

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر المستقيمين  $(d)$  و  $(d')$  المعرفين كمايلي:

$$(d') : \begin{cases} x = 4 + 3t' \\ y = 3 + t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R} \quad , \quad (d) : x - 2 = \frac{y - 1}{2} = 1 - z$$

- (1) أكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم  $(d)$ ، ثم بين أن المستقيمين  $(d)$  و  $(d')$  ليسا من نفس المستوي.  
(2) أ\* / أوجد المعادلة الديكارتية للمستويين  $(p_1)$  و  $(p_2)$  اللذين يشملان النقطة  $A(4; -7; 5)$ .  
حيث المستوي  $(p_1)$  يحوي المستقيم  $(d)$  و المستوي  $(p_2)$  يحوي المستقيم  $(d')$ .

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha \\ z = 11\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ب* / تحقق أن المستويين } (p_1) \text{ و } (p_2) \text{ متقاطعان وفق مستقيم } (\Delta) \text{ معرف بـ:}$$

- (3) لتكن  $B \left( \frac{-1}{11}; 3; 0 \right)$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  و المستوي  $(Q)$  ذو المعادلة:  $11x + y - z = 2$ .

- أ\* / أوجد إحداثيات النقطة  $A'$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستوي  $(Q)$ .  
ب\* / استنتج المسقط العمودي للمستقيم  $(\Delta)$  على المستوي  $(Q)$ .

$$(4) (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M(x, y, z) \text{ من الفضاء تحقق: } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$$

ب\* / عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  محددًا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$A_0$  و  $B_0$  نقطتان من المستوي حيث:  $A_0B_0 = 8$  (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي

مركزه النقطة  $A_0$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  و زاويته  $\frac{3\pi}{4}$ .

نعرف متتالية النقط  $(B_n)$  كمايلي:  $B_{n+1} = S(B_n)$  ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

- (1) أنشئ النقط  $B_1, B_2, B_3$  و  $B_4$ .
- (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  المثلثان  $A_0B_nB_{n+1}$  و  $A_0B_{n+1}B_{n+2}$  متشابهان.
- (3) نعرف متتالية  $(u_n)$  بـ :  $u_n = B_nB_{n+1}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .
- أ\* أثبت أن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .
- ب\* أكتب عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .
- ج\* نضع المجموع:  $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، أحسب  $\delta_n$  بدلالة  $n$  ثم أوجد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$
- (4) أ\* حل في  $\square \times \square$  المعادلة :  $3x - 4y = 2$
- ب\* ليكن  $(\Delta)$  المستقيم العمودي على المستقيم  $(A_0B_0)$  في النقطة  $A_0$ .
- \* جد قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها تكون النقطة  $B_n$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\square$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :
- $$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0 \quad (E)$$
- أ\* بين أن المعادلة  $(E)$  تكافئ المعادلة :  $(z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$ .
- ب\* حل في  $\square$  المعادلة  $(E)$ .
- (2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  لواقعها على الترتيب :  $z_A = -1$ ،  $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ،  $z_C = \overline{z_B}$ ،  $z_D = 3$ .
- أ\* عين قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $(z_B - z_A)^n$  عددا حقيقيا سالبا.
- ب\* عين طبيعة المثلث  $ABC$ .
- (3) أ\* أكتب العدد  $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$  على الشكل الأسّي، ثم استنتج أن النقطة  $A$  صورة  $D$  بتحويل نقطي يطلب تعيينه.
- ب\* أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث  $ACD$ .
- (4)  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي لاحتقتها  $z$  تحقق:  $z + 1 = 2\sqrt{3}k.e^{i\frac{\pi}{6}}$  حيث  $k$  يسمح المجال  $[0; +\infty[$ .
- أ\* عين قيسا للزاوية الموجهة  $(\vec{u}; \overline{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط  $(\Gamma)$ .
- (5) أ\* عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث يكون :  $-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha \overline{CD} = \vec{0}$ .
- ب\* عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:  $\|-\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM}\| \leq 2\|\overline{BM} - \overline{CM}\|$ .
- ج\* استنتج مجموعة نقط تقاطع  $(E)$  و  $(\Gamma)$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

(1)  $g$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x^2 e^x$  .  
أ\* / أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

ب\* / استنتج أنه : إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$  و إذا كان  $x > 1$  فإن  $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

(2) نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

$h$  دالة عددية معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$  . ( $C_h$ ) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)  
أ\* / أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  .

ب\* / بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$  ، ثم احسب  $f'(1)$  .  
ج\* / شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

(3) أ\* / بين أن المعادلة:  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $1.5 < \beta < 1.6$  و  $0.5 < \alpha < 0.6$  ، ثم استنتج أن المنحنى ( $C_f$ ) يقطع محور الفواصل في نقطتين .  
ب\* / أدرس وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة للمنحنى ( $C_h$ ) .

ج\* / بين ان المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مماسا ( $T$ ) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

(4) أ\* / أرسم ( $T$ ) و ( $C_f$ ) . ( الملحق يعاد مع ورقة الإجابة )

ب\* /  $m$  عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة  $m$  حتى تقبل المعادلة ( $E$ ) حلين متمايزين:

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

(5) أ\* / بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$  .

ب\* / ليكن العدد  $\lambda$  من المجال  $]0; 1[$  ،

$A(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين ( $C_h$ ) و ( $C_f$ ) و المستقيمين اللذين معادلتهما :  
 $x = 1$  و  $x = \lambda$  .

\* استنتج  $A(\lambda)$  (مقدرة بوحدة المساحة) ، ثم احسب  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$  .

## الموضوع الثاني:

### التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط  $C(3; 2; 1)$ ،  $B(1; 2; 0)$ ،  $A(3; 1; 0)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \\ z = -5\alpha \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

و  $D(0; 0; m)$  حيث  $m$  عدد حقيقي موجب،  $(Q)$  مستوي معرف بـ:

1) أ\* أحسب الجداء السلمي  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$  ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من  $\sin \angle ABC$  و  $\cos \angle ABC$ .  
ب\* أحسب مساحة المثلث  $ABC$ .

ج\* بين أن شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$   $\vec{n}(1; 2; -2)$  ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

د\* بين أن  $ABCD$  رباعي وجوه و أن حجمه:  $V = \frac{2m+5}{6} uv$

2) أ\* بين أن:  $(Q)$  هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم  $[AB]$  معادلته الديكارتية:  $-2x + y = \frac{-5}{2}$

ب\* استنتج ان المستويين  $(ABC)$  و  $(Q)$  متعامدان و أنهما متقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  يطلب تعيين تمثيله الوسيط.

ج\* أحسب  $d(D; (Q))$  ثم استنتج بدلالة  $m$  المسافة بين النقطة  $D$  و المستقيم  $(\Delta)$

3) لتكن  $(S_m)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$

أ\* بين أنه من اجل عدد حقيقي  $m$  فان  $(S_m)$  سطح كرة يتعين مركزها ونصف قطرها.

ب\* عين قيمة  $m$  حتى يكون المستوي  $(ABC)$  مماسا لسطح الكرة  $(S_m)$ .

4) أكتب معادلة المستوي  $(P)$  الموازي تماما للمستوي  $(ABC)$  و يمس سطح الكرة  $(S_m)$ .

