

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التربية الوطنية

ثانويات: 19 مارس 1962 عبد العزيز الشريف  
متقن ميلودي العروسي  
(دورة: ماي 2015)

مديرية التربية لولاية الوادي  
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي  
الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 ساعات ونصف

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:  
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . نعتبر النقط  $A(-1; 0; 1)$ ،  $B(1; 1; 0)$  و  $C(0; -1; -4)$ .

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

و ليكن  $(\Delta)$  المستقيم المعرف بتمثيله الوسيط التالي :

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + 3 \\ y = -\alpha + 2 \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$$

(P) المستوي المعرف بتمثيله الوسيط:

أجب بصحيح أو خطأ على الجمل التالية مع التعليل:

1. النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم  $(\Delta)$

2. المستوي (P) له معادلة ديكارتية من الشكل  $2x + y + z - 8 = 0$

3. المستقيم  $(\Delta)$  يعامد المستوي (P)

4. النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AC]

التمرين الثاني: (4.5 نقط)

(I) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة:  $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i) = 0$

(II) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها:

$$z_A = -2, \quad z_B = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_C = -z_B$$

1. بين أن  $|z_A - z_B|^2 + |z_A - z_C|^2 = |z_B - z_C|^2$  ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2. أثبت ان النقط A، B و C تنتمي الى نفس الدائرة، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

3. أ عين  $z_D$  لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه O نسبته -1

ب ما طبيعة الرباعي ABCD

4. بين ان صورة B بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة

5. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z ( $z \neq -2$ ) النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث  $z' = \frac{iz - \sqrt{3} + i}{z + 2}$

أ اثبت أن  $\arg(z') \in \left( \frac{\pi}{2}; \pi \right)$

ب عين مجموعة النقط M بحيث يكون z' تخيلي صرف موجب تماما

**التمرين الثالث ( 4,5 نقط )**

نعبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  :  $u_0 = e^3 - 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = e^{-3} - 1 + e^{-3}u_n$

1. احسب  $u_1$  ،  $u_2$  ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > -1$ .

2. أ. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما

ب استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ، ثم احسب نهايتها

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

أ. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$

ب أكتب بدلالة  $n$  ، كلا من  $u_n$  و  $v_n$  ، ثم احسب من جديد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج. عين مجموعة الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث يكون  $v_n > 2 \times 10^{-3}$

4. أ. احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

ب ليكن الجداء  $P_n$  حيث  $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

بين أن :  $\ln(P_n) \sim \frac{n+1}{2} (2 \ln 2 + \dots)$  ثم استنتج بدلالة  $n$

**التمرين الرابع (7نقط)**

نعبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. احسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها

3. احسب من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) - f(-x)$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا

4. أ. بين أن المعادلة  $f(x) = \alpha$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,1 < \alpha < 1,2$

ب من أجل اي قيمة للعدد الحقيقي  $m$  يكون العدد  $(-\alpha)$  حلا للمعادلة  $f(x) = m$

5. أ. بين أنه من كل عدد حقيقي  $x$  فان :  $f(x) = 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

ب بين ان المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + \ln 4$  و المستقيم  $(\Lambda)$  ذو المعادلة  $y = x + 2 + \ln 4$  مستقيمان

مقاربان للمنحنى  $(C_f)$  ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة الى كل منهما

6. ارسم  $(\Delta)$  ،  $(\Lambda)$  و  $(C_f)$

7. ليكن  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماما ،  $A(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين

الذين معادلتيهما  $x = \lambda$  و  $x = 0$

أ. اعتمادا على السؤال (5) أ. بين أن :  $A(\lambda) = \ln \left( \frac{2e^\lambda}{e^\lambda + 1} \right)$

ب عين قيمة العدد  $\lambda$  بحيث يكون  $A(\lambda) = 1$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . نعتبر النقط  $A(2;1;-4)$ ،  $B(-2;2;-1)$  و  $C(0;3;-4)$  والمستوي (P) الذي معادلته  $x - y + z + 1 = 0$

1. بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستوي (Q) بحيث الشعاع  $\vec{n}(1;1;1)$  ناظميا له، ثم اكتب معادلة ديكارتية لـ (Q)
2. بين أن (P) و (Q) غير متوازيين و غير متعامدين
3. عين تمثيل وسيطي للمستقيم  $\Delta$  تقاطع المستويين (P) و (Q)
4. لتكن  $\Omega(1;0;1)$  نقطة من الفضاء  
أ. بين ان النقطة  $\Omega$  متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)  
ب. عين معادلة سطح الكرة (S) ذو المركز  $\Omega$  و المماس لـ (P) و (Q)  
ج. عين احداثيات النقطتين D و H نقطتي التماس بين (S) و (P) و بين (S) و (Q) على الترتيب
5. لتكن  $E\left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$  هي المسقط العمودي لـ  $\Omega$  على المستقيم  $\Delta$ ، احسب المسافة بين  $\Omega$  و  $\Delta$

