

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**  
**الموضوع الأول**

**التمرين الأول: (04.5 نقاط)**

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس المباشر  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر النقط  $A(3;1;0)$  ,  $B(1;2;0)$  ,  $C(3;2;1)$  و  $D(0;0;m)$  حيث  $m$  عدد حقيقي موجب

(1) أ) احسب الجداء السلمي  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$  ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من  $\cos \hat{ABC}$  و  $\sin \hat{ABC}$ .

ب) احسب مساحة المثلث  $ABC$ .

(2) بين أن الشعاع  $\vec{n}(1;2;-2)$  ناظمي للمستوي  $(ABC)$  ثم استنتج معادلة ديكرتية له.

(3) بين أن  $ABCD$  رباعي وجوه و أن حجمه :  $v_{ABCD} = \frac{2m+5}{6}$ .

(4) لتكن  $(S_m)$  مجموعة النقط  $M(x;y;z)$  من الفضاء و التي تحقق :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$ .

بين أنه من أجل عدد حقيقي  $m$  فإن  $(S_m)$  سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

(5) عين قيمة  $m$  حتى يكون المستوي  $(ABC)$  مماسا لسطح الكرة  $(S_m)$ .

(6) أكتب معادلة المستوي  $(P)$  الموازي تماما للمستوي  $(ABC)$  و يمر  $(S_m)$ .

**التمرين الثاني: (04.5 نقاط)**

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول  $z$  المركب التالية :  $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  , نعتبر النقط  $A, B, C, D$  لواحقها على

الترتيب  $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$  ,  $z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$  ,  $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$  و  $z_D = \overline{z_C}$ .

بين أن النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega$  ذات اللاحقة  $Z_\Omega = 3$  يطلب تعيين نصف قطرها .

(3) لتكن النقطة  $E$  نضيرة النقطة  $D$  بالنسبة للمبدأ  $O$ .

أ) بين أن :  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $BEC$ .

ب) بين أنه يوجد دوران  $R$  مركزه النقطة  $B$  ويحول النقطة  $E$  إلى النقطة  $C$  يطلب تعيين زاويته .

(4) نعتبر التحويل النقطي  $S$  الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث :

$$z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$$

أ) عين طبيعة  $S$  و عناصره المميزة.

ب) عين طبيعة  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  و التي تحقق :  $Z = 3 + 2\sqrt{3}e^{i\theta}$

حيث  $\theta$  عدد حقيقي .

ت) عين طبيعة المجموعة  $(E')$  صورة  $(E)$  بالتحويل  $S$  و عناصرها الهندسية.

### التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 2، 1 واربعة كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 2، 1. نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس

(1) أحسب احتمال الحصول على :

أ ثلاث كرات من نفس اللون

ب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم

ج ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1.

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي

ب) أحسب الأمل الرياضي  $E(X)$  و الانحراف المعياري  $\sigma(X)$

### التمرين اربع: (04 نقاط)

الجزء الأول :  $g$  دالة عددية معرفة على المجال  $D = ]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$

(1) أوجد نهايتي الدالة  $g$  على يمين 0 و عند  $+\infty$  .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج إشارة الدالة  $g$  .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $D = ]0; +\infty[$  كالتالي :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{x}$

(C) التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  حيث :  $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) أ- أوجد نهايتي الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية .

ب- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة :  $y = x + \frac{1}{2}$  مقارب مائل للمنحني (C) .

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى  $(\Delta)$  .

(2) أ- تحقق أنه من أجل كل  $x$  ينتمي إلى  $D$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ج- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم  $(T)$  الذي يمس المنحني (C) عند النقطة  $A(1; \frac{3}{2})$  .

(3) أثبت أن المعادلة :  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]\frac{1}{2}; 1[$  .

(4) ارسم المنحني (C) و المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  .