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة  $(E)$  ذات المجهولين الصحيحين  $x$  و  $y$  حيث:  $11x - 5y = 2$

أ\* أثبت أنه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  من  $\mathbb{Z}^2$  حلا للمعادلة  $(E)$  فإن  $y \equiv 4[11]$ .

ب\* استنتج حلول المعادلة  $(E)$ .

2) ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير معدوم، نضع:  $a = 5n + 2$  و  $b = 11n + 4$ .

أ\* عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$ .

ب\* عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  بحيث يكون:  $PGCD(a; b) = 2$ .

ج\* استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  بحيث يكون العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، نضع:  $A = 5n^2 + 7n + 2$  و  $B = 11n^2 + 15n + 4$ .

أ\* بين أن العدد  $(n + 1)$  يقسم كل من العددين  $A$  و  $B$ .

ب\* استنتج حسب قيم  $n$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $A$  و  $B$ .

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$(1) \begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases} \text{ : حيث } z_2 \text{ و } z_1$$

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  ذات

$$z_A = 1 - i \text{ و } z_B = 2 + \sqrt{3} + i .$$

أ/\* اكتب  $z_A$  على الشكل الأسّي .

ب/\* بين أن:  $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد  $z_B$  .

ج/\* هل توجد قيم للعدد الطبيعي  $n$  حتى تكون صورة العدد  $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$  تنتمي إلى المنصف الأول؟

(3) أ/\* أوجد لاحقة النقطة  $B'$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $r$  الذي مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $-\frac{\pi}{6}$  .

ب/\* احسب مساحة الدائرة  $(\gamma)$  التي قطرها  $[BB']$  . (مقدرة بوحدة المساحة)

ج/\* عين مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي حيث:  $\arg\left[(z - z_B)^2\right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

د/\* عين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  حتى يكون الرباعي  $AB'BC$  مستطيل، ثم اوجد  $z_I$  لاحقة مركز ثقله.

(4) نضع:  $f = ros$  (يرمز  $o$  إلى تركيب التحويلين  $S$  و  $r$ ) .

أ/\* عين العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  حيث يكون  $f$  تشابه مباشر مركزه  $O$  ونسبته  $2$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$

ب/\* أوجد مساحة صورة الدائرة  $(\gamma)$  بالتشابه المباشر  $S$  (مقدرة بوحدة المساحة) .

(5) أ/\* إذا كان  $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث  $OMM'$ ؟

ب/\* عين مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي يكون من أجلها:  $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$

## التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ/\* تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب/\* احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج/\* أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ/\* بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين  $(D)$  و  $(D')$  معادلتهما:

$y = x - e$  و  $y = -x + \ln 2 + e$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$  على الترتيب .

ب/\* ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيمين المقاربين  $(D)$  و  $(D')$  .

ج/\* بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$  هو محور تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .

(3) أرسم  $(\Delta)$ ،  $(D)$ ،  $(D')$  و  $(C_f)$

(4) ليكن  $(D_m)$  المستقيم الذي معادلته :  $y = m x - m \left( e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$  حيث  $m$  وسيط حقيقي.

أ/\* بين أن جميع المستقيمت  $(D_m)$  تشمل النقطة الثابتة  $A \left( \frac{\ln 2}{2} + e ; \frac{\ln 2}{2} \right)$ .

ب/\* ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد نقط تقاطع المستقيم  $(D_m)$  و المنحنى  $(C_f)$ .

(5) نضع :  $I = \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} [f(x) - (x - e)] dx$  ،  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dX$  ،  $n$  عدد طبيعي غير معدوم

أ/\* فسر هندسيا العدد  $I$  و احسب العدد  $I_1$ .

ب/\* بين أن :  $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج/\* عين اتجاه تغير المتتالية  $(I_n)$  ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال :  $\ln(1 + X) \leq X$  ، من أجل كل  $X \in ]0; +\infty[$

أ/\* استنتج أن :  $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب/\* اعط حصرا للعدد  $I + I_1$ .

انتهى

الموضوع الثاني

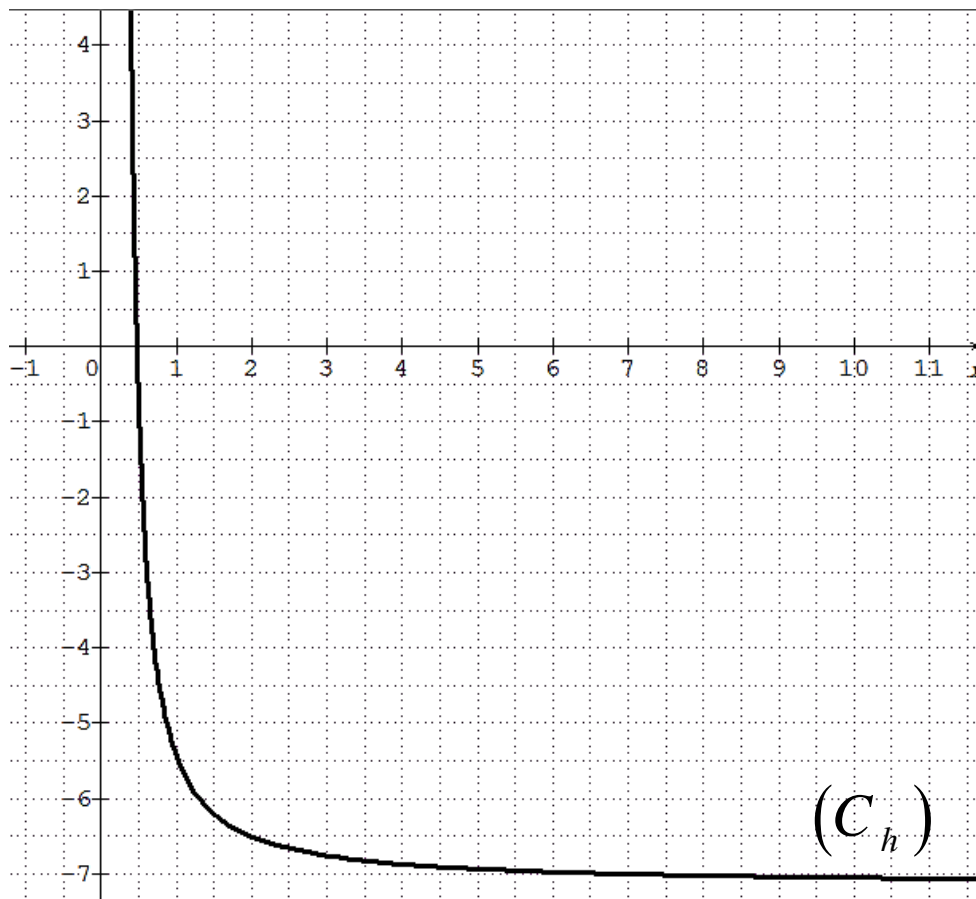
بالتوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

الملحق:

.....: الاسم

.....: اللقب

.....: القسم

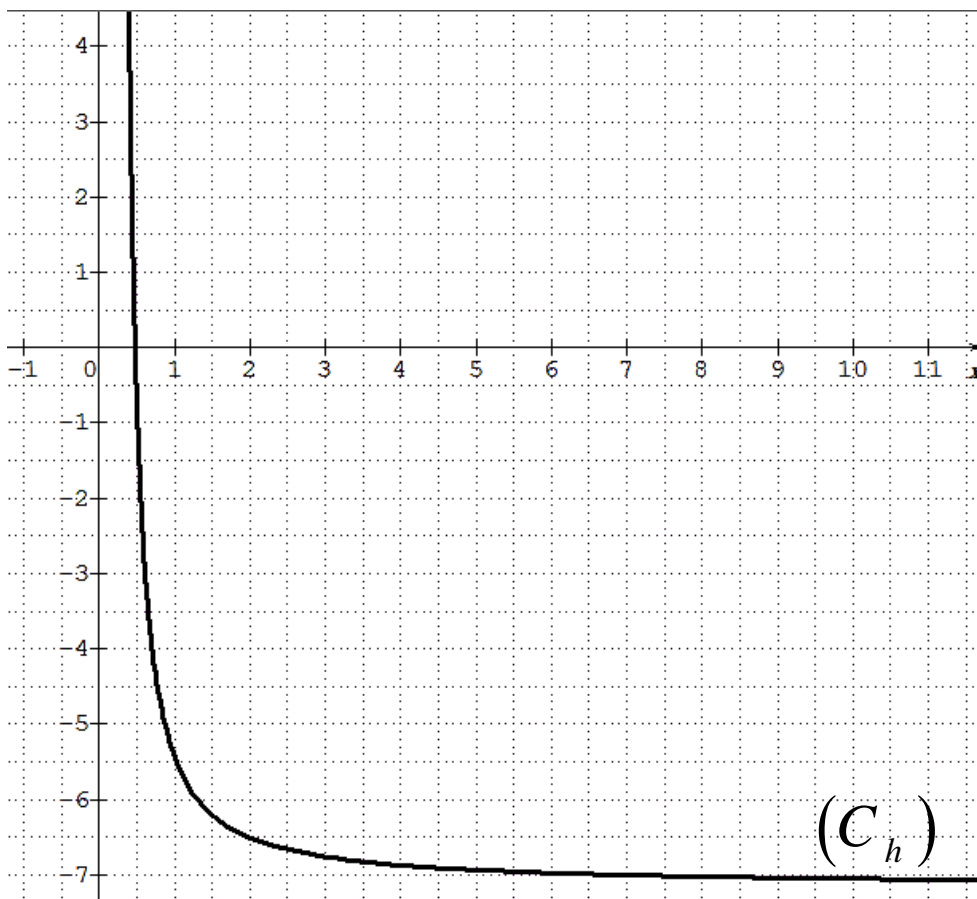


الملحق:

.....: الاسم

.....: اللقب

.....: القسم



الموضوع الاول: التمرين الأول: (04 نقاط)

1) كتابة التمثيل الوسيطى (d) : t وسيط حقيقي

$$(d): \begin{cases} x-2=t \\ \frac{y-1}{2}=t; t \in \square \\ 1-z=t \end{cases}$$

$$\text{أي أن: } x-2 = \frac{y-1}{2} = 1-z = t$$

$$\text{إذن: التمثيل الوسيطى للمستقيم (d) هو } \begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1; t \in \square \\ z=-t+1 \end{cases}$$

\* تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوى:

$$(d') : \vec{u}(1;2;-1) \text{ شعاع توجيهه } (d) , \vec{u}'(3;1;2) \text{ شعاع توجيهه } (d')$$

$$\text{بما أن } \frac{1}{3} \neq \frac{1}{1} \text{ فإن الشعاعين } \vec{u}(1;2;-1) \text{ و } \vec{u}'(3;1;2)$$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d') إما ليسا من نفس المستوى و إما متقاطعان من نفس المستوى لتكن (x;y;z) نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

$$\begin{cases} x=t+2=3t'+4... (1) \\ y=2t+1=t'+3... (2) \\ z=-t+1=2t'+3... (3) \end{cases} ; (t,t') \in \square^2$$

$$\text{بجمع (1) و (3): } t' = \frac{-4}{5} \text{ وبتعويضها في (1) أو (3)}$$

$$\text{نجد: } t = \frac{-2}{5} , \text{ الثنائية } \left( \frac{-2}{5}, \frac{-4}{5} \right) \text{ لا تحقق (2)}$$

ومنه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوى

2) أ) إيجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p1) و (p2)

$$\text{ويشملان } A(4;-7;5) \text{ و } (d) \subset (P_1) \text{ و } (d') \subset (P_2)$$

تعيين معادلة المستوى (P1) : (p1) يشمل A(4;-7;5)

وموجه بالشعاعين  $\vec{u}(1;2;-1)$  شعاع توجيهه (d) و

$$\vec{AD}(-2;8;-4) \text{ حيث } D(2;1;1) \text{ نقطة من } (d)$$

ليكن:  $\vec{n}(a;b;c)$  شعاع ناظمي للمستوي (p1) غير معدوم

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a+2b-c=0 \dots (1) \\ -2a+8b-4c=0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{نجد } 6b-3c=0 \text{ ومنه } c=2b \text{ نأخذ: } b=1 \text{ نجد } c=2$$

$$\text{و } a=0 \text{ ومنه: } \vec{n}(0;1;2) \text{ ناظمي لـ } (p_1): y+2z+d=0$$

$$A \in (P_1) \text{ معناه } 7+10+d=0 \text{ معناه } d=-3$$

$$\text{ومنه: } (P_1): y+2z-3=0$$

تعيين معادلة للمستوي (P2) : لدينا (P2) يشمل A(4;-7;5)

وموجه بالشعاعين  $\vec{u}'(3;1;2)$  شعاع توجيهه (d')

$$\vec{AC}(0;10;-2) \text{ حيث } C(4;3;3) \text{ نقطة من } (d')$$

$$\text{بنفس الطريقة } (P_2): 11x-3y-15z+10=0$$

ب) التحقق أن (p1) و (p2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

$$\text{بما أن: } \frac{0}{11} \neq \frac{1}{-3} \text{ فإن } \vec{n}(0;1;2) \text{ و } \vec{n}'(11;-3;-15) \text{ غير}$$

مرتبطين خطيا و عليه يكون المستويان (P1) و (P2) متقاطعين

$$\text{وفق مستقيم } (\Delta) \text{ لدينا: } \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha ; \alpha \in \square \\ z = 11\alpha \end{cases}$$

$$(P_2): 11x-3y-15z+10=0 , (P_1): y+2z-3=0$$

$$0 \cdot \alpha = 0 \text{ يكافئ } (-22\alpha + 3) + 2(11\alpha) - 3 = 0$$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه:  $(\Delta) \subset (P_1)$

$$0 \cdot \alpha = 0 \text{ يكافئ } 11\left(\frac{-1}{11} + 9\alpha\right) - 3(3 - 22\alpha) - 15(11\alpha) + 10 = 0$$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه:  $(\Delta) \subset (P_2)$

$$\text{نستنتج أن } (\Delta) = (P_1) \cap (P_2)$$

3) أ\* إيجاد إحداثيات A' المسقط العمودي لـ A على

المستوي (Q) : A'(x';y';z') ،  $\vec{n}_Q(11;1;-1)$  ناظمي لـ (Q)

