

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين  
الموضوع الأول

التمرين الأول : ( 04 نقاط )

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

$$\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t; t \in \mathbb{R} \\ z=2+2t \end{cases}$$

لتكن النقطة  $A(-1;2;3)$  والمستقيم  $(\Delta)$  الذي تمثيله الوسيطى :

- 1 - أ) - أوجد معادلة ديكرتية للمستوي  $(P)$  العمودي على  $(\Delta)$  والمار من  $A$ .
- ب) - تحقق من أن النقطة  $B(-3;3;-4)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ .
- ج) - أحسب المسافة  $d_B$  بعد النقطة  $B$  عن المستوي  $(P)$ .
- 2- عبر عن المسافة  $d$  بين  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$  بدلالة  $d_B$  والمسافة  $AB$  ثم استنتج قيمة  $d$ .
- 3- لتكن  $M$  نقطة من المستقيم  $(\Delta)$ . عبر عن  $AM^2$  بدلالة  $t$  ثم أوجد قيمة  $d$  بطريقة ثانية.

التمرين الثانى : ( 04 نقاط )

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$$

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  كما يلي :

- 1- احسب  $u_2, u_1$
- 2- ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $0 < u_n < 4$ .
- ب) بين أن  $(u_n)$  متزايدة , ماذا تستنتج ؟
3. نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $N$  كما يلي :  $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$
- أ) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية
- ب) أكتب  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

4- احسب بدلالة  $n$  كلا من :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ .

التمرين الثالث : ( 05 نقاط )

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  كثير الحدود  $P(z)$  ذو المتغير المركب  $z$  حيث :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

- 1) أحسب  $P(2)$  ثم أوجد تحليلا لـ  $P(z)$ .
- 2) حل في  $C$  المعادلة  $P(z) = 0$ ، نسمي  $z_1$  و  $z_2$  الحلين المختلفين عن 2 حيث  $z_1$  جزؤه التخيلي موجب
- 3) أ/ تحقق أن :  $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$  ثم أكتب كل من  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسى .

- (4) في المستوي المركب المباشر المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  (الوحدة  $2cm$ )  
 نعتبر النقط  $A, B, C$  ذات اللواحق على الترتيب :  $2, z_1$  و  $z_2$  ولتكن  $I$  منتصف  $[AB]$   
 أ- علم النقط  $A, B, C$  و  $I$  .  
 ب- ما طبيعة المثلث  $OAB$  واستنتج قياسا للزاوية الموجهة  $(\vec{u}; \overline{OI})$  .  
 ج- احسب  $z_I$  لاحقة  $I$  ثم اكتب  $z_I$  على الشكل الأسّي .  
 د- باستعمال النتائج السابقة أوجد القيم المضبوطة لكل من  $\cos \frac{3\pi}{8}$  و  $\sin \frac{3\pi}{8}$  .

### التمرين الرابع : ( 07نقط)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $IR$  بـ :  $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$  و  $(c)$  تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ,  $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$   
 ب/ أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C)$   
 ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(D)$
2. أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  ,  $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$   
 ب/ احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و بين أن المستقيم  $(D')$  الذي معادلته  $y = -x + \ln 2$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C)$

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى  $(C)$  و المستقيم  $(D')$   
 3. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها

4. ارسم  $(D)$  و  $(D')$  و  $(C)$

5. نضع :  $I = \int_2^3 [f(x) - x] dx$

1- فسر هندسيا العدد  $I$

2- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0, +\infty[$  ,  $\ln(1 + x) \leq x$

3- أستنتج أن  $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$  و اعط حصر العدد  $I$  سعته  $0.02$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول : ( 04 نقاط )

$$f \text{ دالة عددية معرفة على المجال } \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \text{ بـ: } f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

(1) بين أنه إذا كان  $x > 1$  فإن  $f(x) > 1$ .

(2) نعرف المتتالية  $(u_n)$  بـ :  $u_0 = 2$  ومن أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

أ/ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 1$ .  
ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .  
ج/ استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واستنتج نهايتها  $l$ .

