

التمرين 01:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

$z_D$  و  $z_C$  ،  $B$  ،  $A$  ،  $\Omega$  ونقط لواحقتها على الترتيب :  $z_A = 1 + i$  ،  $z_B = 2 - i$  ،  $z_C = 3 + 2i$  ،  $z_D = 5 + 8i$  و  $z_\Omega = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

1 - أ - أكتب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث  $ABC$

ب - عين طبيعة وعناصر التحويل النقطي  $R$  الذي مركزه  $A$  ويحول  $B$  إلى  $C$

2 - عين نسبة التحاكي  $h$  الذي مركزه  $B$  ويحول  $C$  إلى  $D$

3 - نضع:  $S = hoR$

أ - تحقق أن  $S(B) = D$

ب - ما هي طبيعة وعناصر التحويل  $S$  ؟

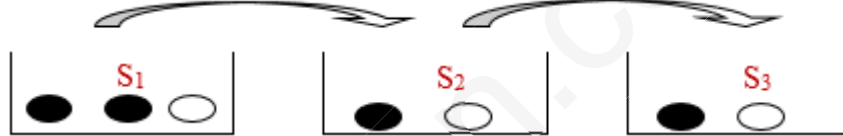
4 - لتكن  $E$  ،  $F$  ،  $G$  نقط حيث:  $S(D) = E$  ،  $S(E) = F$  ،  $S(F) = G$

أ - بين أن النقط  $\Omega$  ،  $E$  و  $B$  في استقامية

ب - بين أن النقط  $\Omega$  ،  $G$  و  $B$  في استقامية

التمرين 02:

لدينا  $n$  كيس  $S_1$  ،  $S_2$  ، ... ،  $S_n$  يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس.  $n$  عدد طبيعي غير معدوم.



$S_1$  يحوي قريصتان سوداوان وواحدة بيضاء وكل الأكياس الأخرى تحوي قريصة سوداء وقريصة بيضاء.

نقترح دراسة تطور السحوبات المتتالية لقريصة حسب البروتوكول التالي:

■ نسحب قريصة من  $S_1$ :

■ نضعها في  $S_2$  ثم نسحب قريصة من  $S_2$  :

■ نضعها في  $S_3$  وهكذا....

■ من أجل كل عدد طبيعي  $k$  حيث:  $1 \leq k \leq n$  ، نرمز بـ  $E_k$  الحادثة " القريصة المسحوبة من  $S_k$  بيضاء" و  $\overline{E_k}$  حادته المعاكسة.

■ احتمال الحادثة  $E_k$  هو  $p_k$ .

1 - بداية العملية:

أ - مثل بشجرة السحب في  $S_1$  ثم في  $S_2$ .

ب - أذكر  $p_1$  ثم أحسب  $p_2$ .

2 - علاقة بين  $p_k$  و  $p_{k+1}$ :

أ - عين  $p_{E_k}(E_{k+1})$  و  $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$

ب - أتمم الشجرة المقابلة و التي تمثل السحوبات في الكيسين  $S_k$  و  $S_{k+1}$  ،  $(1 \leq k \leq n)$ .

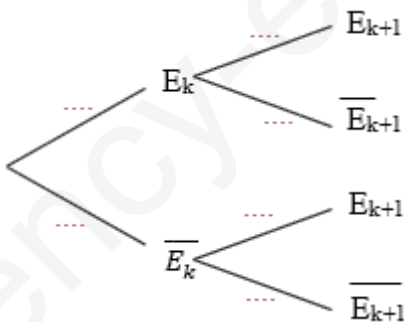
ج - استنتج أن:  $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$

3 - دراسة متتالية  $(p_n)$ :

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

ب - استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

ج - ما هو التفسير العملي لهذه النتيجة؟



التمرين 03:

- $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $G(-2;3;-1)$  و  $D(-5;-1;0)$ ،  $C(4;-1;1)$ ،  $B(-1;3;2)$ ،  $A(1;2;4)$
- 1- أ - بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة  
ب - بين أن النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $G$  تنتمي إلى نفس المستوي  
ج - استنتج أن  $G$  مرجح للنقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها
  - 2- أ - بين أن النقطة  $G$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$   
ب - استنتج معادلة ديكرتية للمستوي  $(ABC)$
  - 3- أ - أحسب الجداء السلمي  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  والطولين  $AB$  و  $AC$   
ب - استنتج القيم المضبوطة لكل من  $\cos \widehat{BAC}$  و  $\sin \widehat{BAC}$   
ج - استنتج مساحة المثلث  $ABC$  ثم أحسب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$
  - 4- لتكن  $(S)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$   
أ - عين طبيعة وعناصر  $(S)$   
ب - عين معادلتين ديكرتيتين للمستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  الماسين لسطح الكرة  $(S)$  والموازيين للمستوي  $(ABC)$

التمرين 04:

- الجزء I :  $f$  دالة معرفة على  $]-\infty; 1]$  ب:  $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$  .  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أ - أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
ب - أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها
  - 2 - عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$
  - 3 - أرسم  $(C_f)$  و  $(\Delta)$
- الجزء I :  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة ب:  $u_0 = 0$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = f(u_n)$
- 1 - مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود  $u_0$ ،  $u_1$  و  $u_2$  (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء
  - 2 - ضع تخمينا حول تغيرات  $(u_n)$  و تقاربها
  - 3- أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-3 \leq u_n \leq 0$   
ب - ادرس اتجاه تغير  $(u_n)$   
ج - استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة
  - 4- أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[-3; 0]$ ،  $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$   
ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$   
ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$   
د - استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 05:

- $f$  دالة معرفة على  $]+0; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أحسب النهايات للدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج؟
  - 2- أدرس اتجاه تغير  $f$  ثم شكل جدول التغيرات.
  - 3- عين نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع  $(x'x)$
  - 4- أكتب معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x = 1$
  - 5- أنشئ  $(C_f)$  و  $(T)$
  - 6- باستعمال مكالمة بالتجزئة؛ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمتين ذات المعادلات:  $x = e$  و  $x = 1$  و  $y = 0$
  - 7- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة  $f(x) = f(m)$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعدين: 1440 و 276
2. ليكن  $x$  و  $y$  عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما. بين أن العددين  $(x+y)$  و  $(xy)$  أوليان فيما بينهما.
3.  $a$  و  $b$  عددان طبيعيين غير معدومان و  $m$  المضاعف المشترك الأصغر لهما.  
أ - برهن أن:  $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$  حيث  $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$  هو القاسم المشترك الأكبر.  
ب - أوجد كل الثنائيات  $(a; b)$  التي تحقق:  $a+b = 276$  و  $m = 1440$

التمرين 01:

$$z_{\Omega} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \text{ و } z_D = 5+8i, z_C = 3+2i, z_B = 2-i, z_A = 1+i$$

1- ا - كتابة  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+2i-1-i}{2-i-1-i} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$$ABC \text{ مثلث قائم ومتساوي الساقين في } A \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل النقطي R:

$$R(B)=C \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2 - تعيين نسبة التحاكي h:

h تحاكي مركزه B ونسبته k

$$k = 3 \Leftrightarrow 3(1+3i) = k(1+3i) \Leftrightarrow 5+8i-2+i = k(3+2i-2+i) \Leftrightarrow z_D - z_B = k(z_C - z_B) \Leftrightarrow h(C)=D$$

h تحاكي مركزه B ونسبته k = 3

3 - نضع: S=hoR

أ - التحقق من أن S(B)=D

$$S(B) = hoR(B) = h[R(B)] = h(C) = D$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل S:

S: S=hoR تشابه مباشر مركزه  $\omega$  ، نسبته 3 وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ 

$$\text{لدينا: } 5 + 8i - z_{\omega} = 3i(2 - i - z_{\omega}) \Leftrightarrow z_D - z_{\omega} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_{\omega}) \Leftrightarrow S(B) = D$$

$$\omega = \Omega \Leftrightarrow z_{\omega} = \frac{-2-2i}{-1+3i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = z_{\Omega} \Leftrightarrow (-1+3i)z_{\omega} = -2-2i \Leftrightarrow$$

S تشابه مباشر مركزه  $\Omega$  ، نسبته 3 وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ 

4 - لتكن E ، F ، G نقط حيث: S(D)=E ، S(E)=F ، S(F)=G و S(G)=E

أ - تبيان أن النقط  $\Omega$  ، E و B في استقامية:

$$\text{لدينا: } E = S(D) = S[S(B)] = SoS(B)$$

SoS: تشابه مباشر مركزه  $\Omega$  ، ونسبته  $3 \times 3 = 9$  وزاويته  $2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ : SoS تحاكي مركزه  $\Omega$  ونسبته 9-

$$SoS(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega E} = -9\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega E} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, E, B \text{ في استقامية}$$

ب - تبيان أن النقط  $\Omega$  ، G و B في استقامية:

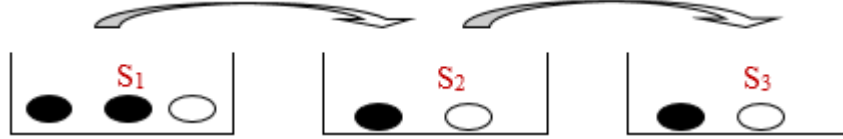
$$\text{لدينا: } G = S(F) = S[S(E)] = SoS[S(D)] = SoSoS[S(B)] = SoSoSoS(B)$$

SoSoSoS: تشابه مباشر مركزه  $\Omega$  ، ونسبته  $3^4 = 81$  وزاويته  $4 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \equiv 0$ : SoSoSoS تحاكي مركزه  $\Omega$  ونسبته 81

$$SoSoSoS(B) = G \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega G} = 81\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega G} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, G, B \text{ في استقامية}$$

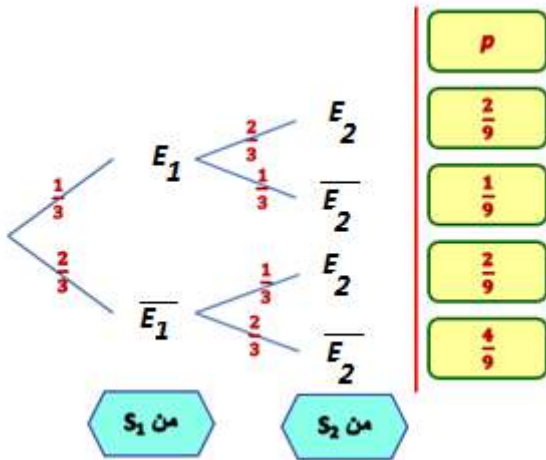
التمرين 02:

لدينا  $n$  كيس  $S_1, S_2, \dots, S_n$  يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس.  $n$  عدد طبيعي غير معدوم.



1 - بداية العملية:

أ - تمثيل بشجرة السحب في  $S_1$  ، ثم في  $S_2$ :

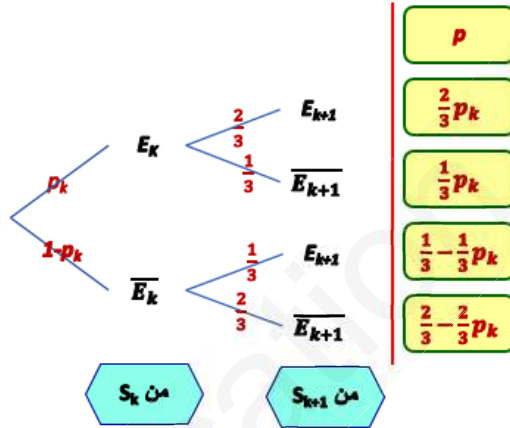


ب - أذكر  $p_1$  ثم حساب  $p_2$ :

$$p_2 = p(E_2) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \text{ و } p_1 = \frac{1}{3}$$