و  $A \in (\Delta)$  . بما أن:  $11x_A + y_A - z_A \neq 2$  فإن  $A \notin (Q)$

وبالتالي  $\vec{AA}'$  يوازي  $\vec{n}_Q$  يوجد  $k \in \square$  حيث  $\vec{AA}' = k \cdot \vec{n}_Q$

$$\vec{AA}'(x'-4; y'+7; z'-5) \text{ أي}$$

$$\begin{cases} x'-4=11k \\ y'+7=k \\ z'-5=-k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x'=11k+4 \\ y'=k-7 \\ z'=-k+5 \end{cases} \text{ معناه } A' \in (Q)$$

$$k = -\frac{10}{41} \text{ معناه } 11(11k+4) + (k-7) - (-k+5) - 2 = 0$$

$$\text{بالتعويض عن قيمة } k \text{ نجد: } A' \left( \frac{54}{41}; -\frac{297}{41}; \frac{215}{41} \right)$$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوى (Q) :

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هو المستقيم (BA')

4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

$$AB = \sqrt{\frac{17150}{121}} \approx 11.9 , [AB] \text{ هي سطح كرة قطرها } [AB]$$

$$\text{ومركزها النقطة } I \left( \frac{43}{22}; -2; \frac{5}{2} \right) \text{ منتصف } [AB]$$

**التمرين الثاني: (04 نقاط)  $A_0B_0 = 8$  ، التشابه المباشر  $S$**

مركزه  $A_0$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{3\pi}{4}$  ،  $B_{n+1} = S(B_n)$  ،

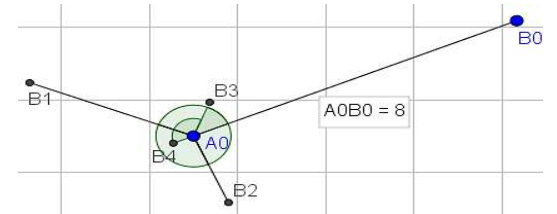
**1) إنشاء النقط  $B_1, B_2, B_3, B_4$  :**

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0 = 4 \\ (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } B_1 = S(B_0)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_2 = \frac{1}{2}A_0B_1 = 2 \\ (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_2 = S(B_1)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_3 = \frac{1}{2}A_0B_2 = 1 \\ (\overline{A_0B_2}, \overline{A_0B_3}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_3 = S(B_2)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_4 = \frac{1}{2}A_0B_3 = \frac{1}{2} \\ (\overline{A_0B_3}, \overline{A_0B_4}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_4 = S(B_3)$$



**2) اثبات أن المثلثين  $A_0B_nB_{n+1}$  و  $A_0B_{n+1}B_{n+2}$  متشابهان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :**

$$A_0B_{n+1} = \frac{1}{2}A_0B_n \text{ معناه } B_{n+1} = S(B_n)$$

$$\text{و } (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، بما أن } k \in \square$$

$$\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n} = \frac{1}{2}$$

$$(\overline{A_0B_{n+1}}, \overline{A_0B_{n+2}}) = \left( \frac{1}{2}\overline{A_0B_n}, \frac{1}{2}\overline{A_0B_{n+1}} \right) = (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}})$$

فإن المثلثين  $A_0B_nB_{n+1}$  و  $A_0B_{n+1}B_{n+2}$  متشابهان

$$\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ (ضلعان و زاوية محصورة بينهما) ومنه:}$$

**3) اثبات أن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  : نعرف**

متتالية  $(u_n)$  بـ  $u_n = B_nB_{n+1}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  .

$$\text{ومنه: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ متتالية هندسية أساسها}$$

$$\frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } u_0 = B_0B_1$$

**ب/ كتابة عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :**

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = B_0B_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**ج/ نضع المجموع:**  $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

**حساب  $\delta_n$  بدلالة  $n$  ثم إيجاد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$  :** م.ح.م هندسية

$$\delta_n = u_0 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2B_0B_1 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

ومنه:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 2B_0B_1$

**4) \*أ/ نحل في  $\square \times \square$  المعادلة:  $3x - 4y = 2$  (1)**

$$(1) \text{ يكافئ } 3x = 4y + 2 \text{ يكافئ } [4] \text{ يكافئ } 3x \equiv 2[4]$$

$$\text{يكافئ } [4] \times 7 \text{ يكافئ } 7 \times 3x \equiv 7 \times 2[4] \text{ يكافئ } 7x \equiv 14[4]$$

ومنه:  $x = 4\lambda + 2$  ،  $\lambda \in \square$  ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$y = 3\lambda + 1 \text{ إذن: } S = \{ (4\lambda + 2; 3\lambda + 1); \lambda \in \square \}$$

**ب/ تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها تكون**

**النقطة  $B_n$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$  :**

لدينا:  $(\Delta)$  العمودي على  $(A_0B_0)$  في النقطة  $A_0$  وكذلك

$$(\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) + (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) + \dots$$

$$\dots + (\overline{A_0B_{n-1}}, \overline{A_0B_n}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{3\pi}{4} = n \frac{3\pi}{4}$$

$$B_n \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ، } k \in \square$$

$$\text{نجد: } n \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يكافئ } 3n = 4\left(\frac{1}{2} + k\right)$$

$$\text{يكافئ } 3n = 2 + 4k \text{ يكافئ } 3n - 4k = 2$$

ومنه قيم  $n$  هي  $n = 4k' + 2$  ،  $k' \in \square$

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

**1) \*أ/ نبين أن المعادلة  $(E)$  تكافئ  $(z+1)\left(\frac{1}{z} - 4\bar{z} + 7\right) = 0$**

$$\text{لدينا: } (E) \dots \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

$$(z+1)\left(\frac{1}{z} - 4\bar{z} + 7\right) = 0 \text{ يكافئ } (\bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

**ب/ نحل في  $\square$  المعادلة  $(E)$  :**

$$(z+1)(z^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \text{ تكافئ } (E)$$

$$\text{يكافئ } (z+1)(z^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \text{ يكافئ } (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } \Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 \text{ ، } \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 2 - \sqrt{3}i$$

ومنه: من أجل  $k$  يسمح المجال  $[0; +\infty[$  المجموعة  $(\Gamma)$

هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة  $A$  وشعاع توجيهه  $\overline{AB}$

$$\text{لاحقته: } 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$$

**5) \* / تعيين قيمة العدد  $\alpha$  حيث**  $-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \overline{0}$

$$-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \overline{0}$$

معناه النقطة  $C$  هي مرجح الجملة  $\{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

**ب) \* / تعيين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:**

$$(*) \dots \left\| -\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} - \overline{CM} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| \overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MD} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} + \overline{MC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| -(-\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MD}) \right\| \leq 2 \left\| \overline{BC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| (-1+2-3)\overline{CM} \right\| \leq 2BC \text{ تكافئ } CM \leq BC$$

ومنه مجموعة النقط  $(E)$  هي قرص مركزه النقطة  $C$

ونصف قطره هو:  $BC = 2\sqrt{3}$

**ج) \* / استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص  $(E)$  ونصف**

**المستقيم  $(AB)$ :** لدينا القرص  $(E)$  مركزه  $C$  ونصف قطره

$BC = 2\sqrt{3}$  و  $AC = 2\sqrt{3}$  معناه  $A$  تنتمي إلى القرص  $(E)$

ومنه تقاطع القرص  $(E)$  ونصف المستقيم  $(AB)$

هو القطعة المستقيمة  $[AB]$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

1)  $g$  معرفة على  $[0; +\infty[$  :-  $g(x) = x^2 e^x$

**\* / دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$ :**

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$  :-  $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