(3) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = \ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)$  حيث  $\ln$  يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري.

أ/ أثبت أن  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج أن :  $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$ .

(4) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ .

### التمرين الثاني : ( 05 نقاط )

(I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(E) \dots \dots \dots z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ .

(1) أثبت أن العدد 2 حل للمعادلة  $(E)$ ، ثم بين أنه يمكن كتابة  $(E)$  على الشكل  $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب حسابها.

(2) استنتج حلول المعادلة  $(E)$  ثم اكتبها على الشكل الأسّي.

(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  حيث الوحدة  $1 \text{ cm}$ .

(1) أنشئ النقط  $A, B, C$  التي لواحقها على الترتيب :  $z_A = -2 - 2i$ ،  $z_B = 2$  و  $z_C = -2 + 2i$ .

(2) احسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  حتى يكون الرباعي  $ABDC$  متوازي أضلاع. أنشئ النقطة  $D$ .

(3) لتكن  $E$  صورة  $D$  بالدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$  ولتكن  $F$  صورة  $D$  بالدوران الذي

مركزه  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

أ/ أحسب  $z_E$  و  $z_F$  لاحقتي  $E$  و  $F$ .

ب/ أنشئ النقطتين  $E$  و  $F$ .

ج/ تحقق من أن :  $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $AEF$ .

### التمرين الثالث : ( 04 نقاط )

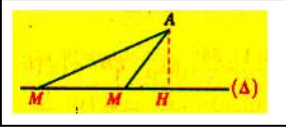
- الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .
- نعتبر النقط:  $A(0; 4; 1)$  ،  $B(1; 3; 0)$  ،  $C(2; -1; -2)$  و  $D(7; -1; 4)$ .
- (1) أثبت أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية .
- (2) ليكن المستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $D$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}(2; -1; 3)$ .
- أ/ بين أن  $(\Delta)$  عمودي على المستوي  $(ABC)$  .
- ب/ استنتج معادلة ديكرتية للمستوي  $(ABC)$  .
- ج/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  .
- د/ أوجد إحداثيات النقطة  $H$  نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(ABC)$  .
- (3) نعتبر  $(S)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10z + 14 = 0$  .
- أ/ أثبت أن  $(S)$  كرة مركزها  $\Omega(1; 2; -5)$  ونصف قطرها  $R = 4$  .
- ب/ تحقق أن  $\Omega$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  .
- ج/ برهن أن المستوي  $(ABC)$  يقطع سطح الكرة  $(S)$  وفق دائرة  $(c)$  يطلب إيجاد إحداثيات مركزها  $\omega$  ونصف قطرها  $r$  .

### التمرين الرابع : ( 07 نقاط )

- (I) لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = e^x + 2 - x$  .
1. أحسب نهايات الدالة  $g$  عند حدود مجال التعريف .
2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  وشكل جدول تغيراتها .
3. استنتج إشارة  $g(x)$  .
- (II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$  ،  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .
1. بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن :  $f'(x) = e^{-x}g(x)$  واستنتج اتجاه تغير  $f$  .
2. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .
3. شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .
4. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في  $\mathbb{R}$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  .
5. أ/ أثبت أن المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لـ  $(C)$  بجوار  $+\infty$  .
- ب/ أدرس الوضع النسبي لـ  $(C)$  و  $(D)$  .
6. احسب  $f(-\frac{1}{2})$  و  $f(-1)$  ثم أنشئ  $(C)$  و  $(D)$  .
- (III) لتكن الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - xe^{-x}$  .
1. أثبت أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .
2. نرسم بـ  $A(\alpha)$  مساحة الحيز المحدد بالمنحنى  $(C)$  ومحور الفواصل والمستقيمين :  $x = \alpha$  و  $x = 1$  .
- احسب  $A(\alpha)$  .

## الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط)

من أجل  $t = -2$  الطول  $AM$  أصغر ما يمكن

$$0.5 \quad AM^2 = f(-2) = 33$$

$$d = \sqrt{33} \quad \text{ومنه} \quad AM = \sqrt{33}$$

التمرين الثاني (4 نقاط)

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{4U_n} \end{cases}$$

$$0.5 \quad U_1 = \sqrt{4U_0} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{(1) حساب } u_2, u_1$$

$$U_2 = \sqrt{4U_1} = \sqrt{8}$$

$$0 < U_n < 4 \quad : n \in \mathbb{N} \quad \text{أ البرهان أنه من أجل كل}$$

$$* \text{ من أجل } n=0 : 0 < U_0 = 1 < 4 \quad (P(0) \text{ محققة})$$

$$* \text{ نفرض أن } 0 < U_n < 4 \text{ صحيحة ونبين أن: } 0 < U_{n+1} < 4$$

$$\text{لدينا: } 0 < U_n < 4 \quad \text{ومنه: } 0 < 4U_n < 16$$

$$0.5 \quad \sqrt{0} < \sqrt{4U_n} < \sqrt{16} \quad \text{إذن:}$$

$$0 < U_{n+1} < 4 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\text{إذن } p(n+1) \text{ صحيحة}$$

$$* \text{ الاستنتاج: من أجل كل } n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 4$$

(ب) اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$ 

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{4U_n} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(\sqrt{4U_n} - U_n)(\sqrt{4U_n} + U_n)}{\sqrt{4U_n} + U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - U_n^2}{\sqrt{4U_n} + U_n} = \frac{U_n(4 - U_n)}{\sqrt{4U_n} + U_n}$$

$$0.5 \quad \text{لدينا: } U_n < 4 \quad \text{ومنه: } 4 - U_n > 0$$

$$\text{ولدينا: } U_n > 0 \quad \text{ومنه: } \sqrt{4U_n} + U_n > 0$$

$$\text{ومنه: } U_{n+1} - U_n > 0 \quad \text{إذن: } (U_n) \text{ متزايدة}$$

الاستنتاج:  $(U_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$$3 \quad \text{أ إثبات أن } (V_n) \text{ متتالية هندسية: } V_n = \ln(U_n) - \ln 4$$

$$\text{لدينا: } V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - \ln 4$$

$$V_{n+1} = \ln(\sqrt{4U_n}) - \ln 4$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \\ a > 0$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(4U_n) - \ln 4$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln(U_n) - \ln 4$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \\ a > 0, b > 0$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(U_n) - \frac{1}{2} \ln 4$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} [\ln(U_n) - \ln 4]$$

0.5

$$q = \frac{1}{2} \text{ هندسية أساسها } (V_n) \quad V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

$$V_0 = -\ln 4$$

$$\text{و حدها الأول } V_0 = \ln(U_0) - \ln 4 \quad \text{نجد}$$

1

$$\text{التمرين الأول (4 نقاط)} \\ \begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t, \dots, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad A(-1, 2, 3) \text{ و } (\Delta)$$

(أ) إيجاد معادلة المستوى  $(P)$ : لدينا  $(P) \perp (\Delta)$  ومنه

$$1 \quad \vec{u}_\Delta(4; 1; 2) \text{ شعاع توجيه } (\Delta) \text{ ناظمي للمستوي } (P) \\ \text{معادلته: } 4x + y + 2z + d = 0$$

$$d = -4 \quad \text{أي: } -4 + 2 + 6 + d = 0 \quad \text{أي: } A(-1, 2, 3) \in (P)$$

$$(P): 4x + y + 2z - 4 = 0$$

(ب) التحقق أن  $B(-3, 3, -4)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ : 0.5

$$B \in (\Delta), \text{ وحيدة } t \quad \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = 9 + 4t \\ 3 = 6 + t \\ -4 = 2 + 2t \end{cases}$$

(ج) حساب المسافة  $d_B$  بين  $B$  و  $(P)$ : 0.5

$$\text{لدينا: } d_B = \frac{|-12 + 3 - 8 - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \frac{21\sqrt{21}}{21} = \sqrt{21}$$

