

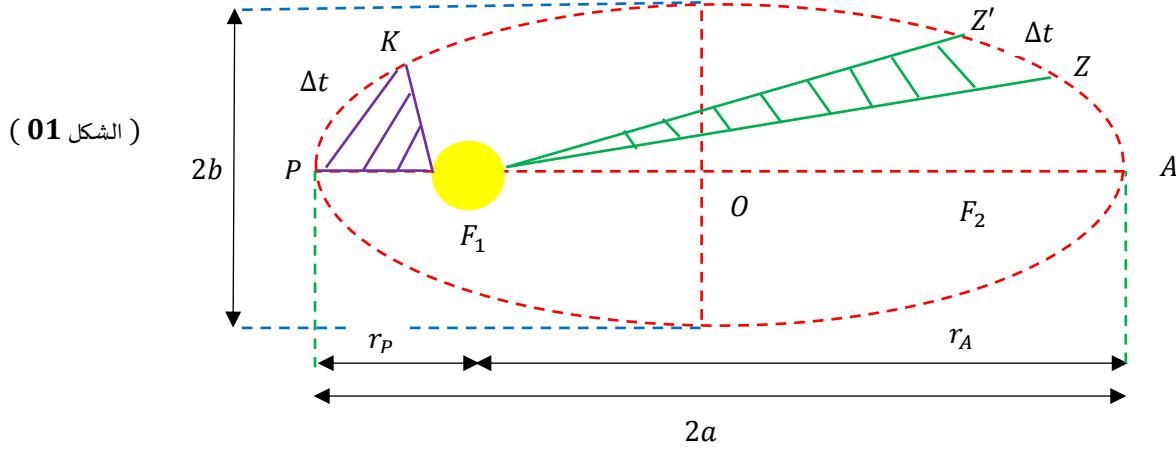
## تمرين شامل : ( حول حركة كوكب وقمر اصطناعي )

يهدف هذا التمرين إلى دراسة :

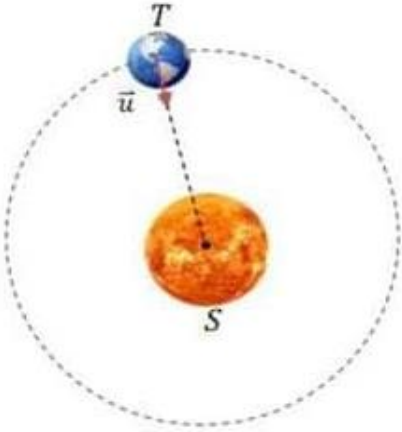
- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار اهليلجي
- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري
- ✓ حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري

I- تدور الأرض حول الشمس بحيث تأخذ المسافة بين مركز عطالتها وبين مركز الشمس القيمتين الموافقتين لأدنى بعد وأقصاه كما يلي

$$r_P = 147.1 \times 10^6 \text{ km} \text{ و } r_A = 152.1 \times 10^6 \text{ km} \text{ (الشكل 01)}$$



- (1) ماهو المرجع المناسب الذي تنسب إليه حركة الأرض ؟ عرفه ؟ وماهي الفرضية الواجب اعتمادها أثناء دراسته ؟
  - (2) أذكر نص القانون الأول لكبلر ؟
  - (3) ما طبيعة مسار كوكب الأرض ؟ ماهو موقع الشمس في هذا المسار ؟
  - (4) ماذا يمثل الطول 2a والطول 2b ؟ أحسب طول نصف المحور الكبير لهذا المسار
  - (5) في أي نقطة تكون سرعة الأرض أصغرية وفي أي نقطة تكون سرعته أعظمية ؟
  - (6) مثل شعاعي سرعتيهما بشكل كيفي على الرسم .
- ينتقل كوكب الأرض أثناء حركته على مداره من النقطة Z إلى Z' ثم من النقطة K إلى النقطة خلال نفس المدة الزمنية Δt .