### التمرين الثاني: (4,5 نقط)

- I حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة  $(z+2)(z^2+z+1)=0$
- II في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(\rho; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$  ذات اللواحق  

$$z_E = \overline{z_D}$$
،  $z_D = 2(1 + \sqrt{3})i$ ،  $z_C = -2$ ،  $z_B = \overline{z_A}$ ،  $z_A = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 
  1. اكتب  $(z_A)$  على الشكل الاسي ثم علم النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$
  2. ليكن  $R$  التحويل النقطي الذي يحول  $M(z)$  الى  $M'(z')$  حيث:  $\frac{z'+2}{z+2} = -z_A$   
أ. ما طبيعة التحويل  $R$  و حدد عناصره المميزة  
ب. لتكن النقطة  $F$  حيث:  $R(D) = F$ ، بين أن  $z_F = 1 + \sqrt{3}i$   
ج. اكتب العدد  $\frac{z_E - z_F}{z_D - z_F}$  على الشكل الجبري ثم استنتج ان المستقيمين  $(FD)$  و  $(EF)$  متعامدان
  3. لتكن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, |z_A|); (B, |z_B|); (C, |z_C|)\}$   
أ. عين  $z_G$  لاحقة  $G$   
ب. عين مجموعة النقط  $M$  حيث:  $\overline{MG} = \lambda \overline{AB}$  لما يسمح  $\lambda$  مجموعة الاعداد الحقيقية  
ج. اكتب معادلة ديكارتية لهذه المجموعة

**التمرين الثالث: (4,5 نقط)**

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ:  $u_1 = e^2$  ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $u_{n+1} = e^{\frac{-1}{2}} \sqrt{u_n}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $u_n > \frac{1}{e}$

2. أ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ب- استنتج أن  $(u_n)$  متناقصة تماما

ج هل  $(u_n)$  متقاربة؟ إذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

3.  $(v_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  بـ :  $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$

أ برهن أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

4. احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$

**التمرين الرابع: (07 نقط)**

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (وحدة الطول 2cm)

1. احسب نهايتي الدالة  $f$  عند اطراف مجموعة تعريفها

2. أ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  فإن:  $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها

3. اكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0

4. بين ان المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها

5. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $3,9 < \alpha < 4$

6. ارسم المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$

7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و اشارة حلول المعادلة  $f(x) = 3m$

8.  $F$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ :  $F(x) = \frac{3x}{x-1} - \ln(x-1) - 3x$

أ بين ان  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$

ب لتكن  $A(\alpha)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و محور الفواصل و المستقيمين اللذين

معادلتيهما  $x = \alpha$  و  $x = 0$

بين أن :  $A(\alpha) = \left( \frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1} \right)^2$  ثم اوجد حصر  $A(\alpha)$

الإجابة النموذجية لامتحان البكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 04 نقط )

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل على الجمل التالية:

السؤال	الإجابة	التعليل
1. النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $(\Delta)$	خطأ	لأن: $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ إذن: $\overrightarrow{U}_{(\Delta)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ لكن $\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{U}_{(\Delta)} = 0$ $B \notin (\Delta)$
2. المستوي (P) له معادلة ديكارتية من الشكل $2x + y + z - 8 = 0$	خطأ	لأن: لدينا $\begin{cases} x = \alpha + \beta + 3 \dots (1) \\ y = -\alpha + 2 \dots (2) \\ z = \alpha + 2\beta \dots (3) \end{cases}$ نجد (2) نجد $\alpha = 2 - y$ و بالتعويض في (1) نجد $\beta = x + y - 5$ وبالتعويض في (3) نجد $z = 2 - y + 2x + 2y - 10$ ومنه $(P): 2x + y - z - 8 = 0$
3. المستقيم $(\Delta)$ يعامد المستوي (P)	صحيح	لأن: لدينا $\overrightarrow{U}_{(\Delta)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ إذن $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}$ أي $\vec{n}_P \parallel \overrightarrow{U}_{(\Delta)}$ ومنه $(\Delta) \perp (P)$
4. النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AC]	خطأ	لأن: $BA \neq BC$ $BA = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{6}$ $BC = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-1)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{19}$

التمرين الثاني: (4.5 نقط) (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة:  $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$

نضع  $w = \alpha + \beta i$  جذر لـ  $z^2$  إذن  $w^2 = z^2$  أي  $\begin{cases} z+2=0 \\ z^2+2-2\sqrt{3}i=0 \end{cases}$  بالجمع (1) و (2) نجد  $2 = 2\alpha^2$  أي  $\alpha = 1$  أو  $\alpha = -1$  ومنه يكون  $\begin{cases} 4 = \alpha^2 + \beta^2 \dots (1) \\ -2 = \alpha^2 - \beta^2 \dots (2) \\ 2\sqrt{3} = 2\alpha\beta \dots (3) \end{cases}$

وبالتعويض في المعادلة (3) نجد : إذا كان  $\alpha = 1$  فإن  $\beta = \sqrt{3}$  وإذا كان  $\alpha = -1$  فإن  $\beta = -\sqrt{3}$  وبالتالي  $w_2 = -1 - \sqrt{3}i$  و  $w_1 = 1 + \sqrt{3}i$  إذن مجموعة حلول المعادلة  $0 = (z+2)(z^2 + 2 - 2\sqrt{3}i) = 0$  هي:  $S = \{-2, -1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\}$

(II)

**6.** بين أن  $|z_A - z_B|^2 + |z_A - z_C|^2 = |z_B - z_C|^2$  ثم استنتج طبيعة المثلث ABC:

$$BA^2 + CA^2 = CB^2 \text{ تكافئ } |z_A - z_B|^2 + |z_A - z_C|^2 = |z_B - z_C|^2$$

ولدينا :  $A(-2; 0)$  و  $B(-1; -\sqrt{3})$  و  $C(1; \sqrt{3})$  إذن  $BA^2 = 4$  و  $CA^2 = 12$  و  $CB^2 = 16$

أي  $4 + 12 = 16$  إذن المثلث ABC قائم في A

**7.** أثبت أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة يكافئ أن  $|z_A| = |z_B| = |z_C|$

$$|z_C| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ و } |z_B| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \text{ و } |z_A| = |-2| = 2$$