الجزء الثالث: نضع من أجل  $x$  ينتمي إلى  $D$  :  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

(1) احسب  $h'(x)$  . ما ذا تستنتج ؟

(2) أوجد بالسنتيمترات المربعة  $S$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) وبالمستقيمات التي معادلاتها:

$$.x = 1 ; x = e ; y = 0$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة العدد  $3^n$  على 10.
- (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0 [10]$
- (3) عين الأعداد الطبيعية  $n$  حيث:  $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$  و  $10 < n \leq 25$ .
- (4) ليكن العدد  $A$  الذي يكتب على الشكل  $\overline{xx02102^3}$  في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب في النظام ذي الأساس 9 بالشكل  $\overline{y67y^9}$   
 أ) عين  $x$  و  $y$ .  
 ب) أحسب  $A$  في النظام العشري.  
 ث) أكتب  $A$  في النظام ذي الأساس 7.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم و المتجانس المباشر  $(O, \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $I$  التي لواحقها على الترتيب :  $z_A = -2$  ،  $z_B = -1+i$  ، و  $z_I = i$ .
- من أجل كل عدد مركب  $z$  حيث  $z \neq -2$  نضع :  $z' = \frac{iz+i+1}{z+2}$ . حيث  $M$  صورة العدد المركب  $z$  و  $M'$  صورة العدد المركب  $z'$ .
- 1- أ) تحقق أن  $z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$ .
- ب) بين أنه إذا كانت النقطة  $M$  تنتمي إلى محور القطعة  $[AB]$  فإن النقطة  $M'$  تنتمي إلى دائرة  $(C)$  يطلب تعيين عناصرها المميزة .
- ج) عين طبيعة  $(E)$  مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي بحيث يكون  $z'$  تخيليا صرفا .
- 2- أ) تحقق أن :  $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$
- ب) استنتج أن :  $IM' \times AM = \sqrt{2}$  و أن  $[\vec{u}, \overline{IM'}] + [\vec{u}, \overline{AM}] \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ .
- ج) بين أنه إذا كانت النقطة  $M$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$  ذات المركز  $A$  و نصف القطر 1 فإن النقطة  $M'$  تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .
- 3- لتكن النقطة  $F$  ذات اللاحقة  $z_F = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- أ) بين أن النقطة  $F$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$  ثم بين أن  $[\vec{u}, \overline{AF}] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
- ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة  $F'$  المرفقة بالنقطة  $F$ .

### التمرين الثالث: (04 نقاط)

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1} : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } u_0 = \frac{1}{5}$$

$$(1) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 < u_n < \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}, \text{ استنتج اتجاه تغير المتتالية } (u_n).$$

ب) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ثم أحسب نهايتها.

$$(3) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \frac{5^n u_n}{2u_n - 1}$$

أ) أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 10 ويطلب حساب حدها الأول  $v_0$

$$\text{ب) أكتب عبارة } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم بين أن } u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}. \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\text{أحسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n : S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

### التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$ .

نسمي  $(C_f)$  النحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .

$$-1 \text{ أ) أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و بين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى

$(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

3- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.8 < \alpha < 1.9$

4- أكتب معادلة ديكرتية للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x, f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ , ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

6- أحسب  $f(0), f(3)$  ثم أرسم  $(\Delta), (T), (C_f)$ .

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $X: f(x) = x + m$ .

$$II. \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$$

$$(1) \text{ أ) بين أن الدالة } G \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } G(x) = -(x+1)e^{-x+1} \text{ هي دالة أصلية للدالة } x \mapsto xe^{-x+1}$$

ب) أحسب  $I_1$ .

2- أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة بين أن  $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$  من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ .

ب) أحسب  $I_2$ .

3- أحسب بـ  $cm^2$  مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين اللذين معادلتيهما  $x=0$

و  $x=1$ .

الموضوع الاول

(P) معادله  $\frac{|-4+d|}{3} = 3$  يعني (S) يعني  $d=13$  و  $d=-5$   
 معادله  $\frac{|-4+d|}{3} = 3$  يعني (S) يعني  $d=13$  و  $d=-5$   
 معادله  $\frac{|-4+d|}{3} = 3$  يعني (S) يعني  $d=13$  و  $d=-5$   
 $x + 2y - 2z + 13 = 0$

المقرين الثاني (0415 نقاط)  
 $S = \{ \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 3+2i\sqrt{3}, 3-2i\sqrt{3} \} - 1$   
 دائرة  $(C)$  ذات المركز  $(3, 3)$  و نصف قطرها  $R = 2\sqrt{3}$   
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 2\sqrt{3}$   
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 2\sqrt{3}$   
 دائرة  $(C)$  ذات المركز  $(3, 3)$  و نصف قطرها  $R = 2\sqrt{3}$   
 $\angle C - \angle A = e^{-i\pi/3}$  بين  $A$  و  $C$