- (7) حسب قانون كبلر الثاني ماهي العلاقة بين المساحتين الممسوحتين ؟
  - (8) بين أن متوسط السرعة بين الموضعين Z و Z' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين K و P ؟
- II- بغية تسهيل الدراسة نفرض أن مسار الأرض حول الشمس هو مسار دائري :
- 1- مثل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض في الشكل 02 ؟
  - 2- أكتب العبارة الشعاعية للقوة  $\vec{F}_{S/T}$  بدلالة  $\vec{u}, G, M_S, M_T, h, R_S, R_T$
  - 3- بين انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن أن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة .
  - 4- أوجد وحدة المقدار G باستعمال التحليل البعدي .
  - 5- أوجد عبارة السرعة المدارية v بدلالة  $G, M_S, h, R_S, R_T$  .
  - 6- عرف الدور ثم أكتب عبارته بدلالة  $G, M_S, h, R_S, R_T$  . هل يتعلق الدور بكتلة الأرض ؟
  - 7- أذكر نص قانون كبلر الثالث ثم أوجد عبارة ثابت كبلر K وأحسب قيمته .
  - 8- استنتج من القانون الثالث لكبلر البعد بين سطح الشمس و سطح الأرض .

III- يسعى رجل الأعمال الأمريكي ( ايلون ماسك ) صاحب شركة *Space X* إلى توصيل العالم بأكمله بالانترنت الفضائي عن طريق ارسال 12 ألف قمر اصطناعي خلال عدة أعوام ، في 23 مايو 2019 قامت الشركة باطلاق 60 قمر اصطناعي تدور في مدارات دائرية حول مركز الأرض .

نهتم في هذا الجزء بدراسة 6 أقمار اصطناعية خصائصها المدارية مسجلة في الجدول التالي :

| اسم القمر         | Starlink 1 | Starlink 2 | Starlink 3 | Starlink 4 | Starlink 5 | Starlink 6 |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $T_s(s)$          | 5706.7     | 6340       | 10575.4    | 86400      | 17244      | 20963.8    |
| $T_s^2(s^2)$      |            |            |            |            |            |            |
| $r(10^3m)$        | 6880       | 7380       | 10380      | 42105      | 14380      | 16380      |
| $r^3(10^{20}m^3)$ |            |            |            |            |            |            |

حيث  $T_s$  يمثل دور كل قمر و  $r$  البعد المتوسط بين مركزي القمر الصناعي والأرض .

- 1- ماهو المرجع المناسب لدراسة هذه الحركة ؟
- 2- بين أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية :  $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$
- 3- بين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع  $h$  يعطى بالعلاقة التالية :  $g = g_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^2$
- 4- عرف القمر الجيومستقر ؟ من بين الأقمار 6 السابقة حدد القمر الجيو مستقر ؟
- 5- إملئ الجدول ثم أرسم المنحنى البياني  $T_{sat}^2 = f(r^3)$  .
- 6- أثبت العلاقة التالية :  $\frac{T_{sat}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$  ثم أحسب كتلة الأرض  $M_T$  معتمدا على البيان
- 7- أحسب ارتفاع هذا القمر الجيومستقر عن سطح الأرض ، وسرعته ثم تسارعه ؟
- 8- أذكر استعمالات الأقمار الاصطناعية ؟

المعطيات :

$$T = 365 \text{ jours} ; R_T = 6380 \text{ km} ; G = 6.67 \times 10^{-11} (SI) ; R_S = 7 \times 10^5 \text{ Km}$$

$$m_{sat} = 2300 \text{ Kg} ; g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2 ; \pi^2 = 10 ; M_S = 2 \times 10^{30} \text{ Kg}$$



## II - حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري :

1- تمثيل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض ( الشكل المقابل )

2- العبارة الشعاعية للقوة  $\overrightarrow{F_{S/T}}$  بدلالة  $\vec{u}$ ,  $G$ ,  $M_T$ ,  $M_S$ ,  $h$ ,  $R_S$ ,  $R_T$

$$\overrightarrow{F_{S/T}} = G \frac{M_S M_T}{r^2} \vec{u} = G \frac{M_S M_T}{(R_S + R_T + h)^2} \vec{u}$$

3- تبين أن حركة الأرض دائرية منتظمة انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة ( أرض ) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m \vec{a}$$

$$\overrightarrow{F_{S/T}} = M_T \vec{a}$$

$$\vec{a} = a_n \vec{u} + a_T \vec{T}$$

ومنه بالاسقاط على الشعاع الناطمي لدينا :

$$G \frac{M_S M_T}{r^2} = M_T a_n$$

$$a_n = \frac{GM_S}{r^2}$$

بالاسقاط على الشعاع المماسي لدينا :  $0 = M_T a_T$  ومنه  $a_T = 0$  أي  $\frac{dv}{dt} = 0$  أي  $v = cte$  ( السرعة ثابتة )