وبما أن ABC قائم في A فإن [BC] قطر للدائرة المحيطة به أي مركزها هو منتصف [BC]:  $(\frac{-1+1}{2}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2})$

إذن مركزها هو  $O(0; 0)$  و نصف قطرها  $OC = OB = 2$

**8.** عين  $z_D$  لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه O نسبته -1

$$z_D - z_O = -(z_A - z_O) \text{ نستلزم إن } z_D = -z_A = 2$$

ب ما طبيعة الرباعي ABDC

$$\text{لدينا } \begin{cases} OA = OD \\ OA = OB = OC \end{cases} \text{ إذن } OA = OD = OB = OC \text{ و } AD = BC$$

ومنه الرباعي ABDC هو مستطيل (القطران متناصفان ومتقايسان)

**9.** بين ان صورة C بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة

أي  $(z_C - z_A) = a(z_B - z_A)$  نستلزم أن  $a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  وبعد التبسيط نجد  $a = \sqrt{3}i$  ومنه التحويل النقطي الذي

مركزه A ويحول B إلى C هو تشابه نسبته  $\sqrt{3}$  وزاويته  $\arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ومركزه  $A(-2; 0)$

$$z' = \frac{iz - \sqrt{3} + i}{z + 2} \text{ أثبت أن } \arg(z') \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) \text{ و } \arg(z') \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right)$$

$$z' = \frac{iz - \sqrt{3} + i}{z + 2} \text{ أي } z' = \frac{i(z + \sqrt{3}i + 1)}{z + 2} \text{ ومنه } z' = i \frac{(z - (-1 - \sqrt{3}i))}{(z - (-2))} \text{ إذن } z' = i \frac{(z - z_B)}{(z - z_A)}$$

$$\text{وبالتالي } \arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \text{ أي } \arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}, \overline{BM})$$

ث عين مجموعة النقط M بحيث يكون  $z'$  تخيلي صرف موجب تماما

$z'$  تخيلي صرف موجب تماما يكافئ  $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$  أي  $(\overline{AM}, \overline{BM}) = 0 + K2\pi$  ومنه مجموعة النقط M هي:

$$\{(AB) - [AB]\}$$

$$\begin{cases} u_0 = e^3 - 1 \\ u_{n+1} = e^{-3} - 1 + e^{-3}u_n \end{cases} \quad \text{التمرين الثالث ( 4,5 نقط ) نعتبر المتتالية } (u_n):$$

4. احسب  $u_1$  ،  $u_2$  ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > -1$ .

$$U_1 = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_0 = e^{-3} - 1 + e^{-3}(e^3 - 1) = 0$$

$$U_2 = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_1 = e^{-3} - 1 + e^{-3}(0) = e^{-3} - 1$$

• البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > -1$

- من اجل  $n = 0$  :  $U_0 > -1$  أي  $e^3 - 1 > -1$  القضية صحيحة
- نفرض أن  $u_n > -1$  ونثبت صحة القضية  $U_{n+1} > -1$
- لدينا :  $U_n > -1$  بضرب الطرفين في  $(e^{-3})$  نجد :  $e^{-3}U_n > -e^{-3}$
- وبإضافة العدد  $(e^{-3} - 1)$  إلى الطرفين نجد:  $e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n > -1$  أي  $U_{n+1} > -1$
- إذن من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n > -1$

5. 1 بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما

$$\text{لدينا : } U_{n+1} - U_n = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n - U_n = (e^{-3} - 1)(1 + U_n)$$

$$\text{إذن : } U_{n+1} - U_n < 0 \text{ لان : } \begin{cases} 1 + U_n > 0 \\ u_n > -1 \end{cases} \text{ ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما}$$

ب استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ، ثم احسب نهايتها

بما أن  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد  $(-1)$  إذن فهي متقاربة و نهايتها هي  $l$  حيث:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(l) = l$$

$$\text{ومنه } f(l) = l \text{ تكافئ : } e^{-3} - 1 + e^{-3}l = l \text{ إذن : } l = -1 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = -1$$

6. نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

1 بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$  :

$$\text{لدينا } u_n = \frac{1}{2}v_n - 1 \text{ إذن : } v_n = 2U_n + 2 \text{ ومنه } v_{n+1} = 2U_{n+1} + 2 = 2(e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n) + 2$$

$$\text{أي } v_{n+1} = 2e^{-3} + 2e^{-3}U_n \text{ وبأخذ } (e^{-3}) \text{ عامل مشترك نجد } v_{n+1} = e^{-3}(2U_n + 2) \text{ أي } v_{n+1} = e^{-3}v_n$$

$$\text{إذن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } (q = e^{-3}) \text{ وحدها الاول : } v_0 = 2U_0 + 2 = 2e^3$$

ب أكتب بدلالة  $n$  ، كلا من  $v_n$  و  $u_n$  ، ثم احسب من جديد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$v_n = 2e^3 \times (e^{-3})^n \text{ و } U_n = \frac{1}{2}(2e^3 \times (e^{-3})^n) - 1 = e^3 \times (e^{-3})^n - 1$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^3 \times (e^{-3})^n - 1) = -1$$

