

الموضوع السادس

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

(1) إذا كان $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x) = 6 - f(1+x)$

(2) g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = e^{-x} \cdot \ln(1+2e^{2x})$ فإن $g(x) = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$

(3) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 2$ فإن $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \left[2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1 - \frac{1}{9}} \right) \right]^2$

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X = x_i)$	a	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	b	$\frac{3}{13}$

(4) إذا كان قانون احتمال لمتغير عشوائي X

وامله الرياضي $E(X) = \frac{17}{13}$ فإن $a = \frac{3}{13}$ و $b = \frac{4}{13}$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(z - 1 - \sqrt{3}i)(z^2 + 2z + 2) = 0$

2. في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، النقط A, B, C لواحقتها: $z_A = -1 + i$ ،

$$z_C = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_B = \overline{z_A}$$

أ- أكتب العددين المركبان: z_A و z_C على الشكل الاسي، استنتج الشكل الاسي لـ z_B .

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي

ت- استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3. عين النقطة D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع.

4. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$.

5. عين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة حيث : $|z+1-i| = |\bar{z}+1-i|$ و (E_1) و $(E_2): \arg(z) = \arg(\bar{z}) + \pi + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{R}$

التمرين الثالث:

- i. يحتوي كيس U_1 على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء و كرتان حمراواتان ونسحب عشوائيا وفي أن واحد 3 كريات من الكيس وليكن المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة بالعدد $2n-1$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1 - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي ثم احسب امله الرياضي $E(X)$.
- ii. يحتوي كيس U_2 على 10 كريات لا نفرق بينها باللمس 7 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء ، نسحب كرية عشوائيا من الكيس U_2 ثم نضعها في الكيس U_1 بعد تسجيل لونها ثم نسحب كرية من الكيس U_1 .
1. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء .
 2. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء.

التمرين الرابع:

- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{x-1} \ln|x-1|$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس .
1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النهايتين الأخيرتين هندسيا .
 2. أ - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، ثم بين أن : $f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$
 - ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها
 3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]4;5[$.
 4. اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما -2 واكتب معادلتيهما .
 5. أرسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .
 6. ناقش بياننا ، حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1)\ln|x-1|$
 7. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ كما يلي : $h(x) = f(|x|)$
 - أ - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا .
 - ب - بين أن الدالة h زوجية ثم ارسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق .
 8. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} \ln(e^x - 1)$
 - أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن : $g'(x) = e^{-x} f(e^x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .
 - ب - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

حل الموضوع السادس

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

(1) إذا كان $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x) = 6 - f(1+x)$

الإجابة صحيحة لأنه: إذا كانت $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) فإنه $f(1-x) + f(1+x) = 2(3)$ وهذا يعني

أن $f(1-x) = 6 - f(1+x)$ محققة .

(2) g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = e^{-x} \cdot \ln(1 + 2e^{2x})$ فإن $g(x) = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(1 + e^{-2x})}{e^x}$

الإجابة صحيحة لأنه: من أجل كل عدد حقيقي $g(x) = e^{-x} \cdot \ln(1 + 2e^{2x})$ يعني أن:

$g(x) = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(1 + e^{-2x})}{e^x}$ أي: $g(x) = e^{-x} \cdot \ln(e^{2x}) + e^{-x} \cdot \ln(e^{-2x} + 1)$ ومنه: $g(x) = e^{-x} \cdot \ln(e^{2x}(e^{-2x} + 1))$

(3) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 2$ فإن $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \left[2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1 - \frac{1}{9}} \right) \right]^2$

الإجابة خاطئة لأن: المجموع هو مجموع حدود متتابعة من مربعات متتالية هندسية هو مجموع حدود متتابعة من متتالية

هندسية أساسها مربع أساس المتتالية الأولى أي أن: $S_n = v_0^2 \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{9} - 1} = 4 \left[\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{8}{9}} \right] = -\frac{9}{2} \left[\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} - 1 \right]$

(4) إذا كان قانون احتمال لمغير عشوائي X

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X = x_i)$	a	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	b	$\frac{3}{13}$

وامله الرياضياتي $E(X) = \frac{17}{13}$ فإن $a = \frac{3}{13}$ و $b = \frac{4}{13}$

الإجابة خاطئة لأنه: لو عوضنا القيمتين في الامل الرياضياتي نجده $\frac{22}{13}$ وهو يختلف عن $\frac{17}{13}$

$$E(X) = -2 \left(\frac{3}{13} \right) + 0 \left(\frac{2}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} \right) + 3 \left(\frac{4}{13} \right) + 5 \left(\frac{3}{13} \right) = \frac{22}{13}$$