بما ان  $g'(x) > 0$  فإن الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$

**ب) \* / استنتاج أنه:** إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان  $x > 1$  فإن  $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $x < \frac{1}{x}$  ولدينا  $g$  متزايدة تماما

على  $[0; +\infty[$  ، فإن  $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان  $x > 1$  فإن  $x > \frac{1}{x}$  ولدينا  $g$  متزايدة تماما على

$[0; +\infty[$  ، فإن  $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه:  $S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\}$

**2) \* / تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون العدد المركب**

$(z_B - z_A)^n$  عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

عددا حقيقيا سالبا معناه:

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$$

$$n = 12k + 6; k \in \mathbb{Z}$$

**ب) \* / تعيين طبيعة المثلث  $ABC$**

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان  $AB = AC = BC$ : فإن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع

**3) \* / كتابة العدد  $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$  على الشكل الأسى:**

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

**\* / استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول  $A$  إلى  $D$  وعناصره**

$$\text{المميزة: } z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C) \text{ معناه } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

معناه النقطة  $A$  صورة النقطة  $D$  بالتشابه المباشر الذي

مركزه النقطة  $C$  ونسبته  $\sqrt{3}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

**ب) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث  $ACD$**

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه}$$

اذن المثلث  $ACD$  قائم في  $C$  ومنه مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث  $ACD$  هو النقطة  $I$  منتصف الوتر  $[AD]$

$$\text{لاحقته } z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$$

**4) \* / تعيين قياس للزاوية الموجهة  $(\vec{u}; \overline{AB})$ :**

$$\text{لدينا: } (\vec{u}; \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

**\* / استنتاج  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $(z)$  حيث:**

$$z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{معناه } \overline{AM} = k \cdot \overline{AB}$$

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$\Delta = -4$  لأن  $x \in ]0; +\infty[$  من أجل كل  $x^2 - 2x + 2 > 0$

ومنه :  $(C_f)$  يقع فوق  $(C_h)$  على المجال  $]0; +\infty[$

**ج/** نبين ان المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  في النقطة التي

فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

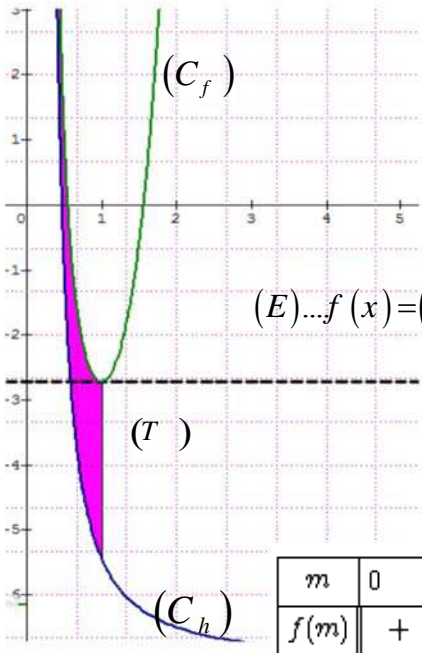
بما ان الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  فإن تمثيلها  $(C_f)$

يقبل عند كل نقطة فاصلتها من  $]0; +\infty[$  مماسا

$$f'(1) = 0; f(1) = -e, (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ومنه:  $(T): y = -e$

**4** رسم  $(T)$  و  $(C_f)$  :



**ب/** إيجاد قيم  $m$  حتى

تقبل المعادلة  $(E)$

حليين متمايزين :

لدينا  $m$  وسيط حقيقي

حيث  $m > 0$

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

المعادلة  $(E)$  تكافئ

$$f(x) = f(m)$$

إشارة  $f(m)$  :

$m$	0	$\alpha$	1	$E + \infty$
$f(m)$	+	0	-	-

من أجل  $m = 1$  المعادلة  $(E)$  تقبل حلا مضاعفا .

ومنه: المعادلة  $(E)$  تقبل حليين متمايزين لما

$$m \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

**5** نبين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = \int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt$$

الدالة:  $(t^2 - 2t + 2)e^t \rightarrow t$  مستمرة على  $]0; +\infty[$  فهي تقبل

دوالا أصلية على  $]0; +\infty[$

$$\left[ (t^2 - 4t + 6)e^t - 3e \right]' = (t^2 - 2t + 2)e^t$$

$$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = \int_1^x \left[ (t^2 - 4t + 6)e^t - 3e \right]' dt$$

$$= (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

**2** معرفة على  $]0; +\infty[$  :  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

**أ/** حساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

**ب/** نبين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  دالتها المشتقة  $f'$  :

$$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

**ج/** تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	$1 + \infty$
$f'(x)$	-	0 +

إشارة  $f'(x)$  :

$f$  متزايدة تماما على  $]1; +\infty[$

$f$  متناقصة تماما على  $]0; 1[$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	$-e = -2.71$	$+\infty$

**3** نبين أن المعادلة:  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل

حليين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $1.5 < \beta < 1.6$  و  $0.5 < \alpha < 0.6$

$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0$  تكافئ  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$

تكافئ  $f(x) = 0$  ، لدينا:  $f(0.5) \approx 1.25$  ،  $f(0.6) \approx -0.74$  ،

بما ان الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماما على  $]0.5; 0.6[$

$f(0.6) \times f(0.5) < 0$  فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل حل وحيد  $\alpha$

حيث:  $f(\alpha) = 0$  ،  $0.5 < \alpha < 0.6$

لدينا:  $f(1.5) \approx -0.60$  ،  $f(1.6) \approx 0.44$

بما ان الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على  $]1.5; 1.6[$

$f(1.6) \times f(1.5) < 0$  فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة  $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$  تقبل حل وحيد  $\beta$

حيث:  $f(\beta) = 0$  ،  $1.5 < \beta < 1.6$

**\*/** استنتاج أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطتين :

بما ان المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حليين  $\alpha$  و  $\beta$  فإن  $(C_f)$

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما  $\alpha$  و  $\beta$

**ب/** دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمنحنى  $(C_h)$  :

**ب/ استنتاج**  $A(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بـ  $(C_h)$

و  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = \lambda$  و  $x = 1$  مقدره بوحدة المساحة) حيث  $\lambda \in ]0; 1]$

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(t) - h(t)] dt = - \int_\lambda^1 [f(t) - h(t)] dt$$

$$A(\lambda) = - \left[ (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda - 3e \right] = (3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda) u a$$

**حساب**  $A(\lambda)$  **حساب**  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda] = 3e$$

**الموضوع الثاني**

**التمرين الاول : (04 نقاط)**

$D(0; 0; m)$  و  $C(3; 2; 1)$  ،  $B(1; 2; 0)$  ،  $A(3; 1; 0)$

**1) حساب**  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$  ،  $\overline{BC}(2; 0; 1)$  ،  $\overline{BA}(2; -1; 0)$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2(2) + 0(-1) + 1(0) = 4$$

**استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ**  $\cos \overline{ABC}$  و

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BC}\| \cos \overline{ABC} \quad \text{لدينا} \quad \sin \overline{ABC}$$

$$\cos \overline{ABC} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BC}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \overline{ABC}^2 = 1 - \cos \overline{ABC}^2$$

$$\sin \overline{ABC} = -\frac{3}{5} \quad \text{أو} \quad \sin \overline{ABC} = \frac{3}{5}$$

**حساب مساحة المثلث**  $ABC$  **ولتكن**  $S_{ABC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin \overline{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2} ua$$

**ج/ نبين أن**  $\vec{n}(1; 2; -2)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$

$$\vec{n} \cdot \overline{BC} = 1(2) + 2(0) - 2(1) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overline{BA} = 1(2) + 2(-1) - 2(0) = 0$$

فإن  $\vec{n}(1; 2; -2)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$

**استنتاج معادلة ديكرتية للمستوي**  $(ABC)$

$$(ABC): x + 2y - 2z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \quad \text{تكافئ} \quad 3 + 2 + d = 0 \quad \text{تكافئ} \quad d = -5$$

$$(ABC): x + 2y - 2z - 5 = 0$$

**د/ تبيان أن**  $ABCD$  رباعي وجوه:

نبين أن النقطة  $D$  لا تنتمي الى المستوي  $(ABC)$

لدينا  $0 + 2(0) - 2m - 5 = 0$  أي  $m = -\frac{5}{2}$  إذن:  $D \notin (ABC)$

لأن  $m$  عدد حقيقي موجب ومنه:  $ABCD$  رباعي وجوه

**نبين أن حجم رباعي الوجوه**  $ABCD$  هو  $V = \frac{2m+5}{6} uv$

لدينا  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$  هو الارتفاع

$$d(D; (ABC)) = \frac{|-2m - 5|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2m+5}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2m+5}{3} = \frac{2m+5}{6} uv$$

**2) نبين أن**  $(Q)$  هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم

$[AB]$  **معادلته الديكرتية**  $-2x + y = \frac{-5}{2}$  هناك عدة طرق منها

**إحداثيات**  $I(2; \frac{3}{2}; 0)$  منتصف  $[AB]$  تحقق التمثيل الوسيط لـ

$(Q)$  والشعاع  $\overline{AB}(2; -1; 0)$  عمودي على شعاعي توجيهه

$\vec{u}(1; 2; 0)$  و  $\vec{v}(-2; -4; -5)$  ومنه  $(Q)$  مستوي محوري لـ  $[AB]$

**تعيين معادلة**  $(Q)$ : لدينا

$$z = -5\alpha \quad \text{نجد: (1) من (Q):} \begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \dots (1) \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \dots (2) \\ z = -5\alpha \dots (3) \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

يكافئ  $\alpha = \frac{z}{-5}$  بالتعويض في (1) نجد:  $x = 2 - 2\left(\frac{z}{-5}\right) + \beta$

ومنه:  $\beta = x - 2 - \frac{2z}{5}$  نعوض قيمة  $\alpha$  و  $\beta$  في (2) نجد:

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \quad \text{ومنه} \quad y = \frac{3}{2} - 4\left(\frac{z}{-5}\right) + 2\left(x - 2 - \frac{2z}{5}\right)$$

$$-4x + 2y + 5 = 0 \quad \text{هي (Q) معادلة}$$

**بطريقة أخرى:**  $(Q)$  يشمل  $I(2; \frac{3}{2}; 0)$  منتصف  $[AB]$

و  $\overline{AB}(-2; 1; 0)$  شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيط يحقق

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \quad \text{(Q) ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم} [AB]$$

**استنتاج ان المستويين**  $(ABC)$  و  $(Q)$  **متعامدان وهما**

**مقاطعان وفق مستقيم**  $(\Delta)$  **يطلب تعيين تمثيله الوسيط:**

$$\vec{n} \cdot \overline{AB} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1) + 0 \cdot (-2) = 0 \quad \text{فإن (Q)}$$

و  $(ABC)$  متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$ .

**تعيين التمثيل الوسيط للمستقيم**  $(\Delta)$ :

$$x + 2y - 2z - 5 = 0 \dots (1)$$

$$-4x + 2y + 5 = 0 \dots (2) \quad \text{ب طرح (2) من (1) نجد:}$$

$$n \in \mathbb{N}^* , b = 11n + 4 \text{ و } a = 5n + 2$$

$$11a - 5b = 11(5n + 2) - 5(11n + 4) = 55n + 22 - 55n - 20 = 2$$

ومنه  $d \in D_2 = \{1; 2\}$  : إذن  $d/2$  :

**ب/** \*تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  بحيث يكون

$$PGCD(a; b) = 2 \text{ لدينا } : PGCD(a; b) = 2$$

معناه 2 يقسم  $a$  و 2 يقسم  $b$  معناه 2 يقسم  $b - 2a$

أي 2 يقسم  $11n + 4 - 2(5n + 2)$  وبالتالي 2 يقسم  $n$ .

ومنه  $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$  : الشكل من الشكل :

**ج/** \*استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  بحيث يكون

العددان  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل  $PGCD(a; b) = 2$  قيم  $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$  :

ومنه : قيم  $n$  حيث  $PGCD(a; b) = 1$  هي  $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}$  :

**(3) \*أ/** نبين أن العدد  $(n+1)$  يقسم كل من العددين  $A$  و  $B$

$$n \in \mathbb{N} , B = 11n^2 + 15n + 4 \text{ و } A = 5n^2 + 7n + 2$$

$$B = (n+1)(11n+4) = b(n+1) , A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$$

ومنه  $(n+1)$  يقسم كل من العددين  $A$  و  $B$

**ب/** \*استنتاج حسب قيم  $n$  القاسم المشترك الأكبر للعددين

$A$  و  $B$  :

$$PGCD(A; B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a; b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان  $PGCD(a; b) = 2$  معناه  $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1)2 = 4\alpha + 2$$

الحالة 2: إذا كان  $PGCD(a; b) = 1$  معناه  $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1 + 1)1 = 2\alpha + 2$$

**التمرين الثالث (05 نقاط)**

**(1) تعيين العددين المركبين  $z_1$  و  $z_2$  حيث :**

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \dots (1) \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2iz_1 + z_2 = -i + \sqrt{3} \dots (1') \\ \sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1') و (2):  $\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3}(1 - i)$  ومنه  $z_1 = 1 - i$

بالتعويض في (1) نجد :  $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

**(2) \*أ/** كتابة  $z_A$  على الشكل الأسّي :  $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

**ب/** \*نبين أن :  $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i}{2}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \frac{(1 + \sqrt{3})i}{2} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$5x - 2z - 10 = 0$  نضع  $z = t$  (  $t$  وسيط حقيقي ) نجد

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \text{ إذن : } y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \text{ و } x = \frac{2}{5}t + 2$$

**ج/** \*حساب  $d(D; (Q))$  ثم استنتاج بدلالة  $m$  المسافة بين

$$D \text{ و } (\Delta) : d(D; (Q)) = \frac{|-4(0) + 2(0) + 5|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بمأن  $(Q)$  و  $(ABC)$  متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D; (\Delta))^2 = d(D; (Q))^2 + d(D; (ABC))^2$$

$$\text{ومنه : } d(D; (\Delta)) = \sqrt{\frac{5}{4} + \left(\frac{2m+5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16m^2 + 80m + 145}}{6}$$

**(3) \*أ/** تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $m$  -  $(S_m)$  سطح كرة

يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$$

ومنه :  $x^2 + y^2 + (z - m)^2 = 9$  إذن :  $(S_m)$  سطح

كرة مركزها النقطة  $D(0; 0; m)$  و نصف قطرها  $r = 3$ .