ج- عين مجموعة الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث يكون  $v_n > 2 \times 10^{-3}$

$$v_n > 2 \times 10^{-3} \text{ تكافئ أن } 2e^3 \times (e^{-3})^n > 2 \times 10^{-3} \text{ أي } e^{3-3n} > 10^{-3} \text{ وباستعمال خصائص الدالة } \ln \text{ نجد:}$$

$$3 - 3n > -3 \ln 10 \text{ وبعد التبسيط نجد } n < (3 \ln 10) + 1 \text{ و } (3 \ln 10) + 1 \approx 7.9 \text{ أي}$$

$$n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

1.5 احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

لدينا:  $S_n = \left( U_0 \times \frac{1}{V_0} \right) + \left( U_1 \times \frac{1}{V_1} \right) + \dots + \left( U_n \times \frac{1}{V_n} \right)$  ولدينا  $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

إذن:  $S_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{v_0} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{v_1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{v_n} \right)$

أي:  $S_n = - \left( \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} \right) + (n+1) \frac{1}{2}$

$= - \left( \frac{1}{2e^3} \times (e^3)^0 + \frac{1}{2e^3} \times (e^3)^1 + \dots + \frac{1}{2e^3} \times (e^3)^n \right) + (n+1) \frac{1}{2}$

وبالتالي:  $S_n = - \left[ \frac{1}{2e^3} \times \frac{(e^3)^{n+1} - 1}{e^3 - 1} \right] + (n+1) \frac{1}{2} = \frac{1 - (e^3)^{n+1}}{2e^3(e^3 - 1)} + \frac{n+1}{2}$

ب ليكن الجداء  $P_n$  حيث  $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

بين أن:  $\ln(P_n) = 3n \frac{n+1}{2} - 6 \frac{n+1}{2} + (2 \ln 2 + \dots)$  ثم استنتج  $P_n$  بدلالة  $n$

لدينا:  $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$  إذن  $\ln(P_n) = \ln(V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n)$

وحسب خصائص الدالة  $\ln$  يصبح  $\ln(P_n) = \ln(V_0) + \ln(V_1) + \dots + \ln(V_n)$

أي:  $\ln(P_n) = \ln(2e^3 \times (e^{-3})^0) + \ln(2e^3 \times (e^{-3})^1) + \dots + \ln(2e^3 \times (e^{-3})^n)$

$= (\ln 2 + \ln e^3 + \ln(e^{-3})^0) + (\ln 2 + \ln e^3 + \ln(e^{-3})^1) + \dots + (\ln 2 + \ln e^3 + \ln(e^{-3})^n)$

$= (\ln 2 + 3)(n+1) + \ln(e^{-3})^{0+1+2+\dots+n}$

ومنه  $\ln(P_n) = (\ln 2 + 3)(n+1) + \ln(e^{-3})^{n \frac{(n+1)}{2}} = (\ln 2 + 3)(n+1) - 3n \frac{(n+1)}{2}$

وبأخذ عامل مشترك نجد  $\ln(P_n) = \left( \frac{n+1}{2} \right) (\ln 2 + 6 - 3n)$  وهو المطلوب

وباستعمال خصائص الدالة  $e$  نجد:  $e^{\ln(P_n)} = e^{\left( \frac{n+1}{2} \right) (\ln 2 + 6 - 3n)}$  أي

$P_n = e^{(n+1)(\ln 2)} \times e^{3(n+1)} \times e^{\left( \frac{n+1}{2} \right) (-3n)} = 2^{n+1} \times (e^3)^{(n+1)} \times (e^{-3})^{n \frac{(n+1)}{2}}$

وبالتبسيط نجد:  $P_n = (2e^3)^{n+1} \times (e^{-3})^{n \frac{(n+1)}{2}}$

التمرين الرابع (07نقط):  $f(x) = \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$

8. احسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

9. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها: نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:

$f'(x) = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$

لدينا من اجل كل  $x \in \mathcal{R}$  فإن  $f'(x) > 0$  , ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathcal{R}$

• جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

10. احسب من اجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x)f(-x) -$  ، ثم فسر النتيجة هندسياً:

$$f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + (-x) + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

وبتوحيد المقامات نجد:  $f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} = 2\ln 4 + 2$   
ومنه نستنتج أن النقطة  $(0; 2\ln 4 + 2)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$

11. أ بين أن المعادلة  $f(x) = 3$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $1,1 < \alpha < 1,2$

• الدالة  $f$  دالة معرفة ومستمرة ومنتزادة تماماً على  $\mathcal{R}$  إذن فهي حتماً معرفة ومستمرة ومنتزادة تماماً على المجال  $[1,1, 1,2]$

• ولدينا  $\begin{cases} f(1.1) = 2.985 \\ f(1.2) = 3.049 \end{cases}$  أي  $f(1.1) < 3 < f(1.2)$

• إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 3$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]1.1, 1.2[$

ب من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي  $m$  يكون العدد  $(-\alpha)$  حلاً للمعادلة  $f(x) = m$

لدينا:  $f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + 2$  أي  $f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + 2$  ولدينا  $f(\alpha) = 3$   
إذن:  $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2\ln 4 + 2$  تكافئ:  $3 + f(-\alpha) = 2\ln 4 + 2$  ومنه  $f(-\alpha) = -1 + 2\ln 4$

12. أ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن:  $f(x) = 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

$$f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + \ln 4 + \frac{2e^x + 2 - 2e^x}{e^x + 1} = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} = f(x)$$

ب بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + \ln 4$  والمستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = x + 2 + \ln 4$  مستقيمان مقاربان للمنحنى  $(C_f)$  ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل منهما:

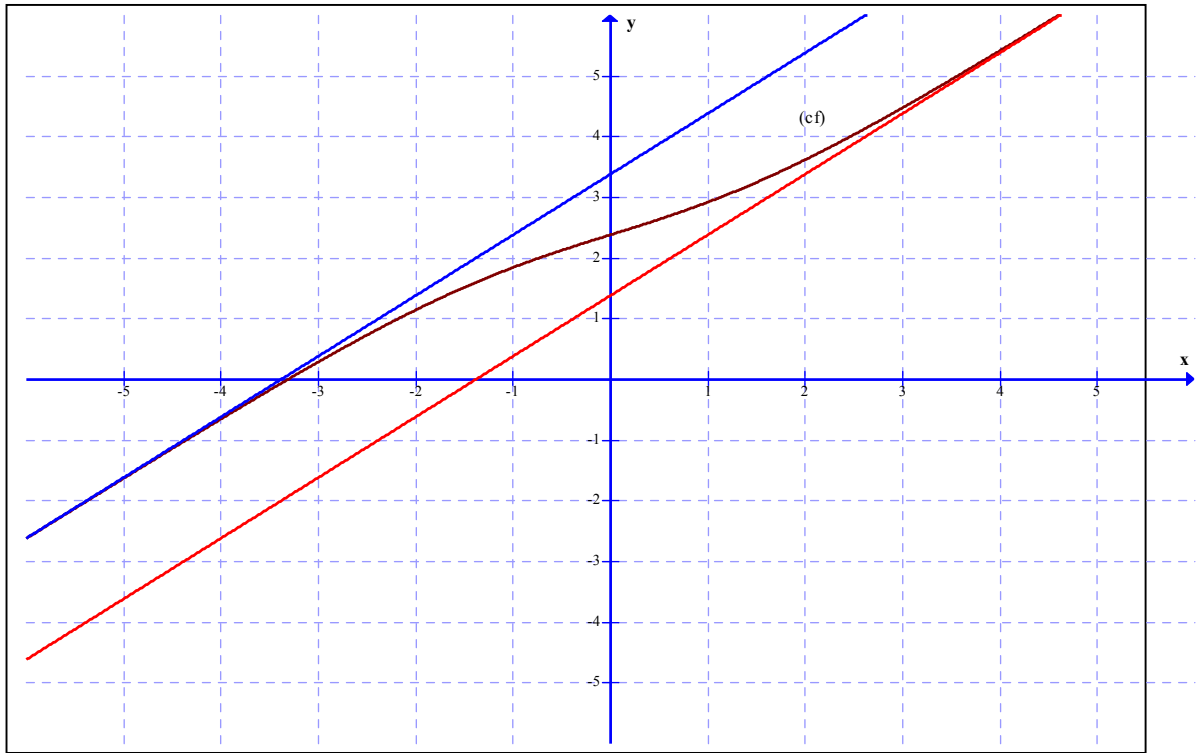
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + \ln 4)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{e^x + 1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 2 + \ln 4)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-2e^x}{e^x + 1} \right) = 0 \end{cases}$$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + \ln 4$  هو مستقيم مقارب مائل بجوار  $+\infty$

والمستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = x + 2 + \ln 4$  هو مستقيم مقارب مائل بجوار  $-\infty$

$$\begin{cases} f(x) - (x + \ln 4) = \frac{2}{e^x + 1} > 0 \\ f(x) - (x + 2 + \ln 4) = \frac{-2e^x}{e^x + 1} < 0 \end{cases} \quad \text{لدينا -}$$

ومنه  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  وتحت  $(\Delta')$



14. اعتمادا على السؤال (5 أ) بين أن :  $A(\lambda) = 2 \ln \left( \frac{2e^\lambda}{e^\lambda + 1} \right)$

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - y] dx = \int_0^\lambda \left[ x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} - (x + \ln 4) \right] dx$$

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda 2 dx - \int_0^\lambda \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = [2x]_0^\lambda - 2[\ln(e^x + 1)]_0^\lambda = 2\lambda - 2\ln(e^\lambda + 1) + 2\ln 2$$

أي  $A(\lambda) = 2\lambda + 2\ln 2 - 2\ln(e^\lambda + 1)$  وبما أن  $\lambda = \ln e^\lambda$  تصبح:

$$A(\lambda) = 2[\ln e^\lambda + \ln 2 - \ln(e^\lambda + 1)]$$
 وباستعمال خصائص الدالة  $\ln$  نجد

$$A(\lambda) = 2[\ln 2e^\lambda - \ln(e^\lambda + 1)] = 2\ln \left( \frac{2e^\lambda}{e^\lambda + 1} \right)$$

ب عين قيمة العدد  $\lambda$  بحيث يكون  $A(\lambda) =$

$$A(\lambda) = 1 \quad \text{تكافئ} \quad 2\ln \left( \frac{2e^\lambda}{e^\lambda + 1} \right) = 1 \quad \text{أي} \quad \ln \left( \frac{2e^\lambda}{e^\lambda + 1} \right) = \frac{1}{2}$$
 وباستعمال خصائص الدالة  $e$  نجد:

$$\frac{2e^\lambda}{e^\lambda + 1} = e^{\frac{1}{2}} \quad \text{وبعد التبسيط نجد} \quad e^\lambda = \frac{-e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - 2} \quad \text{إذن} \quad \lambda \approx 1.54$$

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: (04 نقط)**

C(0;3;-4) و B(-2;2;-1)، A(2;1;-4)

والمستوي (P) الذي معادلته  $x - y + z + 1 = 0$

**5. بين أن النقط A ، B و C تعين مستوي (Q) بحيث الشعاع  $\vec{n}(1;1;1)$  ناظميا له ، ثم اكتب معادلة ديكارتية لـ (Q)**

لدينا:  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2-2 \\ 2-1 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-1 \\ -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ولدينا:  $\frac{-4}{-2} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{3}{0}$  إذن:  $\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{AB} = 1 \times (-4) + 1 \times 1 + 1 \times 3 = 0 \\ \vec{n} \times \vec{AC} = 1 \times (-2) + 1 \times 2 + 1 \times 0 = 0 \end{cases} \text{ كذلك}$$