2 - علاقة بين  $p_k$  و  $p_{k+1}$ :

أ - إتمام الشجرة:



ب - استنتاج أن:  $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$

لدينا:  $p_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3}$  و  $p_{\bar{E}_k}(E_{k+1}) = \frac{1}{3}$

$$p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3} \text{ ومنه } p_{k+1} = p_k \times p_{E_k}(E_{k+1}) + (1-p_k) p_{\bar{E}_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3} p_k + \frac{1}{3} (1-p_k) = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$$

3 - دراسة متتالية  $(p_n)$ :

أ - نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

○ نتحقق من صحتها من أجل  $n=1$

لدينا:  $p_1 = \frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$  (صحيحة)

○ نفرض أنها صحيحة من أجل  $n$  ولنبرهن أنها صحيحة من أجل  $n+1$  أي لنبرهن أن  $p_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + 1 \right] = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

○ الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

ب - استنتاج النهاية لـ  $p_n$  لما  $n$  يؤول إلى  $+\infty$ :

$$\lim_{+\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

ج - التفسير العملي لهذه النتيجة:

عندما نعيد العملية عدد كبير من المرات بالقدر الكافي نجد فإن احتمال سحب كرة بيضاء يقترب من  $\frac{1}{2}$

1- أ - تبيان أن النقط  $A(1;2;4)$ ،  $B(-1;3;2)$ ،  $C(4;-1;1)$ ،  $D(-5;-1;0)$  و  $G(-2;3;-1)$  نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$   
 وليست على استقامة واحدة:

$$\vec{AB}(-2; 1; -2) \quad , \quad \vec{AC}(3; -3; -3)$$

لدينا:  $\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-3}$   $\Leftrightarrow \vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطان خطيا  $\Leftrightarrow A, B, C$  ليست على استقامة واحدة

ب - تبيان أن النقط  $A, B, C$  و  $G$  تنتمي إلى نفس المستوي:

$$\vec{GA}(-3; 1; -5) \quad ; \quad \vec{GB}(-1; 0; -3) \quad ; \quad \vec{GC}(-6; 4; -2)$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ -5 = -3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -\alpha - 6\beta \\ 1 = 4\beta \\ -5 = -3\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \vec{GA} = \alpha\vec{GB} + \beta\vec{GC} \quad \text{حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ حقيقيين}$$

لدينا:  $\vec{GA} = \frac{3}{2}\vec{GB} + \frac{1}{4}\vec{GC}$   $\Leftrightarrow \vec{GA}, \vec{GB}, \vec{GC}$  مرتبطة خطيا  $\Leftrightarrow A, B, C$  و  $G$  تنتمي إلى نفس المستوي

ج - استنتاج أن  $G$  مرجح للنقط  $A, B, C$  مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها:

$$(1) \dots G = \{(A, 4); (B, -6); (C, -1)\} \Leftrightarrow 4\vec{GA} - 6\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} = \frac{3}{2}\vec{GB} + \frac{1}{4}\vec{GC}$$

2- أ - تبيان أن النقطة  $G$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$ :

$$GE(ABC) \Leftrightarrow (1)$$

$$\vec{DG}(3; 4; -1)$$

$$(ABC) \text{ ناظمي للمستوي } \vec{DG}(3; 4; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \perp \vec{AB} \\ \vec{DG} \perp \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \cdot \vec{AB} = -6 + 4 + 2 = 0 \\ \vec{DG} \cdot \vec{AC} = 9 - 12 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} (\vec{DG}) \perp (ABC) \\ G \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow G \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } D \text{ على المستوي } (ABC)$$

