الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"** **المادة: رياضيات**	**اختبار الفصل الثاني**	**الموسم الدراسي: 2022/2023م** **المدة: (3سا)** **إعداد: عبد المطلب**

تمرين1 (5نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = e-(e-u_n)^2$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \le u_n \le e$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n = (e-u_n)(1-e+u_n)$.

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة، وأنّها متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $e-u_{n+1} \le (e-2)(e-u_n)$.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le (e-u_n) \le (e-2)^{n+1}$، ثم تأكّد من $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ الموجودة سابقا.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = n(e-u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = n(e-2)^{2^n}$.

ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le v_n \le n(e-2)^n$.

سؤال إضافي: بيّن أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. يمكن وضع $t = n\ln(e-2)$.

تمرين2 (4نقاط)

كيس يحتوي على10 قريصات، تحمل كل قريصة حرف من كلمة "**الاحتمالات**" (4 قريصات تحمل حرف الألف، قريصتان تحملان حرف اللّام، قريصتان تحملان حرف التاء، قريصة واحدة تحمل حرف الحاء، وقريصة واحدة تحمل حرف الميم).

نسحب عشوائيا من هذا الكيس وبلا اختيار أربع قريصات في آن واحد.

1) احسب احتمال سحب أربع قريصات تحمل كل حروف كلمة "**حتما**".

2) احسب احتمال سحب أربع قريصات لا تحمل حرف الألف.

3) احسب احتمال سحب قريصة واحدة تحمل حرف الألف على الأقل.

4) احسب احتمال سحب قريصة واحدة فقط تحمل حرف الألف علما أنّ أحرف القريصات المسحوبة مختلفة مثنى مثنى.

5) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد القريصات التي تحمل حرف الألف.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، واحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

6) نسحب الآن من هذا الكيس على التوالي دون إرجاع أربع قريصات.

أ) احسب احتمال سحب أربع قريصات تحمل حروف كلمة "**تلال**" على الترتيب.

ب) احسب عدد الحالات الممكنة لسحب أربع قريصات تحمل حرفين فقط، الألف واللّام.

(في كل التمرين، تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين3 (4نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

	السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1	المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{e^x}{e^x-1}$ له مستقيم مقارب مائل معادلته:	$y=x$	$y=x+1$	$y=x-1$
2	الدالة الأصلية للدالة g المعرّفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{\ln(2x-2)}{x-1}$. والتي تنعدم عند $\dfrac{3}{2}$ هي:	$\dfrac{[\ln(2x-2)]^2}{2}$	$\dfrac{[\ln(2x-2)]^2}{2}+1$	$[\ln(2x-2)]^2$
3	المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بـ: $u_0=1$ و $5u_{n+1}=2u_n$. أصغر قيمة للعدد n التي تحقّق $u_n\le 10^{-6}$ هي:	14	15	16
4	في المجموعة $\mathbb{R}$، المعادلة $x+1+\ln(e^x+1)=0$: (لا يُطلب حل هذه المعادلة)	تقبل حلين	تقبل حلا وحيدا	لا تقبل حلولا

تمرين4 (7نقاط)

I- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{-5x+1}{x(x+1)}+\ln(x+1)-\ln x$.

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. فسّر بيانيا النتيجتين.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4x+1)}{x^2(x+1)^2}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,3<\alpha<0,4$.

ب) فسّر بيانيا العدد الحقيقي α، ثم أنشئ التمثيل البياني $(\mathscr{C}_f)$.

4) m وسيط حقيقي موجب تماما، و g الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x-5)\ln(x+1)-(x-1)\ln(mx)$.

بيّن أنّ $g'(x)=0$ تكافئ $f(x)=\ln m$، ثم ناقش بيانيا، حسب قيم m، عدد المماسات لـ$(\mathscr{C}_g)$ الموازية لحامل محور الفواصل.

II- h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_1^2 h(x)\,dx=3\ln 3-4\ln 2$.

2) تحقّق أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=h(x)-h'(x)-\dfrac{5}{x+1}$. استنتج حساب $\int_1^2 f(x)\,dx$.

3) احسب مساحة الحيّز $\mathscr{A}$ المحدّد بـ$(\mathscr{C}_f)$، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

III- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n=h(n)-h'(n)$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n>0$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنّها متقاربة.