وبالتالي معادلة (Q):  $x + y + z + d = 0$  وبما إن:  $A \in (Q)$  وبالتعويض باحداثياتها نجد:

$$(O) : x + y + z + 1 = 0$$

**6. بين أن (P) و (Q) غير متوازيين و غير متعامدين**

لدينا:  $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{n}_Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  إذن  $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$  و  $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 \neq 0$  أي  $\vec{n}_P \nparallel \vec{n}_Q$  و  $\vec{n}_P$  لا يعامد  $\vec{n}_Q$

**7. عين تمثيل وسيطي للمستقيم  $\Delta$  تقاطع المستويين (P) و (Q)**

لدينا:  $\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ x + y + z + 1 = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$  بالجمع (1) و (2) نجد  $x = -z - 1$

وبالتعويض في (2) نجد  $y = 0$  وبوضع  $z = t$  يكون التمثيل الوسيطي:

$$t \in \mathcal{R} \text{ حيث } (\Delta): \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

**8. لتكن  $\Omega(1;0;1)$  نقطة من الفضاء: أ. بين ان النقطة  $\Omega$  متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)**

$$\begin{cases} d(\Omega; (P)) = \frac{|1 \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ d(\Omega; (Q)) = \frac{|1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}$$

**ب. عين معادلة سطح الكرة (S) ذو المركز  $\Omega$  و المماس لـ (P) و (Q)**

$$(S): (x - 1)^2 + (y)^2 + (z - 1)^2 = 3$$

**ج. عين احداثيات النقطتين D و H نقطتي التماس بين (S) و (P) و بين (S) و (Q) على الترتيب**

لدينا: شعاع توجيه للمستقيم  $(\Omega D)$  و  $\vec{n}_Q$  شعاع توجيه للمستقيم  $(\Omega H)$  إذن:

$$(\Omega H): \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = t' \\ z = t' + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (\Omega D): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad \text{إذن: } \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M} = t \overrightarrow{\Omega D} \\ \overrightarrow{\Omega M} = t' \overrightarrow{\Omega H} \end{cases}, (t, t') \in \mathcal{R}^2$$

أي  $D(t+1, -t, t+1)$  و  $H(t+1, t, t+1)$  وبالتعويض:

- احداثيات النقطة  $D$  في معادلة  $(P)$  نجد  $t = -1$  إذن  $D(0, 1, 0)$

- احداثيات النقطة  $H$  في معادلة  $(Q)$  نجد  $t' = -1$  إذن  $H(0, -1, 0)$

6. لتكن  $E\left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$  هي المسقط العمودي لـ  $\Omega$  على المستقيم  $(\Delta)$ ، احسب المسافة بين  $\Omega$  و  $\Delta$

نتأكد اولاً من انتماء  $E$  إلى  $(\Delta)$  ثم نتأكد من أن  $\overrightarrow{E\Omega} \perp \overrightarrow{U}_{(\Delta)}$

$$E \in (\Delta) \text{ ومنه } E \in (\Delta) \text{ يعني } \begin{cases} -\frac{1}{2} = -t - 1 & ; t = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \\ -\frac{1}{2} = t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{E\Omega} \perp \overrightarrow{U}_{(\Delta)} \text{ وبالتالي: } \overrightarrow{E\Omega} \times \overrightarrow{U}_{(\Delta)} = 0 \text{ إذن } \overrightarrow{U}_{(\Delta)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{E\Omega} \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2} \\ 0-0 \\ 1+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

التمرين الثاني: (4,5 نقط)

I حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة  $(z+2)(z^2+z+1)=0$

$$\begin{cases} z = -2 \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} z + 2 = 0 \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \text{ نحسب المميز } \Delta = -3 = 3i^2 \text{ نجد } \Delta = -3 = 3i^2 \text{ ومنه } z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ و } z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المعادلة: } S = \left\{ -2, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$(II) \quad z_E = \overline{z_D}, \quad z_D = 2(1 + \sqrt{3}i), \quad z_C = -2, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

4. اكتب  $(-z_A)$  على الشكل الأسّي ثم علم النقط  $A, B, C, D, E$

$$\text{لدينا } z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ إذن: } -z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ومنه } |-z_A| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$-z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } \arg(-z_A): \begin{cases} \cos \theta_{-z_A} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_{-z_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \theta_{-z_A} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

5. ما طبيعة التحويل  $R$  و حدد عناصره المميزة:  $\frac{z'+2}{z+2} = -z_A$

من العبارة:  $\frac{z'+2}{z+2} = -z_A$  نجد  $(z' - (-2)) = -z_A(z - (-2))$  أي  $(z' - z_C) = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$  ومنه التحويل  $R$  هو دوران مركزه  $C$  وزاويته  $(-\frac{\pi}{3})$

ب لتكن النقطة  $F$  حيث  $R(D) = F$ ، بين أن  $z_F = 1 + \sqrt{3}i$

إذن  $(z_F - z_C) = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C)$  وبعد التبسيط نجد  $z_F = 1 + i\sqrt{3}$