$\angle E - \angle A = e^{-i\pi/3}$   
 $\angle E = -3 + 2i\sqrt{3}$  و  $\angle D = 3 - 2i\sqrt{3}$   
 $\frac{\angle C - \angle A}{\angle E - \angle A} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$   
 مثلث  $BEC$  متساوي الساقين

أيضا  $\frac{\angle C - \angle A}{\angle E - \angle A} = e^{-i\pi/3}$  يعني  $\angle C - \angle A = e^{-i\pi/3} (\angle E - \angle A)$   
 $(\vec{BE}, \vec{BC}) = -\pi/3$   
 المثلث  $AEC$  متساوي الساقين

ب/  $\frac{\angle C - \angle A}{\angle E - \angle A} = e^{-i\pi/3}$  يعني  $\angle C - \angle A = e^{-i\pi/3} (\angle E - \angle A)$   
 يوجد دوران  $R$  مركزه  $B$  و زاوية  $-\pi/3$   
 يحول المتطابق  $C$

التدريب الاول: (0415 نقاط)  
 $\vec{BC}(2, 0, 1)$   $\vec{AB}(2, -1, 0)$   $\textcircled{1}$   
 $\vec{BA}, \vec{BC} = 4$

$\vec{BA}, \vec{BC} = BA \cdot BC \cos \widehat{ABC}$   
 $\cos \widehat{ABC} = 4/5$

$\cos^2 \widehat{ABC} + \sin^2 \widehat{ABC} = 1$   
 $\sin \widehat{ABC} = 3/5$   
 مساحة المثلث  $ABC$   
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \widehat{ABC}$   
 $S_{ABC} = 3/2$  (و 2)

$\vec{n}, \vec{BC} = 0$  و  $\vec{n}, \vec{AB} = 0$   
 $(ABC): x + 2y - 2z - 5 = 0$   
 $ABCD$  رباعي الوجوه

$D \notin (ABC)$   
 $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} d(D, (ABC))$   
 $V_{ABCD} = \frac{2m+5}{6}$  (ح م)

$(S_m): (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-m)^2 = 9$   
 سطح كرة مركزها  $O$  و نصف قطرها  $R = 3$

$(S_m)$  مماس لـ  $(ABC)$   
 $d(D, (ABC)) = R$   
 $m = 2.5 \frac{2m+5}{3} = 3$

قيمة  $m$  هي 2

معادلة  $(P)$  الكوزمال  $(ABC)$   
 وليست  $(S_m)$   
 $(P): x + 2y - 2z + d = 0$   
 $(ABC)$  ليس  $(S)$  التي مركزها  $D(0, 0, 2)$

14 / P - طبيعة ك وعناصر ه :

(S) تشابه مباشر مركزه O. حيث  $\omega = -\sqrt{3}$  وزاوية  $-\frac{\pi}{3}$  ونسبة 2.

ن  $z = 3 + 2\sqrt{3}e^{i\frac{10\pi}{3}}$  نفس  $z - 3 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{10\pi}{3}}$

$z - 3 = 2\sqrt{3}$  اي  $M = 2\sqrt{3}$  مجموعة القطع (E) هي دائرة مركزها R و طول نصف قطرها  $R = 2\sqrt{3}$

ن/ طبيعة (E') صورة (E) ب S وعناصرها .

صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي دائرة (C') مركزها R' صورة R ب S و طول نصف

قطرها  $R' = 2R = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$   
 $z' = 6 - 3i\sqrt{3}$

التحريث الثالث (04 نظام)

عدد الحالات الممكنة :

$C_8^3 = 56$   
 $P_1 = \frac{C_4^3 + C_4^3}{56} = \dots$  (P1)

$P_2 = \frac{C_4^3 + C_3^3}{56} = \dots$  (U)

$P_3 = \frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_3^1}{56} = \dots$  (E)

ن/ قيم المتغير العشوائي X هي :  $\{0, 1, 2, 3\}$

(P) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

X = xi	0	1	2	3
P(X=xi)	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ن/ التمام الى حياطي :