3) أ) تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=\ln(n+1)-\ln(n)+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$. بيّن أنّ: $S_n=\dfrac{n}{n+1}+\ln(n+1)$.

تصحيح إختبار الفصل الثاني 2023م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) أ) $n=0$: $u_0=2$ ، ومنه $2\leqslant u_0\leqslant e$ (محققة)

نفرض أن $2\leqslant u_n\leqslant e$ من أجل n كيفي ونبرهن صحة $2\leqslant u_{n+1}\leqslant e$. لدينا $2\leqslant u_n\leqslant e$ ،

$-e\leqslant -u_n\leqslant -2$; $0\leqslant e-u_n\leqslant e-2$;

$0\leqslant (e-u_n)^2\leqslant (e-2)^2$; $-(e-2)^2\leqslant -(e-u_n)^2\leqslant 0$

$2\leqslant e-(e-2)^2\leqslant e-(e-u_n)^2\leqslant e$ (محققة)

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $2\leqslant u_n\leqslant e$

ب) $u_{n+1}-u_n=e-(e-u_n)^2-u_n=e-u_n-(e-u_n)^2$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=(e-u_n)(1-e+u_n)$

جـ) لدينا: $2\leqslant u_n\leqslant e$; $2-e\leqslant -e+u_n\leqslant 0$

$0\leqslant 3-e\leqslant 1-e+u_n\leqslant 1$; وسابقا: $0\leqslant e-u_n\leqslant e-2$;

إذن: $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ ، ومنه (u_n) متزايدة.

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ ، $\ell=e-(e-\ell)^2$;

$(e-\ell)(1-e+\ell)=0$ ومنه: $\ell=e$ لأن $2\leqslant\ell\leqslant e$

2) أ) لدينا: $0\leqslant e-u_n\leqslant e-2$ ، نضرب في $(e-u_n)$

نجد: $(e-u_n)^2\leqslant(e-2)(e-u_n)$. $(e-u_{n+1})$

ب) لدينا: $e-u_n\geqslant 0$ محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

نبرهن بالتراجع على: $e-u_n\leqslant(e-2)^{n+1}$.

$n=0$: $e-u_0=e-2$ و $e-2\leqslant(e-2)^1$ (محققة)

نفرض أن $e-u_n\leqslant(e-2)^{n+1}$ من أجل n كيفي،

ونبرهن $e-u_{n+1}\leqslant(e-2)^{n+2}$. لدينا:

$e-u_n\leqslant(e-2)^{n+1}$ ، نضرب في $(e-2)$:

$(e-2)(e-u_n)\leqslant(e-2)^{n+1}$; ولدينا:

$e-u_{n+1}\leqslant(e-2)(e-u_n)$ ومنه: $(e-u_{n+1})\leqslant(e-2)^{n+2}$

ومنه: من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $(e-u_n)\leqslant(e-2)^{n+1}$.

بما أنّ: $0\leqslant e-2\leqslant 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(e-2)^{n+1}=0$

باستعمال مبرهنة الحصر: $\lim\limits_{n\to+\infty}(e-u_n)=0$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$

3) أ) $v_n=n(e-2)^{2^n}$ يعني: $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$

$n=0$: $(e-u_0)=(e-2)^1$ محققة لأن $u_0=2$.

نفرض أن $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$ من أجل n كيفي

ونبرهن صحة: $(e-u_{n+1})=(e-2)^{2^{n+1}}$ ،

لدينا: $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$. بتربيع الطرفين،

$(e-u_n)^2=((e-2)^{2^n})^2$ أي: $(e-u_n)^2=(e-2)^{2\cdot 2^n}$

$(e-u_{n+1})=(e-2)^{2^{n+1}}$; محققة.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $(e-u_n)=(e-2)^{2^n}$

ب) $2^n\geqslant n$ ومنه: $(e-2)^{2^n}\leqslant(e-2)^n$ لأن

$0\leqslant e-2\leqslant 1$ ، في الأخير: $0\leqslant n(e-2)^{2^n}\leqslant n(e-2)^n$

السؤال الإضافي: $\lim\limits_{n\to+\infty}n(e-2)^n=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{te^t}{\ln(e-2)}=0$

لأن $t=\ln(e-2)^n$ أي $e^t=(e-2)^n$) ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ مع ...