1. حل المعادلة : $(z - 1 - \sqrt{3}i)(z^2 + 2z + 2) = 0$

$$(z - 1 - \sqrt{3}i)(z^2 + 2z + 2) = 0$$

$$(z - 1 - \sqrt{3}i) = 0 \text{ أو } (z^2 + 2z + 2) = 0$$

$$\boxed{z = 1 + \sqrt{3}i} \text{ أو } \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2$$

$$\boxed{z = 1 + \sqrt{3}i} \text{ أو } \boxed{z_2 = -1 - i} \text{ ، } \boxed{z_1 = -1 + i}$$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، النقط A, B, C لواحقتها : $z_A = -1 + i$ ، $z_C = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$.

أ- كتابة العددان المركبان : z_C و z_A على الشكل الاسي ، واستنتاج الشكل الاسي لـ z_B :

$$\boxed{z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} \text{ ومنه } Arg(z_A) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z}); |z_A| = \sqrt{2}$$

$$\boxed{z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}} \text{ ومنه } Arg(z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z}); |z_C| = 2$$

$$\boxed{z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} \text{ لدينا}$$

ب- كتابة العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي:

$$\frac{z_C}{z_A} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{-1 + i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{-1 + i} \times \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \text{ الشكل الجبري :}$$

$$\text{الشكل الاسي : } Arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = Arg(z_C) - Arg(z_A) = \frac{15\pi}{12} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z}); \left|\frac{z_C}{z_A}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{z_C}{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$$

ت- استنتاج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

$$\frac{z_C}{z_A} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} - i \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ولدينا : } \frac{z_C}{z_A} = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right] = \sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i \sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3. تعيين النقطة D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع :

حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع معناه : $\overline{AC} = \overline{BD}$ ومنه :

$$z_C - z_A = z_D - z_B \Rightarrow z_D = z_C - z_A + z_B = (1+\sqrt{3}i) - (-1+i) + (-1-i) = \boxed{1+i(\sqrt{3}-2)}$$

4. تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد : $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}} = \sqrt{2}^n \left[\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right) \right] \text{ ومنه } \left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}$$

$$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } \sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right) = 0 \text{ ومنه } n = 12k' \text{ حيث } (k' \in \mathbb{N})$$

5. تعيين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة حيث : $(E_1): |z+1-i| = |\bar{z}+1-i|$ و

$$(E_2): \arg(z) = \arg(\bar{z}) + \pi + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

$$\bullet |z - z_A| = |z - \bar{z}_A| \text{ ومنه } |z - z_A| = |\bar{z} - z_A| \text{ أي } |z - (-1+i)| = |\bar{z} - (-1+i)| \text{ يكافئ } |z+1-i| = |\bar{z}+1-i|$$

$$\text{ومنه } |z - z_A| = |z - z_B| \text{ وبالتالي } AM = BM \text{ ومنه مجموعة النقط } (E_1) \text{ هي محور القطعة } [AB]$$

$$\bullet \arg(z) = \arg(\bar{z}) + \pi + 2k\pi \text{ تكافئ } \arg(z) = -\arg(z) + \pi + 2k\pi \text{ ومنه } 2\arg(z) = \pi + 2k\pi$$

$$\text{ومنه } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ أي } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ وبالتالي مجموعة النقط } (E_2) \text{ هي محور الترتيب ما عدا المبدأ } (\vec{i}; \overline{OM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

التمرين الثالث:

i. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي وحساب امله الرياضياتي $E(X)$:

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X = 2n - 1$ ومنه $\{1; 3; 5; 7\}$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1

x_i	1	3	5	7	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{84}{84} = 1$

$$E(X) = 1\left(\frac{4}{84}\right) + 3\left(\frac{30}{84}\right) + 5\left(\frac{40}{84}\right) + 7\left(\frac{10}{84}\right) = \frac{4+90+200+70}{84} = \frac{364}{84}$$

ii. 1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء هو $\frac{1}{5}$.

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء هو $\frac{1}{7}$.

التمرين الرابع:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{x-1} \ln|x-1|$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و تفسير النهايتين الأخيرتين هندسيا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) (1 - (x-1) \ln(x-1)) = +\infty$$

التفسير: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 1$.

2. أ - التبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، و تبين أن : $f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ و عليه ودالتها المشتقة هي : $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-x}{(x-1)^2}$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها :

لندرس إشارة $f'(x)$: $f'(x) = 0$ يكافئ $\frac{-x}{(x-1)^2} = 0$ أي $-x = 0$ ومنه $x = 0$ ونلخص النتائج في جدول :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;1[\cup]1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

3. التبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]4;5[$.