$E(X) = \frac{84}{56} = 1,5$

$V(X) = \frac{15}{28}$  التباين :

الانحراف المعياري :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,73$

التحريث الرابع (07 نظام)

الجزء الاول

1-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

2- من اجل  $x \in ]0, +\infty[$  :

$g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$

الدالة g متناقصة تماما على  $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$  و متزايدة تماما على  $]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	$+\infty$	$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$

$g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \approx 1,85$

3- امثلة g

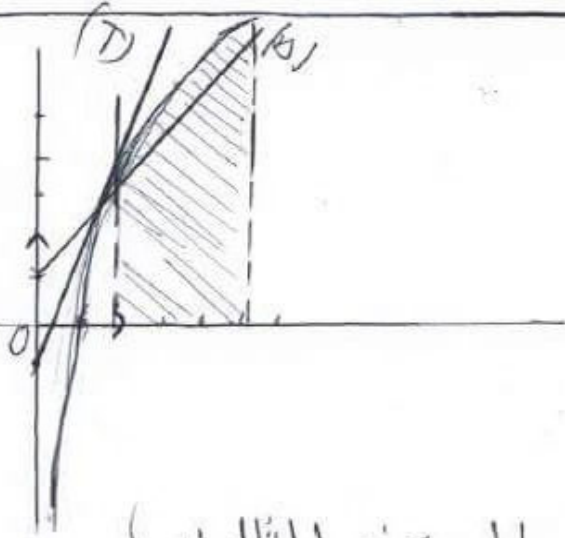
الدالة g هو جيب تماما على  $]0, +\infty[$

الجزء الثاني

ن/  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  / -P (1)

حامد محور التزايب هو مستقيم تقارب لـ (C)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$  /



الجزء الثالث

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^e : x > 0$$

1 - حساب  $h'(x)$  ماذا تستطيع P  
 h دالة قابلة للتفاضل لأن مشتقاتها موجودة  
 أجل  $x > 0$  من 0 :

$$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \ln x$$

$$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

$$h'(x) = f(x), x > 0$$

h دالة أصلية لـ f على D

$$S = \int_1^e f(x) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$S = 4 [h(x)]_1^e \text{ cm}^2$$

$$S = (2e^2 + 2e - 2) \text{ cm}^2$$

$$S \approx 18,21 \text{ cm}^2$$

انت

4/ الرضع النسبي لـ (c) و (d)

$$f(x) - y = \frac{\ln(x)}{x}$$

لما  $0 < x < 1$  يكون (c) تحت (d)

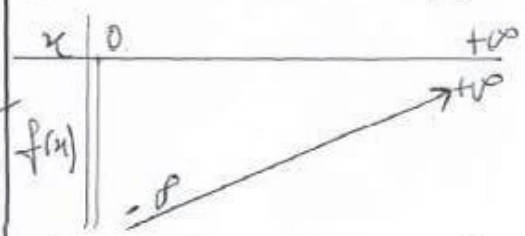
لما  $x > 1$  يكون (c) فوق (d)

لما  $x = 1$  فاش  $(c) \cap (d) = \{1, \frac{3}{2}\}$

لما  $x \in ]0, 1[$  و  $x \in ]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

0 - f متزايدة تماماً على  $]0, +\infty[$



0 - معادلة للمستقيم (T) ما لها

لـ (c) عند A

$$(T): y = 2x - \frac{1}{2}$$

3 /  $f(x) = 0$  تقبل حل واحد

x من المجال  $] \frac{1}{2}, 1 [$

$$f(\frac{1}{2}) = 1 - 2 \ln 2 \text{ و } f(1) = \frac{3}{2}$$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً

على  $] \frac{1}{2}, 1 [$  و  $f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$

حسب مبرهنة القيمة المتوسطة

توجد عدد حقيقي واحد من

$] \frac{1}{2}, 1 [$  بحيث  $f(x) = 0$

(P-4) عينا  $x$  و  $y$

$$0 < y < 9 \quad \text{و} \quad 0 < x < 3$$

$$A = 2 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + x \times 3^4 + x \cdot 3^6$$

$$A = y + 7 \times 9 + 6 \times 9^2 + y \times 9^3$$

$$A = 65 + 972x$$

$$A = 549 + 730y$$

$$972x - 730y = 484$$

إذا كان  $x=1$  فإن  $y \notin \mathbb{N}$

إذا كان  $x=2$  فإن  $y=2$

$$(x; y) = (2; 2)$$

$$A = 2009$$

$$A = 5600$$

التسوية الثانية (4 نقطة)