**ب/** \*تعيين  $m$  حتى يكون المستوي  $(ABC)$  مماسا لسطح

الكرة  $(S_m)$  :  $(ABC)$  مماس لسطح الكرة  $(S_m)$  يعني

$$d(D; (ABC)) = 3 \text{ أي أن } \frac{2m+5}{3} = 3 \text{ ومنه } m = 2$$

**(4) معادلة المستوي  $(P)$  الموازي تماما للمستوي  $(ABC)$**

ويعبر  $(S_m)$  : لدينا :  $(P) : x + 2y - 2z + d = 0$

المستوي  $(P)$  مماس لـ  $(S_m)$  يعني :

$$|-4 + d| = 9 \text{ أي } d(D; (P)) = \frac{|-4 + d|}{3} = 3$$

ومنه :  $d = 13$  أو  $d = -5$  هو المستوي  $(ABC)$

إذن :  $(p) : x + 2y - 2z + 13 = 0$

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

**(1) \*أ/** إثبات أن :  $y \equiv 4[11]$  ،  $11x - 5y = 2$  ،  $11x - 5y = 2$

يكافئ  $11x - 5y = 2$  ومنه  $5y = 11x + 2$  ومنه  $5y \equiv -2[11]$

أي  $5y \equiv 20[11]$  ومنه  $y \equiv 4[11]$

**ب/** \*استنتاج حلول المعادلة  $(E)$  :

$y \equiv 4[11]$  معناه  $y = 11k + 4$  مع  $k \in \mathbb{Z}$  ، نعوض قيمة

$y$  في المعادلة  $(E)$  نجد :  $x = 5k + 2$

ومنه :  $S = \{(11k + 4; 5k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$

**(2) \*أ/** تعيين القيم الممكنة لـ  $d = PGCD(a; b)$  :

**\*/استنتاج الشكل الأسي للعدد  $z_B$  :**

$$z_B = z_A (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ومنه } z_B = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}}$$

**ج\*/تعيين قيم للعدد الطبيعي  $n$  حتى تكون صورة العدد**

**تتنمى إلى المنصف الأول إن وجدت :**

$$\left( \frac{z_B}{z_A} \right)^n = (1 + \sqrt{3})^n e^{i \frac{n\pi}{3}} \text{ لدينا } \arg \left( \frac{z_B}{z_A} \right)^n = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{أي } : \arg \left( \frac{z_B}{z_A} \right)^n \equiv \frac{n\pi}{3} [2\pi] \text{ ومنه } : \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ، } k \in \mathbb{Z}$$

أي  $4n - 12k = 3$  ،  $PGCD(12; 4) = 4$  لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول إذن لا يوجد قيم لـ  $n$  تحقق المطلوب .

**(3) \*/إيجاد لاحقة النقطة  $B'$  صورة النقطة  $B$  بالدوران**

**$r$  الذي مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $-\frac{\pi}{6}$**

عبارة الدوران  $r$  من الشكل :  $z' = e^{-i \frac{\pi}{6}} z$

$$z_{B'} = e^{-i \frac{\pi}{6}} z_B = e^{-i \frac{\pi}{6}} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}} = \overline{z_B} = 2 + \sqrt{3} - i$$

**ب\*/حساب مساحة الدائرة  $(\gamma)$  التي قطرها  $[BB']$  لدينا**

$$R = \frac{BB'}{2} = \frac{|z_{B'} - z_B|}{2} = \frac{|-2i|}{2} = \frac{2}{2} = 1, S = \pi R^2$$

$$\text{ومنه } : s = \pi u a$$

**ج\*/تعيين مجموعة النقط  $(z)$  من المستوى حيث:**

$$\arg \left[ (z - z_B)^2 \right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$$

$$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ومنه } 2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{تفسيرها : } (\vec{u}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم  $(OB)$  ماعدا النقطة  $B$  .

**د\*/تعيين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  حتى يكون الرباعي  $AB'BC$  مستطيل:**

$$\left( \overline{B'B}; \overline{B'A} \right) = \arg \left( \frac{z_A - z_{B'}}{z_B - z_{B'}} \right) = \arg(z_A - z_{B'}) - \arg(z_B - z_{B'})$$

$$\left( \overline{B'B}; \overline{B'A} \right) = \arg(1 - i - 2 - \sqrt{3} + i) - \arg(2i) = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\left( \overline{B'B}; \overline{B'A} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ : ومنه نجد :}$$

$$z_C = 1 + i \text{ ومنه } \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 1 \end{cases} \text{ معناه } \overline{B'B} = \overline{AC}$$

**بطريقة اخرى** لدينا  $z_{B'} = \overline{z_B}$  معناه  $B$  و  $B'$  متناظران

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا :  $A(1; -1)$  و  $B'(2 + \sqrt{3}; -1)$  أي :  $A$  و  $B'$  لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم  $y = -1$  موازي لمحور الفواصل ومنه نجد :  
 $z_C = \overline{z_A} = 1 + i$

**\*/إيجاد  $z_I$  لاحقة مركز ثقل المستطيل  $AB'BC$**

$$z_I = \frac{1 - i + 4 + 2\sqrt{3} + 1 + i}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } z_I = \frac{z_A + z_B + z_{B'} + z_C}{4}$$

**(4) \*/تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  حيث يكون**

**$f$  تشابه مباشر مركزه  $O$  ونسبته 2 وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  :  $f = ros$**

$S$  تشابه مباشر مركزه  $O$  ونسبته  $k$  وزاويته  $\theta$  أي  $ros$  تشابه مباشر مركزه  $O$  ونسبته  $k$  وزاويته  $\theta - \frac{\pi}{6}$

$$\text{ومنه } : k = 2 \text{ و } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ أي } \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ومنه عبارة التشابه  $S$  هي :  $z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z$  ونكتب  $z' = 2iz$

**ب\*/إيجاد مساحة صورة الدائرة  $(\gamma)$  بالتشابه المباشر  $S$  :**

$$s' = k^2 s = 4\pi u a \text{ حيث } S' \text{ هي } S \text{ معناه } : s' = k^2 s = 4\pi u a$$

**(5) \*/إذا كان  $S(M) = M'$  إيجاد طبيعة المثلث  $OMM'$  :**

$$z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z \text{ ومنه } : \frac{z'}{z} = 2e^{i \frac{\pi}{2}} \text{ معناه } \arg \frac{z'}{z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{معناه } \left( \overline{OM}; \overline{OM'} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } \left| \frac{z'}{z} \right| = 2 \text{ أي } |z'| = 2|z|$$

معناه  $\| \overline{OM'} \| = 2 \| \overline{OM} \|$  ومنه : المثلث  $OMM'$  قائم في  $O$

**ب\*/تعيين مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي يكون من**

$$\text{أجلها : } \overline{AM}(x - 1; y + 1), \overline{AM}(z - z_A) : \overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$$

$$\text{و } \overline{AM'}(z' - z_A) \text{ أي } \overline{AM'}(2iz - z_A) \text{ ومنه } \overline{AM'}(-2y - 1; 2x + 1)$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0 \text{ معناه } (x - 1)(-2y - 1) + (y + 1)(2x + 1) = 0$$

$$\text{معناه } x + 3y + 2 = 0$$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته  $x + 3y + 2 = 0$  .