يمكن استعمال ع.ب

تمرين 2:

1) $P_1=\frac{C_1^1\times C_2^1\times C_1^1\times C_4^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{105}$

2) $P_2=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$

3) $P_3=1-P_2=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

4) A: سحب قريصة واحدة تحمل حرف الألف.

B: سحب 4 قريصات تحمل حروفا مختلفة مثنى مثنى،

$A\cap B$: أ ت ل ح | أ ت ل م | أ ح م ت | أ ح م ل |

B : أ ت ل ح | أ ت ل م | أ ح م ت | أ ح م ل | ت ل ح م |،

$P(A\cap B)=\frac{C_4^1(2C_2^1C_2^1C_1^1+2C_1^1C_1^1C_2^1)}{C_{10}^4}=\frac{8}{35}$

$P(B)=\frac{C_4^1(2C_2^1C_2^1C_1^1+2C_1^1C_1^1C_2^1)+C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1}{C_{10}^4}=\frac{26}{105}$

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{12}{13}$

5) $X=\{0;1;2;3;4\}$

$P(X=0)=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$

$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_6^3}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$

$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$

$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

$E(X)=0+\frac{8}{21}+\frac{6}{7}+\frac{12}{35}+\frac{4}{210}=\frac{8}{5}$

6) أ) $P_4=\frac{A_2^1\cdot A_2^1\cdot A_4^1\cdot A_1^1}{A_{10}^4}=\frac{1}{315}$

ب) 2أ و 2ل أو 3أ و 1ل

$6\cdot A_4^2\cdot A_2^2+4\,A_4^3\cdot A_2^1=336$

ل ل أ أ   أ أ ل ل
ل أ ل أ   أ ل أ ل
أ ل ل أ   ل أ أ ل

ل أ أ أ
أ ل أ أ
أ أ ل أ
أ أ أ ل

تمرين 3:

1) الإجابة الصحيحة هي ج) لأنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x-1}=0$$

2) الإجابة الصحيحة هي أ) لأنّ: $G(\frac32)=0$ ؛

$$G'(x)=\frac12 . 2 . \frac{2}{2x-2}\ln(2x-2) = \frac{\ln(2x-2)}{x-1}$$

3) الإجابة الصحيحة هي ج) لأنّ: $U_{n+1}=\frac25 U_n$

(U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac25$ ؛ $U_n=U_0 . q^n=(\frac25)^n$

$(\frac25)^n\leq 10^{-6}$ ، $(\frac52)^n\geq 10^6$ ؛ $\log(\frac52)^n\geq\log 10^6$ ،

$n\log\frac52\geq 6$ ؛ $n\geq 15{,}08$ ومنه: $n=16$

4) الإجابة الصحيحة هي ب) لأنّ: h دالة معرفة على $\mathbb{R}$

ب: $h(x)=x+1+\ln(e^x+1)$ ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$h'(x)=1+\frac{e^x}{e^x+1}>0$. h متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ،

$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ ، و h مستمرة

ومنه: $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$.

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ ؛ لأنّ $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

و $\lim_{x\to0}\frac{-5x+1}{x(x+1)}=+\infty$

المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac5x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=0$$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$.

2) أ) f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{-5(x^2+x)-(2x+1)(-5x+1)}{x^2(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac1x$$

$$f'(x)=\frac{5x^2-2x-1+x^2(x+1)-x(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2-3x-1}{x^2(x+1)^2}=\frac{(x-1)(4x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

ب) $4x+1>0$ ؛ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x-1$

$x>1$: $f'(x)>0$ ؛ f متزايدة تماما.

$0<x<1$: $f'(x)<0$ ، f متناقصة تماما.