(P-1) زواجات:

$$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

$$z' = \frac{i z + i + 1 - i(z+1+i)}{z+2}$$

$$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

ب-  $M_1$  نقطة تقاطع  $AM$  و  $BM$

$$AM = BM$$

$$|z'| = \left| \frac{i(z+1-i)}{z+2} \right|$$

$$|z'| = \frac{|i||z+1-i|}{|z+2|}$$

$$|z'| = \frac{|z - (-1+i)|}{|z - (-2)|}$$

$$OM_1' = \frac{BM}{AM} = 1$$

$M_1'$  نقطة الدائرة  $(C)$  مركزها  $O$  و  $R=1$

التسوية الأولى (4 نقطة)

1- دراسة جواقيت وقسمة  $3^2$  على 10

حسب قيم العدد الطبيعي  $n$

$$3^1 \equiv 3 [10] \quad (3^0 \equiv 1 [10])$$

$$3^3 \equiv 7 [10] \quad (3^2 \equiv 9 [10])$$

$$3^4 \equiv 1 [10]$$

$$3^{4k+1} \equiv 3 [10] \quad (3^{4k} \equiv 1 [10])$$

$$3^{4k+3} \equiv 7 [10] \quad (3^{4k+2} \equiv 9 [10])$$

( $k \in \mathbb{N}$ )

$$33^{164+2} \equiv 3 [10] \quad \text{و} \quad 33 \equiv 3 [10]$$

$$109^{8n+1} \equiv 9 [10] \quad \text{و} \quad 109 \equiv 9 [10]$$

$$109^{8n+1} \equiv 9 [10] \quad \text{و} \quad 33^{164+2} \equiv 9 [10]$$

$$2 \times 109^{8n+1} \equiv 8 [10] \quad \text{و} \quad 11 \equiv 1 [10]$$

$$33^{164+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv (9 - 8 \cdot 1) [10]$$

$$33^{164+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0 [10]$$

3- ايجاد الاعداد الطبيعية  $n$  حيث

$$10 < n < 25 \quad \text{و} \quad 7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$$

$n \equiv$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv$	0	2	8	6	[10]

قيم  $n$  هي  $n = 4k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{10}{4} < k \leq \frac{25}{4} \quad \text{و} \quad 10 < n < 25$$

أي  $k \in \{3, 4, 5, 6\}$  و  $n$  قيم

$$\{12, 16, 20, 24\}$$

1- يبين ان  $AF=1$  و

$$(\vec{u}, \vec{AF}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

نبت ان  $(\vec{u}, \vec{AF}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$  نبت ان  $F$  تقع على  $(\Gamma)$  نبت

$$AF = |z_F - z_A| = 1$$

ومن هنا  $F \in (\Gamma)$

$$(\vec{u}, \vec{AF}) = \arg(z_F - z_A) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

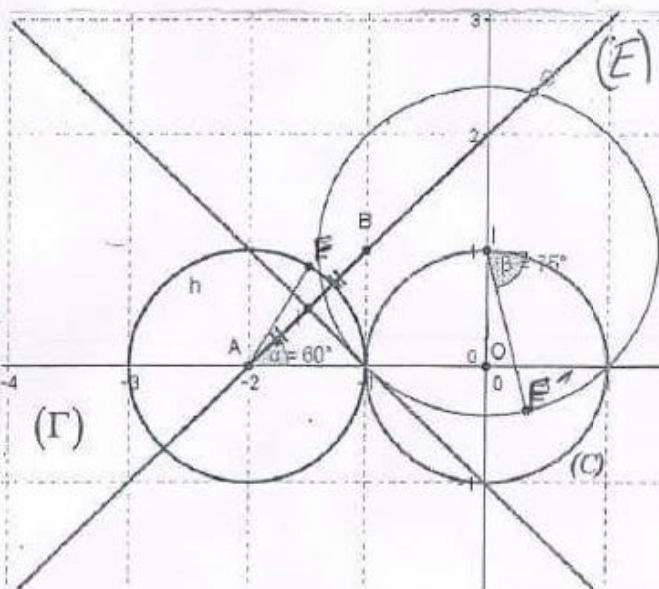
2- انشاء النقطة  $F'$  حيث

$$z_{F'} - i = \frac{1-i}{z_F + 2}$$

لدينا من السؤال 1:

$$(\vec{u}, \vec{AF'}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ و } FF' = \sqrt{2}$$

$$(\vec{u}, \vec{AF'}) = -\frac{7\pi}{12} [2\pi] \text{ اي}$$



الصفحة 2 من الموضوع 2

ع - صيغة (E)

$$z' = \frac{\pi + \pi k}{2} \text{ تصلياً من فضاء } z' \text{ و } \arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\arg(i) + \arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\arg\left[\frac{z - (-1+i)}{z - (-2)}\right] = \pi k$$

$$(\vec{AM}, \vec{BM}) = \pi k \text{ وعلية}$$

$$(E) = (AB) - \{A, B\}$$

$$z' - i = \frac{1-i}{z+2} \text{ نطقاً ان } z' - i = \frac{1-i}{z+2}$$

$$z' - i = \frac{i(z+1-i)}{z+2} - i$$

$$z' - i = \frac{1-i}{z+2}$$

3- الد سبتناج

$$IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM} \text{ او منه } z' - i = \frac{1-i}{z+2} (*)$$

$$IM' \times AM = \sqrt{2} \text{ اي}$$

$$\arg(z' - i) = \arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right) (*)$$

$$(\vec{u}, \vec{IM'}) = -\frac{\pi}{4} - (\vec{u}, \vec{AM}) \text{ اي}$$

$$(\vec{u}, \vec{IM'}) + (\vec{u}, \vec{AM}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

ج -

M نقطة من دائرة (Gamma) ذات

المركز A و طول نصف القطر 1 من هنا

$$AM = 1$$

M' تنتمي الى مجموعة يعلية

لعيبتنا:

$$IM' = \sqrt{2} \text{ نعتي } IM' \times AM = \sqrt{2}$$

وعليه M' تنتمي الى دائرة مركزها I و R = \sqrt{2}

لهاية  $(U_n)$

$$\lim U_{n+1} = \lim U_n = l \quad | l \in \mathbb{R}$$

$$l = 1 - \frac{1}{2l+1}$$

$$2l^2 - l = 0 \quad l = 1/2 \text{ أو } l = 0$$

بما أن  $(U_n)$  متزايدة كما يجب فإن  $l = 1/2$

$$V_{n+1} = 10V_n \quad \text{P}$$

$(V_n)$  متناهية هذ سبب أن

$$V_0 = -\frac{1}{3} \text{ و } 10 \text{ و } 10^4 \text{ و } 10^8 \text{ و } 10^{12} \text{ و } 10^{16} \text{ و } 10^{20} \text{ و } 10^{24} \text{ و } 10^{28} \text{ و } 10^{32} \text{ و } 10^{36} \text{ و } 10^{40} \text{ و } 10^{44} \text{ و } 10^{48} \text{ و } 10^{52} \text{ و } 10^{56} \text{ و } 10^{60} \text{ و } 10^{64} \text{ و } 10^{68} \text{ و } 10^{72} \text{ و } 10^{76} \text{ و } 10^{80} \text{ و } 10^{84} \text{ و } 10^{88} \text{ و } 10^{92} \text{ و } 10^{96} \text{ و } 10^{100}$$

$$V_n = V_0 \times 10^n = \left(-\frac{1}{3}\right) 10^n$$

$$U_n = \frac{5^n U_n}{2^{2n} - 1}$$

$$U_n = \frac{V_n}{2^{2n} - 5^n} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) 10^n}{2^{2n} - 5^n}$$

$$U_n = \frac{10^n}{2 \times 10^n + 3 \cdot 5^n} = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$$

$$\lim U_n = \lim \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \frac{1}{2}$$