**التمرين الرابع : (07 نقاط)**

**(1) \*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :**

$$f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = x - e + \ln \left( \frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}} \right)$$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)}) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

**ب \*/ حساب النهايات**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**ج\*/دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :**

$$f'(x) = \frac{1 - 2e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}} : \square \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \square$$

حيث  $m$  وسيط حقيقي.

$$\text{معناه } y = m x - m \left( e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{معناه } m \left( x - e - \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} - y = 0$$

$$\frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ و } x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0 \text{ ومنه: جميع المستقيمات}$$

$$(D_m) \text{ تشمل النقطة الثابتة } A \left( \frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

**ب/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد نقط**

**تقاطع المستقيم  $(D_m)$  و المنحنى  $(C_f)$  :**

$$\text{المستقيم } (D_m) \text{ يدور حول النقطة الثابتة } A \left( \frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

إذا كان  $m = 1$  فإن  $(D_m)$  هو  $(D)$  لا توجد نقط تقاطع

إذا كان  $m = -1$  فإن  $(D_m)$  هو  $(D')$  لا توجد نقط تقاطع

إذا كان  $m = 0$  فإن  $(D_m)$  هو  $(D_0): y = \ln \sqrt{2}$  لا توجد نقط تقاطع

إذا كان  $m \in ]-1; 1[$  فإنه لا توجد نقط تقاطع

إذا كان  $m \in ]-\infty; -1[$  فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان  $m \in ]1; +\infty[$  فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

**5/ التفسير الهندسي العدد  $I$  :** هو مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم المقارب  $(D)$  والمستقيمين

$$\text{الذيهم معادلتيهما } x = \ln \sqrt{2} + e, \quad x = \ln \sqrt{3} + e$$

$$\text{حساب العدد } I_1 : I_1 = \int_0^1 \ln(1+X) dX \text{ بالمكاملة بالتجزئة}$$

$$\text{بوضع: } u(X) = \ln(1+X), \quad u'(X) = \frac{1}{1+X}$$

$$v(X) = X, \quad v'(X) = 1$$

$$I_1 = [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 \frac{X+1-1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 1 dX + \int_0^1 \frac{1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X) - X + \ln(1+X)]_0^1 = \ln 4 - 1$$

$$\text{ب/ نبيّن أن } 0 \leq I_n \leq \ln 2 : \text{ لدينا } I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dX$$

$$0 \leq \ln(X^n + 1) \leq \ln 2 \text{ معناه } 1 \leq X^n + 1 \leq 2 \text{ معناه } 0 \leq X \leq 1$$

$$\text{ومنه: } 0 \leq I_n \leq \ln 2 \text{ اذن } 0 \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX \leq \int_0^1 \ln 2 dX$$

**ج/ تعيين اتجاه تغير المتتالية  $(I_n)$  ثم استنتاج أنها متقاربة:**

$$\text{بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد } \begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases}$$

$$x = e + \ln \sqrt{2} \text{ معناه } 1 - 2e^{-2(x-e)} = 0 \text{ معناه } f'(x) = 0$$

$x$	$-\infty$	$e + \ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	○	+

الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $[e + \ln \sqrt{2}; +\infty[$

الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $] -\infty; e + \ln \sqrt{2}]$

**تشكيل جدول تغيراتها :**

$x$	$-\infty$	$\ln 2/2 + e$	$+\infty$
$f'(x)$	—	○	+
$f(x)$	$+\infty$	$3 \ln 2/2 + e$	$+\infty$

**2/ نبيّن أن  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين  $(D)$  و  $(D')$**

**معادلتاهما:  $y = x - e$  و  $y = -x + \ln 2 + e$  عند  $+\infty$**

**و عند  $-\infty$  على الترتيب: بما أن**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + e + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2] = 0$$

فإن:  $(D)$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$

و  $(D')$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$

**ب/ دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(D)$  و  $(D')$**

$$\text{لدينا: } f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$\ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > \ln 1 = 0 \text{ معناه } 1 + 2e^{-2(x-e)} > 1$$

ومنه:  $f(x) - (x - e) > 0$  إذن  $(C_f)$  يقع فوق م.م  $(D)$

$$\text{لدينا: } f(x) - (-x + e + \ln 2) = \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$\ln(2 + e^{2(x-e)}) > \ln 2 \text{ معناه } 2 + e^{2(x-e)} > 2$$

و  $f(x) - (-x + e + \ln 2) > 0$  إذن  $(C_f)$  يقع فوق م.م  $(D')$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$\text{ج/ نبيّن أن المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$$

**هو محور تناظر للمنحنى  $(C_f)$  :**

من أجل كل  $x$  من  $\square$  :  $\square \left( 2 \left( \frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right)$  من  $\square$  ، لدينا

$$f \left( 2 \left( \frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right) = f(\ln 2 + 2e - x)$$

$$= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x)$$

ومنه:  $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$  محور تناظر للمنحنى  $(C_f)$

**3/ رسم  $(\Delta)$  ،  $(D)$  ،  $(D')$  و  $(C_f)$  :**

**4/ نبيّن أن جميع المستقيمت  $(D_m)$  تشمل النقطة الثابتة**

$$A \left( \frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right) : (D_m): y = m x - m \left( e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

**(6) باستعمال:**  $\ln(1+X) \leq X$  من اجل كل  $X \in ]0; +\infty[$

**أ\*/ استنتاج أن:**  $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \leq X$  من اجل كل  $X \in ]0; +\infty[$

لدينا:  $1 + 2e^{-2(x-e)} > 0$  بوضع:  $X = 1 + 2e^{-2(x-e)}$  نجد:  
وبالتالي  $0 \leq \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) \leq 2e^{-2(x-e)}$

$$0 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) dx \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx$$

ومنه:  $0 \leq -1 + \ln 4 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

اذن:  $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

**ب\*/ اعطاء حصر للعدد  $I + I_1$ :**

$$0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx = - \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)} dx = - \left[ e^{-2(x-e)} \right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

ومنه:  $0 \leq I + I_1 \leq \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1)$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$  ومنه: المتتالية  $(I_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}^*$

بما ان  $(I_n)$  محدودة من الاسفل بالصفر ( $0 \leq I_n \leq \ln 2$ )

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

**ج\*/ تعيين اتجاه تغير المتتالية  $(I_n)$  ثم استنتاج أنها متقاربة:**

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases}$$

بضرب أطراف المتباينة (1) في  $X^n$  نجد

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1)$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$  ومنه: المتتالية  $(I_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}^*$

بما ان  $(I_n)$  محدودة من الاسفل بالصفر ( $0 \leq I_n \leq \ln 2$ )

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

09

**(3) رسم  $(\Delta)$ ,  $(D)$ ,  $(D')$  و  $(C_f)$ :**