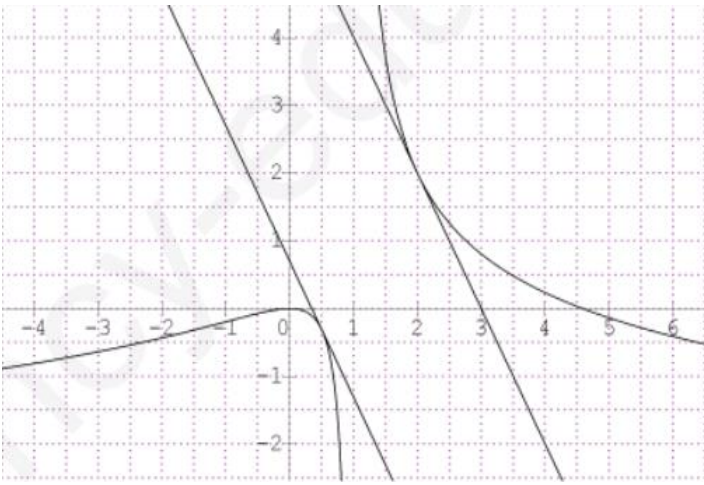
الدالة f مستمرة ورتبية على $[4;5]$ و لدينا $f(4) = 0,2$ ، $f(5) = -0,14$ ، ومنه $f(4) \times f(5) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]4;5[$.

4. اثبات المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما -2- واكتب معادلتيهما.

مماسين معامل توجيه كل منهما -2- معناه $f'(x) = -2$ أي $\frac{-x}{(x-1)^2} = -2$ بعد الحل نجد $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = 2$

ومنه : $(\Delta) : y = -2x + 6$ و $(\Delta') : y = -2x + \ln 2$

5. رسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .



6. المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1)\ln|x-1|$

$$m = \frac{2x^2 - 2x - (x-1)\ln|x-1|}{(x-1)}$$

$$= \frac{2x - 2x}{(x-1)} - \ln|x-1|$$

$$= \frac{2x(x-1) - x}{(x-1)} - \ln|x-1|$$

$$= 2x + \frac{x}{(x-1)} - \ln|x-1|$$

$$-2x + m = \frac{x}{(x-1)} - \ln|x-1|$$

$$2x + m = f(x) \text{ ومنه}$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = -2x + m$

$m \in]-\infty; \ln 2[$ تقبل حلين مختلفين

$m = \ln 2$ تقبل حل مضاعف

$m \in]\ln 2; 6[$ لا تقبل حلول

$m = 6$ تقبل حل مضاعف

$m \in]6; +\infty[$ تقبل حلين مختلفين

7. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ كما يلي : $h(x) = f(|x|)$

أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا :

$$h'(0) = f'(0) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0)$$

$$h'(0) = f'(0) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0)$$

نستنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 وتقبل مماس أفقي

ب- التبيين أن الدالة h زوجية و ارسـم المنحى (C_h) الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق :

لدينا D_h متناظرة بالنسبة للمبدأ ولدينا : $h(-x) = f(|-x|) = f(x) = h(x)$ ومنه h دالة زوجية

8. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} \ln(e^x - 1)$

أ- التبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن : $g'(x) = e^{-x} f(e^x)$ و الاستنتاج اتجاه تغير الدالة g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-x} f(e^x - 1) + \frac{e^x}{e^x - 1} \times e^x \\ &= e^{-x} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \ln(e^x - 1) \right) \\ &= e^{-x} f(e^x) \end{aligned}$$

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و التبيين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

دراسة إشارة $e^{-x} f(e^x)$:

لدينا $e^{-x} > 0$ نضع $k(x) = f(e^x)$ ومنه الدالة k عبارة عن مركب دالتين $f(x)$ والاسية

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
e^x	+		
$k'(x)$	-		
$k(x)$	$+\infty$		
			$-\infty$

ومنه نقطة تقاطعه مع محور الفواصل $k(x)=0$ أي $f(e^x)=0$ يكافئ $e^x = \alpha$ ومنه $x = \ln \alpha$

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$
$k(x)$	+		-

جدول الإشارة :

ومنه الدالة g متزايدة تماما في المجال $]-\infty; \ln \alpha]$ ومتناقصة تماما في المجال $[\ln \alpha; +\infty[$

جدول التغيرات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	$-\infty$	$g(\alpha)$	0