ج اكتب العدد  $\frac{z_E - z_F}{z_D - z_F}$  على الشكل الجبري ثم استنتج أن المستقيمين  $(FD)$  و  $(FE)$  متعامدان

$$\frac{z_E - z_F}{z_D - z_F} = \frac{(-2 - 2\sqrt{3}i) - (1 + \sqrt{3}i)}{(-2 + 2\sqrt{3}i) - (1 + \sqrt{3}i)} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{(-3 - 3\sqrt{3}i) \times (-3 + \sqrt{3}i)}{(-3 + \sqrt{3}i) \times (-3 + \sqrt{3}i)} = \sqrt{3}i$$

لدينا العدد  $\frac{z_E - z_F}{z_D - z_F} = \sqrt{3}i$  نستلزم إن  $\arg\left(\frac{z_E - z_F}{z_D - z_F}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  أي  $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  وبالتالي  $(FE) \perp (FD)$

6. لتكن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, |z_A|); (B, |z_B|); (C, |z_C|)\}$  عين  $z_G$  لاحقة  $G$ :

إذن  $G$  مرجح الجملة:  $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$  ومنه:  $z_G = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 2 \times z_C}{1 + 1 + 2} = \frac{-5}{4}$

ب عين مجموعة النقط  $M$  حيث  $\overline{MG} = \lambda \overline{AB}$  لما يمسخ  $\lambda$  مجموعة الأعداد الحقيقية

لما  $\overline{MG} = \lambda \overline{AB}$  يمسخ المجموعة  $\mathcal{R}$  فإن تمثل مستقيم يشمل  $G$  و الشعاع  $\overline{AB}$  شعاع توجيه له

ج اكتب معادلة ديكارتية لهذه المجموعة:

$$\overline{MG} = \lambda \overline{AB} \text{ أي } \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} - x \\ 0 - y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

نجد  $x = -\frac{5}{4}$  و  $y = -\sqrt{3}\lambda$  وهي معادلة مستقيم موازي لمحور الترتيب

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = e^{\frac{-1}{2}} \sqrt{u_n} \end{cases} \quad \text{التمرين الثالث: (4,5 نقط):} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بـ:}$$

4. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ :  $u_n > \frac{1}{e}$

- من اجل  $n = 1$   $u_1 > \frac{1}{e}$  أي  $e^2 > \frac{1}{e}$  القضية صحيحة

- نفرض أن  $u_n > \frac{1}{e}$  ونثبت صحة القضية  $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

- لدينا:  $u_n > \frac{1}{e}$  بإدخال الجذر التربيعي على الطرفين نجد:  $\sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}}$

وبضرب الطرفين في العدد  $(e^{-\frac{1}{2}})$  نجد:  $e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}} e^{-\frac{1}{2}}$  أي  $u_{n+1} > \frac{1}{e}$  إذن من اجل كل عدد

طبيعي  $n$  فإن:  $u_n > \frac{1}{e}$

5.1 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

لدينا  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{u_n}}}{\sqrt{u_n}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}}$  إذن  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  تعني أن :  
 $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}} < 1$  وبتربيع الطرفين نجد :  $\frac{1}{u_n} < 1$  وبما إن  $u_n > \frac{1}{e}$  فإن  $\frac{1}{u_n} < 1$  وبالتالي :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$   
 ب- استنتج أن  $(u_n)$  متناقصة تماما

بما أن  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  أي  $u_{n+1} < u_n$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة

ج هل  $(u_n)$  متقاربة؟ إذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

بما أن  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد  $(\frac{1}{e})$  إذن فهي متقاربة و نهايتها هي  $l$  حيث:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(l) = l$$

ومنه  $f(l) = l$  تكافئ:  $e^{-\frac{1}{2}\sqrt{l}} = l$  إذن:  $l = \frac{1}{e}$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}$

6.  $(v_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ب- :  $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$

أ برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا  $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$  إذن :  $v_{n+1} = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln (e^{-\frac{1}{2}\sqrt{u_n}})$

أي  $v_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln (e^{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \ln \sqrt{u_n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{u_n}$  عامل مشترك نجد

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \text{ أي } v_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n} \right)$$

إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $(q = \frac{1}{2})$  وحدها الأول:  $v_1 = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_1} = \frac{3}{2}$

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

ولدينا  $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$  أي  $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_n$  إذن  $\ln u_n = 2v_n - 1$  ومنه

$$u_n = e^{3 \times (\frac{1}{2})^{n-1} - 1} \text{ وبالتالي } u_n = e^{2v_n - 1}$$

5. احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$

لدينا  $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$  أي  $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_n$  وبالتالي  $2v_n = 1 + \ln u_n$

$$\text{إذن } S_n = \left( \frac{1}{1 + \ln u_1} \right) + \left( \frac{1}{1 + \ln u_2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{1 + \ln u_n} \right)$$

وتعويض  $(2v_n = 1 + \ln u_n)$  نجد  $S_n = \left( \frac{1}{2v_1} \right) + \left( \frac{1}{2v_2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2v_n} \right)$

$$S_n = \left( \frac{1}{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}} \right) + \left( \frac{1}{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \right) \quad \text{أي :}$$

$$S_n = \left( \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right) + \left( \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-1)} \right) \quad \text{ومنه}$$

$$S_n = \left( \frac{1}{3} \times (2)^0 \right) + \left( \frac{1}{3} \times (2)^1 \right) + \dots + \left( \frac{1}{3} \times (2)^{(n-1)} \right) \quad \text{إذن}$$

$$S_n = \frac{1}{3} \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \frac{(2^n - 1)}{3} \quad \text{وبالتالي :}$$

التمرين الرابع: (07 نقط)

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \frac{2x}{x+1}$

9. احسب نهايتي الدالة  $f$  عند اطراف مجموعة تعريفها

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x - (x+1)\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$$