(2) حساب المسافة  $d$  بين  $A$  و  $(\Delta)$ :

$$AB^2 = d^2 + d_B^2$$

$$d^2 = AB^2 - d_B^2$$

$$d = \sqrt{AB^2 - d_B^2} \quad 0.5$$

$$AB = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{54}$$

$$0.5 \quad d = \sqrt{54 - 21} \quad \text{نجد } d = \sqrt{33}$$

(3) التعبير عن  $AM^2$  بدلالة  $t$ :

$$M(9 + 4t; 6 + t; 2 + 2t) \quad \text{ومنه } M \in (\Delta)$$

$$AM = \sqrt{(9 + 4t + 1)^2 + (6 + t - 2)^2 + (2 + 2t - 3)^2}$$

$$AM = \sqrt{(4t + 10)^2 + (t + 4)^2 + (2t - 1)^2}$$

$$AM = \sqrt{16t^2 + 80t + 100 + t^2 + 8t + 16 + 4t^2 - 4t + 1}$$

$$0.5 \quad AM = \sqrt{21t^2 + 84t + 117}$$

$$AM^2 = 21t^2 + 84t + 117$$

$$\text{نضع: } f(t) = 21t^2 + 84t + 117$$

$$\text{لندرس اتجاه تغير } f \quad f'(t) = 42t + 84$$

$$42t + 84 = 0 \quad \text{نجد } t = -2$$

$t$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	$0$	$+$
$f(t)$	$+\infty$	$33$	$+\infty$

$$P(Z) = 0 \quad (2)$$

$$Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4 = 0 \quad \text{أو} \quad Z = 2$$

$$\Delta = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i(2\sqrt{2})$$

$$Z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{أو} \quad Z = \frac{-2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$0.5 \quad Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{و} \quad Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$0.25 \quad Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

الشكل الأساسي:

$$|Z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

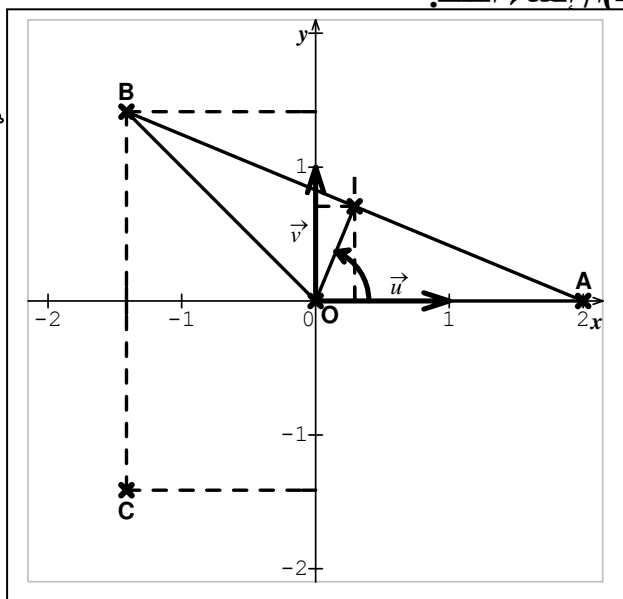
$$0.5 \quad Z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{و} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$|Z_2| = \sqrt{4} = 2$$

$$0.5 \quad Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{و} \quad \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(4) إنشاء النقط:



(ب) طبيعة المثلث OAB :

$$0.25 \quad OB = OA = 2 \quad \text{نجد} \quad |Z_A| = |Z_B| = 2 \quad \text{لدينا}$$

OAB متقايس الضلعين

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{قيس } (\vec{U}; \vec{OI})$$

$$(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4} \quad \text{نجد} \quad \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$0.5 \quad (\vec{U}; \vec{OI}) = \frac{(\vec{OA}; \vec{OB})}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