حساب  $S_n$  بد  $\delta$  و  $\gamma$  و  $\eta$

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$\frac{1}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 3}{2^n} = 2 + \frac{3}{2^n}$$

$$S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \dots + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$$

$$S_n = 2(n+1) + 3\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$S_n = 2(n+1) + 3 \left[ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right]$$

$$S_n = 2(n+1) - 6 \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

التعريف الثالث (نقطة 4)

$$P(n): 0 < U_n < 1/2 \quad n \in \mathbb{N} - 1$$

$$P(0): 0 < U_0 < 1/2 \text{ حقيقة}$$

نفرض  $P(n)$  صحيحة نحاول

كل عدد مربع  $n$  و  $n+1$

$$P(n+1) \text{ لدينا } 0 < U_n < 1/2 \quad n \in \mathbb{N} - 1$$

$$0 < 2U_n < 1$$

$$1 < 2U_n + 1 < 2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2U_n + 1} < 1$$

$$0 < 1 - \frac{1}{2U_n + 1} < \frac{1}{2}$$

$$0 < U_{n+1} < 1/2$$

إذ سبب ذلك التراجع  $P(n)$  صحيحة من أجل كل عدد مربع  $n$

$$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{2U_n + 1} - U_n = \frac{2U_n - 2U_n^2 - 1 + U_n}{2U_n + 1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1 - 2U_n)}{2U_n + 1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1 - 2U_n)}{2U_n + 1}$$

النتيجة تغير  $(U_n)$

لدينا هنا سبب من أول  $n \in \mathbb{N}$

$$0 < U_n < 1/2 \text{ يعني } U_n > 0 \text{ و } U_{n+1} > 0$$

$$0 < 1 - 2U_n < 1$$

$$U_{n+1} - U_n > 0 \text{ وعليه}$$

$(U_n)$  متناهية متزايدة كما يجب

بما أن  $(U_n)$  متزايدة كما يجب

على  $\mathbb{N}$  و محدود ذلك كما يجب

بالعدد  $1/2$  فينتي متقاربة

و ص 1 و 4 و 9 و 1, 8, 3 ]

4- (T):  $y = x - e$

5-  $f'$  دالة قابلة للتفاضل

على  $\mathbb{R}$ ، ومن أجل  $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$$

$f''(x) = 0$  نحل  $x=1$  و  $x=3$

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	-

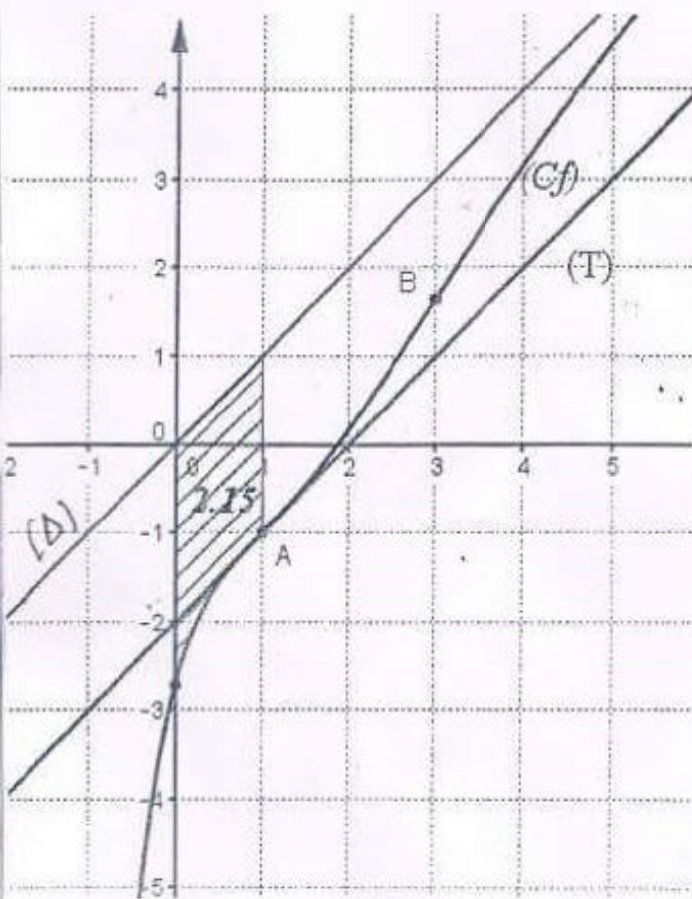
$f''(x)$  تتغير عند  $x=1$  و  $x=3$

مفترزة إشارتها

$A(1, -1)$  و  $B(3, 3 - 10e^{-2})$

نقطة انعطاف لـ  $(C_f)$

$f(3) = 3 - 10e^{-2}$  ،  $f(1) = -e$  - 6



1-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

بين ان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{x^2 + 1}{e^{-1} x e^x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{x^2}{e^{-1} x e^x} - \frac{1}{e^{-1} x e^x} \right]$$