2. 1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  فإن :  $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2-2x-x-1}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها

$$f'(x) = 0 \quad \text{أي} \quad 1 - x = 0 \quad \text{إذن} \quad x = 1$$

$x$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

جدول التغيرات:

$x$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(1)$	$-\infty$

3. اكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0

$$y = x \quad \text{إذن} \quad (\Delta): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

4. بين ان المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها

لدينا :  $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$  إذن  $f''(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x+1)^2}$  ومنه  $f''(x) = 0$  تعني إن  $\begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$  ومنه من اجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$  فإن  $(C_f)$  يقبل النقطة  $(3, f(3))$  نقطة انعطاف

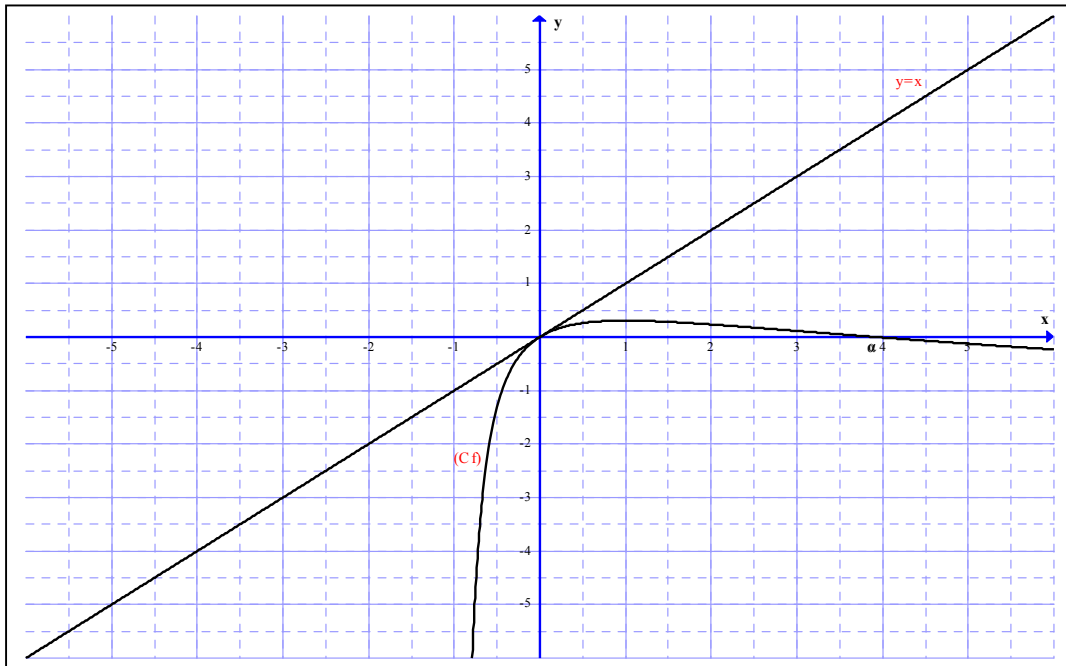
5. بين أن المعادلة  $f(x) = \alpha$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $3,9 < \alpha < 4$

• الدالة  $f$  دالة معرفة ومستمرة ومنتزادة تماما على  $[1; +\infty[$  إذن فهي حتما معرفة ومستمرة ومنتزادة تماما على المجال  $[3.9, 4]$

• ولدينا  $\begin{cases} f(3.9) = 0.002 \\ f(4) = -0.0094 \end{cases}$  أي  $f(3.9) \times f(4) < 0$

• إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = \alpha$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]3.9, 4[$

6. ارسم المستقيم  $(A)$  و المنحنى  $(C_f)$



7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و اشارة حلول المعادلة  $f(x) = 3m$

$m$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) = x - 3m$	المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة	المعادلة تقبل حل مضاعف معدوم	المعادلة لا تقبل حل

8. F دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  :  $F(x) = (-3-x)\ln(x+1) + 3x + 3$

ت بين ان F دالة أصلية للدالة f على المجال  $]-1; +\infty[$

$$F'(x) = -1 \times \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \times (-3-x) + 3 = \frac{2x}{x+1} + \ln(x+1) = f(x)$$

إذن F دالة أصلية لـ f(x)

ب بين أن :  $A(\alpha) = \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1}\right)^2$  cm<sup>2</sup> ثم اوجد حصر الـ A(α)

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - y] dx = \int_0^\alpha f(x) dx = [F(x)]_0^\alpha = (-3 - \alpha)\ln(\alpha + 1) + 3\alpha$$

$$\ln(\alpha + 1) = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \quad \text{ولدينا : } f(\alpha) = 0 \text{ إذن نجد :}$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1}\right)^2 \text{ ومنه } A(\alpha) = (-3 - \alpha)\left(\frac{2\alpha}{\alpha + 1}\right) + 3\alpha$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1}\right)^2 \times 2^2 = 4\left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1}\right)^2 \text{ cm}^2 \text{ فإن: } (2\text{cm}) \text{ هي (2cm) فإن:}$$

$$(3.9)^2 < \alpha^2 < (4)^2 \dots\dots\dots (1) \text{ لدينا } 3.9 < \alpha < 4 \text{ حصر } A(\alpha)$$

$$-3 \times 4 < -3\alpha < -3 \times 3.9 \dots\dots\dots (2) \text{ و}$$

$$\frac{1}{5.9} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{4.9} \dots\dots\dots (3) \text{ و } 4.9 < \alpha + 1 < 5.9 \text{ إذن :}$$

$$0.642 < A(\alpha) < 0.877 \text{ نجد : } [(3) \times ((2) + (1))] \text{ وبالتالي من :}$$