ب - استنتاج معادلة ديكرتية للمستوي  $(ABC)$ :

$$(ABC): 3x+4y-z+d=0 \Leftrightarrow (ABC) \text{ ناظمي للمستوي } \vec{DG}(3; 4; -1)$$

$$(ABC): 3x+4y-z-7=0 \text{ ومنه } d=-7 \Leftrightarrow 3+8-4+d=0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$$

3- أ - حساب الجداء السلمي  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  والطولين  $AB$  و  $AC$ :

$$AC = 3\sqrt{3} \quad , \quad AB = 3 \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6 - 3 + 6 = -3$$

ب - استنتاج القيم المضبوطة لكل من  $\cos \widehat{BAC}$  و  $\sin \widehat{BAC}$

$$\text{لدينا: } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-3}{9\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{وبالتالي } \sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}} = \sqrt{1 - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{26}{27}} = \frac{\sqrt{78}}{9}$$

ج - استنتاج مساحة المثلث  $ABC$  ثم أحسب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$ :

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}}{2} = \frac{9\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{78}}{9}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ u. a.}$$

$$\text{لدينا: } DG = \sqrt{26} \text{ وبالتالي } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times DG = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{26}}{2} \times \sqrt{26} = 13 \text{ u. v.}$$

4- لتكن  $(S)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$   
 أ - تعيين طبيعة وعناصر  $(S)$ :

$$4\vec{MA}^2 - 6\vec{MB}^2 - \vec{MC}^2 = -54 \Leftrightarrow 4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

$$4(\vec{MG} + \vec{GA})^2 - 6(\vec{MG} + \vec{GB})^2 - (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$-3MG^2 + 4GA^2 - 6GB^2 - GC^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$GC^2 = 56 \quad , \quad GB^2 = 10 \quad , \quad GA^2 = 35$$

$$MG^2 = 26 \Leftrightarrow -3MG^2 + 140 - 60 - 56 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

$(S)$  سطح كرة مركزه  $G$  ونصف قطره  $R = \sqrt{26}$

ب - تعيين معادلتين ديكرتيتين للمستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  المماسين لسطح الكرة  $(S)$  والموازيين للمستوي  $(ABC)$

$$(P): 3x+4y-z+d=0 \text{ وبالتالي } (P) \text{ هو ناظمي للمستوي } (ABC) \Leftrightarrow \vec{DG}(3; 4; -1) \Leftrightarrow (P) \parallel (ABC)$$

$$(P) \text{ مماس لسطح الكرة } (S) \Leftrightarrow d(G; (P)) = \sqrt{26} \Leftrightarrow \frac{|7+d|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \Leftrightarrow d=19 \text{ أو } d=-33$$

$$\text{ومنه } (P_1): 3x+4y-z+19=0 \text{ و } (P_2): 3x+4y-z-33=0$$

الجزء I :  $f$  دالة معرفة على  $]-\infty; 1]$  بـ  $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$  .  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
 1- أ- حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$

$f$  تقبل الاشتقاق على  $] -\infty; 1[$  و  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$   $\Leftrightarrow f$  متزايدة تماما على  $] -\infty; 1]$

جدول تغيرات  $f$ :  $f(1) = -1$

$x$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

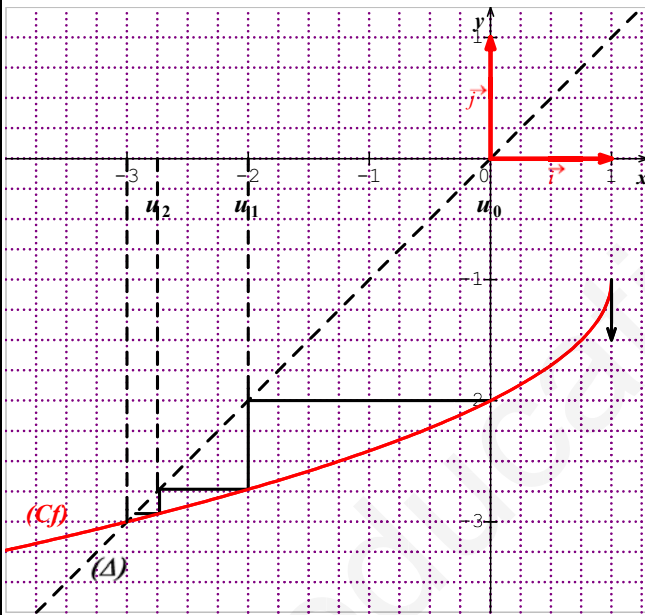
2- تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + 3x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ 1 - x = x^2 + 2x + 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = -x - 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{1-x} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  هي  $(-3; -3)$