2-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

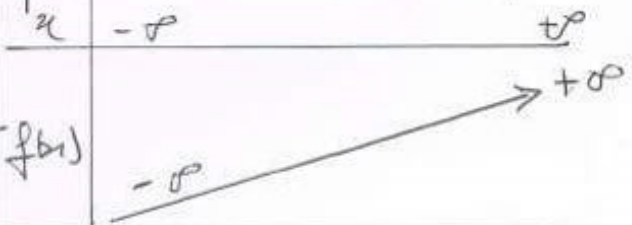
3-  $f$  قابلة للتفاضل على  $\mathbb{R}$

ومن أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = 1 + (x-1)e^{-x+1}$$

4-  $f'(x) > 0$  :  $\mathbb{R}$  من أجل  $x$

وعليه  $f$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 + 1)e^{-x+1} = 0 - e$$

(D) مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  عند  $(+\infty)$

الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(D)$

$$f(x) - y = -(x^2 + 1)e^{-x+1} < 0$$

$(C_f)$  يقع تحت (D) من أجل  $x \in \mathbb{R}$

3-  $f(x) = 0$  نحل  $x=1$  و  $x=3$

و  $1, 8, 1, 9$  ]

5-  $f(1, 9) = 0, 03$  /  $f(1, 8) = -0, 11$

$f$  مستمرة ورتيبة على  $[1, 8; 1, 9]$

و  $f(1, 8) \times f(1, 9) < 0$  حسب مبرهنة

$$I_{n+1} = \left[ -x^{n+1} e^{-x+1} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$$

$$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$$

$$I_2 \text{ لـ } x \text{ لـ } 0$$

$$I_2 = -1 + 2 I_1$$

$$I_2 = -1 + 2(e-2)$$

$$I_2 = 2e - 5$$

$$S = \int_0^1 [y - f(x)] dx \quad -3$$

$$S = \int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x+1} dx$$

$$S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$$

$$S = I_2 + \left[ -e^{-x+1} \right]_0^1$$

$$S = I_2 + (-1 + e)$$

$$S = 2e - 5 - 1 + e = (3e - 6) \text{ cm}^2$$

$$S = (3e - 6) \text{ cm}^2 = 2,15 \text{ cm}^2$$

1 - (مكتوب)

الصفحة 5 من الموضوع 2

7- المناقشة البيانية

$$f(x) = x + m \quad (E)$$

حلولا المعادلة  $f(x) = x + m$

هي قوائم من نقط تقاطع

الف مع المستقيم معادلة  $(E)$

$$y = x + m \text{ الموازي للـ } (T)$$

و (D)

1. إذا كان  $m \in ]e, e[$  معادلة (E) تقبل حلا وحيدا سائبا .

2. إذا كان  $m = -e$  معادلة (E) تقبل حلا وحيدا معدوما .

3. إذا كان  $m \in ]-e, e[$  معادلة (E) تقبل حلا وحيدا موجبا .

4. إذا كان  $m \in ]e, +\infty[$  معادلة (E) ليس لها حل .

الجزء II -

(1) الدالة  $G$  قابلة للتفاضل على  $\mathbb{R}$  ولها

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$G'(x) = x e^{-x+1}$$

وعليه  $G$  دالة أمثلة للدالة

$$x \mapsto x e^{-x+1} \text{ على } \mathbb{R}$$

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x+1} dx \quad (D)$$

$$I_1 = [G(x)]_0^1$$

$$I_1 = -2 + e$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx \quad (P) (2)$$

$$U'(x) = (n+1)x^n \text{ و } U(x) = x^{n+1}$$

$$V(x) = -e^{-x+1} \text{ و } V'(x) = e^{-x+1}$$