لأن (OI) منصف الزاوية (OA; OB)

$$V_n = V_0 \times q^n \quad : V_n \text{ عبارة (ب)}$$

0.25

$$V_n = (-\ln 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = \ln(U_n) - \ln 4 \quad : U_n \text{ عبارة}$$

$$U_n = e^{(v_n + \ln 4)} \quad \text{نجد} \quad \ln(U_n) = V_n + \ln 4$$

$$U_n = e^{v_n} \times e^{\ln 4}$$

0.25

$$U_n = 4e^{-(\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

0.25

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\right) \quad \text{و} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{(لأن)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n \quad \text{حساب (4)}$$

$$S_n = (-\ln 4) \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] \quad \text{نجد} \quad S_n = V_0 \left[ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

$$0.5 \quad S_n = (-2 \ln 4) \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$S_n = 4(\ln 2) \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n \quad \text{حساب}$$

$$U_n = e^{(v_n + \ln 4)} \quad \text{لدينا}$$

$$P_n = e^{v_0 + \ln 4} \times e^{v_1 + \ln 4} \times \dots \times e^{v_n + \ln 4}$$

$$(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \underbrace{(\ln 4 + \ln 4 + \dots + \ln 4)}_{(n+1)}$$

$$P_n = e$$

$$P_n = e^{(S_n) + (n+1)\ln 4} \quad 0.5$$

$$P_n = e^{4(\ln 2) \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right] + (n+1)\ln 4}$$

التمرين الثالث (نقاط)

$$P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)Z^2 + 4(1 - \sqrt{2})Z - 8$$

$$0.25 \quad P(2) = 0 \quad (1)$$

$$P(Z) = (Z - 2)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 2aZ^2 - 2bZ - 2c$$

$$P(Z) = aZ^3 + (b - 2a)Z^2 + (c - 2b)Z - 2c$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2\sqrt{2} - 2 \\ c - 2b = 4 - 4\sqrt{2} \\ -2c = -8 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$0.5 \quad P(Z) = (Z - 2)(Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4)$$

ج) حساب  $Z_I$  لاحقة  $I$  منتصف  $[AB]$ :

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

0.5

$$Z_I = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

كتابة  $Z_I$  على الشكل الأسّي:

$$|Z_I| = \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|Z_I| = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_I) = (\vec{U}; \vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$$

0.5

$$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

استنتاج القيمة المضبوطة  $\cos \frac{3\pi}{8}$  و  $\sin \frac{3\pi}{8}$ :

$$Z_I = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(2 + \sqrt{2})}{2}} \end{cases}$$

0.5

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

التمرين الرابع: 7 نقاط

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$$

0.5

أ) إثبات أن:  $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

لدينا:  $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln(e^x(1 + 2e^{-2x}))$

$$f(x) = \ln(e^x) + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

$$f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

0.25

ب) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + 2e^{-2x})) = +\infty$$

إثبات أن  $(D): y = x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + 2e^{-2x})) = 0$$

ومنه  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي  $(C_f)$  و  $(D)$ :

0.25

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-2x})$

$$\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0 \quad \text{ومنه} \quad (2e^{-2x} > 0) \quad \text{لأن} \quad 1 + 2e^{-2x} > 1$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
إشارة الفرق		+
الوضع النسبي		$(C_f)$ فوق $(D)$

2) أ) إثبات أن:  $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$

لدينا:  $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln(e^{-x}(e^{2x} + 2))$

$$f(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(2 + e^{2x})$$

0.5

$$f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$$

ب) حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

0.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + \ln(2 + e^{2x})) = +\infty$$

إثبات أن  $(D'): y = -x + \ln 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(2 + e^{2x}) - \ln 2) = \ln 2 - \ln 2 = 0$$

0.5

ومنه  $(D')$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي  $(C_f)$  و  $(D')$ :

ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln(2 + e^{2x}) - \ln 2$$

$$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln\left(\frac{2 + e^{2x}}{2}\right)$$

0.25

$$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right) > 0 \quad \text{ومنه} \quad \left(\frac{1}{2}e^{2x} > 0\right) \quad \text{لأن} \quad 1 + \frac{1}{2}e^{2x} > 1$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
إشارة الفرق		+
الوضع النسبي		$(C_f)$ فوق $(D')$

3) حساب المشتق:

0.5

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 2)}{e^x + 2e^{-x}}$$

ومنه

إشارة المشتق:

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $e^{2x} - 2$   
 لأن  $(e^{-x} > 0 \text{ و } e^x + 2e^{-x} > 0)$   
 $e^{2x} - 2 \geq 0$  نجد  $e^{2x} \geq 2$   
 $2x \geq \ln 2$  نجد  $x \geq \frac{\ln 2}{2}$

وبنفس الطريقة:  $e^{2x} - 2 \leq 0$  نجد  $x \leq \frac{\ln 2}{2}$  0.5

$x$	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

$f$  متناقصة على  $]-\infty; \frac{\ln 2}{2}[$  ومتزايدة على  $]\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$

(2) جدول تغيرات  $f$ : 0.5

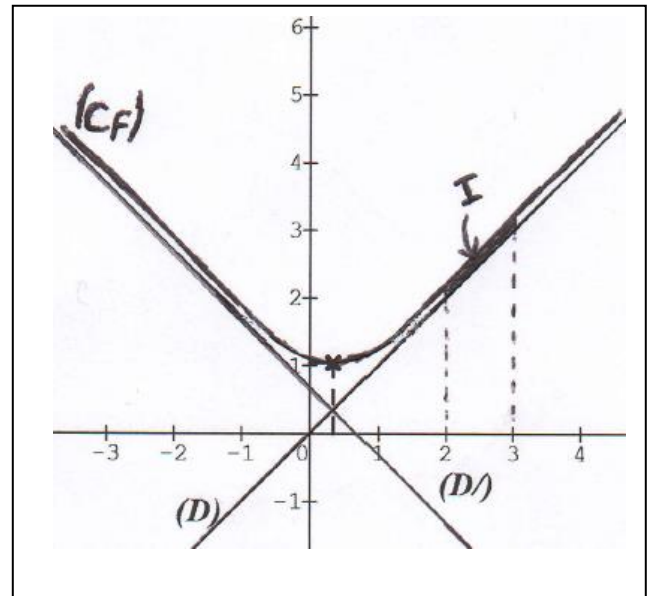
$x$	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3 \ln 2}{2}$	$+\infty$

$f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

$f(\frac{\ln 2}{2}) = \frac{\ln 2}{2} + \ln(1 + 2e^{-\ln 2}) = \frac{\ln 2}{2} + \ln 2$

$f(\frac{\ln 2}{2}) = \frac{3 \ln 2}{2}$

(4) رسم:  $(D)$ ,  $(C_f)$  0.75



(5) نضع  $I = \int_2^3 (f(x) - x) dx$

(1) المساحة المحددة بالمنحني  $(C_f)$  والمستقيمت  $(D)$ :  $y = x$  و  $x = 3$  و  $x = 2$

(2) إثبات أنه من أجل  $x \in [0; +\infty[$ :  $\ln(1+x) \leq x$

نضع:  $g(x) = \ln(1+x) - x$

$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

لدينا من أجل  $x \geq 0$ :  $g'(x) \leq 0$

$g$  متناقصة على المجال  $[0; +\infty[$  (فهي تعكس الترتيب)

من أجل  $x \geq 0$ :  $g(x) \leq g(0)$  ولدينا  $g(0) = 0$

$\ln(1+x) - x \leq 0$

$\ln(1+x) \leq x$  0.5

(3) إستنتاج أن  $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$

لدينا:  $I = \int_2^3 (f(x) - x) dx = \int_2^3 (x + \ln(1 + 2e^{-2x}) - x) dx$

$I = \int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx$

$\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$  ومنه  $1 + 2e^{-2x} > 1$

ومنه  $\int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx \geq 0$  إذن  $I \geq 0$ .....(1)

لدينا  $2e^{-2x} > 0$  حسب السؤال السابق  $\ln(1 + 2e^{-2x}) \leq 2e^{-2x}$

ومنه  $\int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$

إذن  $I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$ .....(2)

من (1) و (2) نجد  $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$  0.75

إيجاد حصرًا للعدد  $I$  سعته **0,02**:  $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$

لدينا:  $\int_2^3 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_2^3 = -e^{-6} + e^{-4} \approx 0.01583...$

ومنه:  $0 \leq I \leq (e^{-4} - e^{-6})$   
 $0 \leq I \leq 0,02$  0.25