3- رسم  $(C_f)$  و  $(\Delta)$



$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = -1 - \sqrt{1-u_n} \end{cases} \text{ الجزء I}$$

2- تخمين حول تغيرات  $(u_n)$  وتقاربها:

$(u_n)$  متناقصة تماما

$(u_n)$  متقاربة وتقارب 3-

3- أ- البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $-3 \leq u_n \leq 0$

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل  $n = 0$

لدينا:  $u_0 = 0 \in [-3; 0]$  (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل  $n$  أي نفرض أن  $-3 \leq u_n \leq 0$

- نبرهن أنها صحيحة من أجل  $n+1$  أي نبرهن أن  $-3 \leq u_{n+1} \leq 0$

لدينا:  $-3 \leq u_n \leq 0 \Leftrightarrow f(-3) \leq f(u_n) \leq f(0)$

(لأن  $f$  متزايدة على  $[-3; 0]$ )

$$-3 \leq u_{n+1} \leq -2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq u_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \text{(صحيحة)}$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $-3 \leq u_n \leq 0$

ب- دراسة اتجاه تغير  $(u_n)$

$(C_f)$  يقع تحت  $(\Delta)$  على  $[-3; 0]$   $\Leftrightarrow (f(x) \leq x \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0)$

لدينا:  $\forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u_n) \text{ متناقصة تماما}$$

ج- استنتاج أن  $(u_n)$  متقاربة

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \\ (u_n) \text{ متناقصة تماما} \\ f(-3) = -3 \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \text{ أي } (u_n) \text{ متقاربة وتقارب } -3 \Leftrightarrow$$

4 - أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[-3; 0]$  ،  $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$  :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2\sqrt{1-x} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1-x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0$$
 لدينا:

$$\Leftrightarrow \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } [-3; 0] \text{ ، } \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{4} dx \leq \int_{-3}^{u_n} f'(x) dx \leq \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [-3; 0]; \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq [f(x)]_{-3}^{u_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq f(u_n) - f(-3) \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

ج - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$  :

من السؤال السابق نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(u_0 + 3) \leq u_1 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_0 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_1 + 3) \leq u_2 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_1 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_2 + 3) \leq u_3 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_2 + 3) \\ \dots \dots \\ \frac{1}{4}(u_{n-1} + 3) \leq u_n + 3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + 3) \end{cases}$$

بالضرب نجد:

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n + 3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 3) \leq u_n + 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + 3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \Leftrightarrow$$

د - استنتاج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\right] = -3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\right] = -3 \end{cases}$$
 لدينا:

التمرين 05:

فدالة معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- حساب النهايات:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

الاستنتاج:  $x = 0$  و  $y = 0$  معادلتين لمقاربتين للمنحنى  $(C_f)$

2- دراسة اتجاه تغير  $f$ :

$f$  تقبل الاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و  $f'(x) = \frac{2x-4x\ln x}{x^4} = \frac{2-4\ln x}{x^3}$

$x$	$0$	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$

$f$  متزايدة تماما على  $]0; \sqrt{e}[$  و متناقصة تماما على  $]\sqrt{e}; +\infty[$

جدول التغيرات:

$x$	$0$	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	$0$

3- نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع  $(x'x)$ :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\ln x}{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

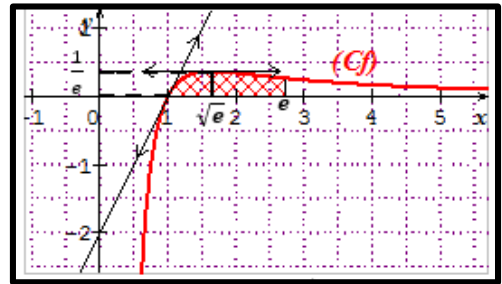
إحداثيتي نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع  $(x'x)$  هي  $(1; 0)$

4- معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x = 1$ :

$$f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 2$$

$$(T): y = 2x - 2 \Leftrightarrow (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

5- إنشاء  $(C_f)$  و  $(T)$ :



6- حساب المساحة:

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{2}{x} \end{cases} \text{ نضع:}$$

$$\mathcal{A} = \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{x^2} dx = \left[ -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} \right]_1^e = \left( -\frac{4}{e} + 2 \right) u.a. \approx 0,53 u.a.$$

7- المناقشة:

$$(\Delta): y = f(m)$$

$$(x'x): y = 0$$

$$(\Delta'): y = \frac{1}{e}$$

من البيان نستنتج ما يلي:

$$0 < m \leq 1 \Leftrightarrow f(m) \leq 0 \text{ حل وحيد}$$

$$0 < f(m) < \frac{1}{e} \Leftrightarrow m \in ]1; \sqrt{e}[ \cup ]\sqrt{e}; +\infty[ \text{ حلان متمايزان}$$

$$f(m) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow m = \sqrt{e} \text{ حل مضاعف}$$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و 276 :

$$PGCD(276; 1440) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 276 = 12 \times 23 \\ 1440 = 12 \times 120 \\ PGCD(23; 120) = 1 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

2. تبين أن العددين  $(x+y)$  و  $(xy)$  أوليان فيما بينهما:

$x$  و  $y$  عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

لدينا:  $x \wedge y = 1 \Leftrightarrow$  يوجد عدنان صحيحان  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $\alpha x + \beta y = 1$  (مبرهنة بيزو)

$$\begin{cases} \alpha(x+y) + (\beta - \alpha)y = 1 \\ \beta(x+y) + (\alpha - \beta)x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{(مبرهنة بيزو)} \begin{cases} (x+y) \wedge y = 1 \\ (x+y) \wedge x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x+y) \wedge (xy) = 1 \Leftrightarrow$$

3.  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومان و  $m$  المضاعف المشترك الأصغر لهما.

أ- برهان على أن:  $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$

$$\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = d$$

لدينا:  $m = d a' b' \Leftrightarrow md = ab = d^2 a' b'$

$$PGCD(a+b; m) = PGCD(d(a'+b'); da'b') = d PGCD(a'+b'; a'b') = d = PGCD(a; b)$$

(لأن  $(a' + b') \wedge (a'b') = 1$  من السؤال السابق)

ب - إيجاد  $(a; b)$  :

$$m = 1440 \text{ و } a+b = 276$$

$$\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = PGCD(a+b; m) = PGCD(276; 1440) = 12$$

لدينا:  $a'b' = 120 \Leftrightarrow 12a'b' = 1440 \Leftrightarrow m = d a' b'$

$$a' + b' = 23 \Leftrightarrow a + b = 12(a'+b') = 276 \text{ و}$$

$$a' \text{ و } b' \text{ هما حلا المعادلة: } x^2 - 23x + 120 = 0$$

$$x_2 = 8 \text{ ، } x_1 = 15 \quad \Delta = 23^2 - 4(120) = 49$$

وبالتالي  $(a; b) = (180; 96)$  أو  $(a; b) = (96; 180) \Leftrightarrow (a'; b') = (15; 8)$  أو  $(a'; b') = (8; 15)$