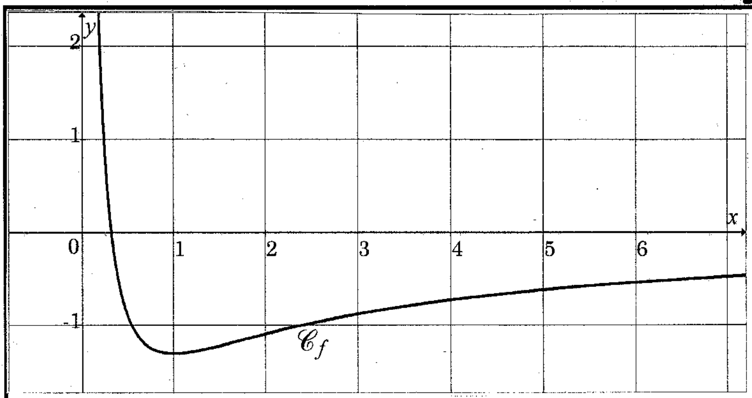
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2+\ln 2$	$\nearrow$	0

$f'(x)=0$ من أجل $x=1$

3) أ) f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;1[$ ؛

$f(0{,}3)\simeq 0{,}18>0$ ، $f(0{,}4)\simeq -0{,}53<0$ ؛ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ ؛ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$ حيث $0{,}3<\alpha<0{,}4$

ب) α يمثل فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.



4) g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

$$g'(x)=\frac{-5x+1}{x(x+1)}+\ln(x+1)-\ln x-\ln m = f(x)-\ln m$$

مماس يوازي $(x'ox)$: $g'(x)=0$ أي $f(x)=\ln m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع $y=\ln m$.

$\ln m<-2+\ln2$ أي $m<2e^{-2}$ ، لا يوجد مماس

$\ln m=-2+\ln 2$ أي $m=2e^{-2}$ ؛ يوجد مماس وحيد

$-2+\ln2<\ln m<0$ أي $2e^{-2}<m<1$ ؛ يوجد مماسان

$\ln m\geq 0$ أي $m\geq1$ ، يوجد مماس وحيد.

II-1)

$$\begin{cases}u(x)=\ln(1+\frac1x)\\ v'(x)=1\end{cases}\qquad\begin{cases}u'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}\\ v(x)=x\end{cases}$$

$$\int_1^2 h(x)\,dx=\left[x\ln(1+\frac1x)\right]_1^2+\int_1^2\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\int_1^2 h(x)\,dx=\left[x\ln(1+\frac1x)+\ln(x+1)\right]_1^2=3\ln3-4\ln2$$

2) $$h(x)-h'(x)-\frac{5}{x+1}=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{x(x+1)}-\frac{5}{x+1}$$

$$=\ln(x+1)-\ln x+\frac{-5x+1}{x(x+1)}=f(x)$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 h(x)\,dx-\int_1^2 h'(x)\,dx-\int_1^2\frac{5}{x+1}\,dx$$

$$=3\ln3-4\ln2-[h(x)]_1^2-5[\ln(x+1)]_1^2=3\ln\left(\frac23\right)$$

3) $$A=\int_1^2 -f(x)\,dx=3\ln\left(\frac32\right)\ u.a$$

III-1) $$U_n=\ln\left(1+\frac1n\right)+\frac{1}{n(n+1)}$$

من أجل كل $n>0$ ، $(1+\frac1n)>1$ ؛ ومنه: $\ln(1+\frac1n)>0$

كذلك $\frac{1}{n(n+1)}>0$ ومنه: $U_n>0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

2) لتكن K الدالة المرفقة والمعرفة على $]0;+\infty[$. $K(x)=h(x)-h'(x)$ ومنه $K'(x)=h'(x)-h''(x)$

$$K'(x)=-\left(\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\right)<0$$

K متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه (U_n) متناقصة.

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3) أ) $$U_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{1}{n(n+1)}=\ln(n+1)-\ln n+\frac1n-\frac{1}{n+1}$$

ب)

$$\begin{aligned}S_n=\;&\cancel{\ln 2}-\ln 1+\frac11-\cancel{\frac12}\\+\;&\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2}+\cancel{\frac12}-\cancel{\frac13}\\+\;&\cancel{\ln 4}-\cancel{\ln 3}+\cancel{\frac13}-\frac14\\&\vdots\\+\;&\ln(n+1)-\cancel{\ln n}+\cancel{\frac1n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$S_n=\ln(n+1)+1-\frac{1}{n+1}=\ln(n+1)+\frac{n}{}$$

عبد المطلب