gamma=5$، $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=3$ و $\alpha\beta\gamma=1$.

2) أحسب $P(1)$، ماذا تستنتج؟

3) أكتب P على الشكل $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ حيث a، b و c أعداد حقيقيّة يُطلب تعيينها.

4) عيّن كل جذور كثير الحدود P.

التمرين الرابع

نعتبر كثير الحدود من الدرجة الثانية : $p(x)=ax^2+bx+c$

عين الأعداد الحقيقية a، b و c و التي تحقق الشرطين :

✓ $p(x)$ ينعدم من أجل القيمتين 1، 2 .

✓ $p(-1)=-18$

التمرين الخامس

نعتبر كثير الحدود p المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $p(x)=x^3+4x^2+x-6$

1) أحسب $p(-3)$.

2) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $p(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$

3) عين كل جذور كثير الحدود p .

التمرين السادس

بيّن أن العدد α هو جذر لكثير الحدود ثم استنتج تحليله في كل حالة من الحالات الاتية :

1) $p(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 2$ ، $\alpha = -2$.

2) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$ ، $\alpha = 3$.

3) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ ، $\alpha = -1$.

التمرين السابع

a ، b عددان حقيقيان و $p(x)$ كثير الحدود حيث : $p(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 2$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث $p(2) = 0$ و $p(1) = 5$

2) استنتج تحليل بـ $p(x)$.

3) عيّن كل جذور $p(x)$.

التمرين الثامن

نعتبر كثير الحدود p المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

1) أحسب $p(1)$ ماذا تستنتج ؟

2) عين تحليل للعبارة p .

3) أدرس حسب قيم المتغير x إشارة $p(x)$.

التمرين التاسع

في كل حالةممايلي أدرس إشارة $p(x)$ ثم استنتج حل المتراجحات :

1) $p(x) = -5x^2 + 3x + 2$ ، $p(x) > 0$.

2) $p(x) = 4x^2 - 16x + 16$ ، $p(x) \geq 0$.

3) $p(x) = 3x^2 - 2x + 4$ ، $p(x) <$

4) $p(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$ ، $p(x) \leq 0$.

5) $p(x) = (x^2 - x)(x^2 + 1)(x - 1)$ ، $p(x) < 0$.

6) $p(x) = (x^2 - 1)^2(x - 5x + 6)$ ، $p(x) \geq 0$.

التمرين العاشر

في الشكل المقابل مستطيل مساحته ثمان (8) مرّات مساحة المربّع. عيّن طول ضلع المربّع.