بما أن مسار الحركة دائري و السرعة ثابتة فإن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة

4- وحدة المقدار  $G$  باستعمال التحليل البعدي :

$$G = \frac{F \times r^2}{M^2} \text{ ومنه } F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$[G] = \frac{[F] \times [r]^2}{[M]^2} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^2}{kg^2} = kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$$

ومنه وحدة  $G$  في جملة الوحدات الدولية هي :  $kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

5- عبارة السرعة المدارية  $v$  :

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{(R_S + R_T + h)}} \text{ وأخيرا } v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}} \text{ ومنه } v^2 = \frac{GM_S}{r} \text{ أي } \frac{v^2}{r} = \frac{GM_S}{r^2} \text{ ومنه } a_n = \frac{v^2}{r}$$

6- الدور : هو الزمن اللازم للأرض للقيام بدورة كاملة حول الشمس ( أي 365 jours ) .

عبارة الدور  $T$  :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_S + R_T + h)^3}{GM_S}} \text{ وأخيرا } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_S}} \text{ ومنه } T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S} \text{ أي } T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_S}{r}} \text{ ومنه } T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_S}{r}}} \text{ ومنه } T = \frac{2\pi r}{v}$$

7- نص قانون كيبلر الثالث : يتناسب مربع الدور طردا مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب ومركز الشمس .

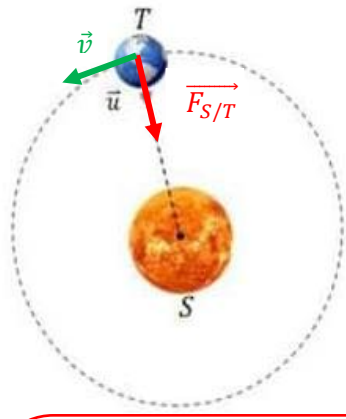
$$\frac{T^2}{r^3} = K \text{ حيث } K \text{ ثابت}$$

إيجاد عبارة الثابت  $K$  وحساب قيمته :

$$K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S r^3} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$K = \frac{4 \times 10}{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}} \Rightarrow K = 3 \times 10^{-19} SI$$

من عبارة  $K$  نجد أن الثابت  $K$  لا يتعلق بكتلة كوكب الأرض بل يتعلق بكتلة كوكب الشمس .



ملاحظة :  $r = R_S + R_T + h$  حيث :

$r$  يمثل البعد بين مركز الأرض ومركز الشمس

$R_S$  يمثل نصف قطر الشمس

$R_T$  تمثل نصف قطر الأرض

$h$  البعد بين سطح الأرض و سطح الشمس

8- استنتاج البعد بين سطح الشمس و سطح الأرض ( $h$ ) من القانون الثالث لكيبلر :

$$K = \frac{T^2}{r^3} \Rightarrow r^3 = \frac{T^2}{K} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} - R_s - R_T : \text{وأخيرا } R_s + R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} \text{ ومنه } r = (R_s + R_T + h)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(365 \times 24 \times 3600)^2}{3 \times 10^{-19}}} - (7 \times 10^5 - 6380) \times 10^3$$

$$h = 1.48 \times 10^{11} \text{ m}$$

III- حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري :

1- المرجع المناسب : المرجع الجيو مركزي ( المركزي الأرضي ) .

2- إثبات أن أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية :  $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة ( أرض ) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا :  $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\vec{F}_{T/sa} = m_{sa}\vec{a}$$

بالاسقاط على الشعاع الناظمي لدينا :

$$G \frac{M_T m_{sa}}{r^2} = m_{sa} a_n$$

$$a_n = \frac{GM_T}{r^2} = G \cdot M_T \times \frac{1}{r^2}$$

وهي من الشكل  $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$  حيث  $A = G \cdot M_T$

3- تبين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع  $h$  يعطى بالعلاقة التالية :  $g = g_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^2$

نعلم أن  $a = a_n = g$

$$g = GM_T \frac{1}{r^2} = GM_T \frac{1}{(R_T+h)^2} \dots \dots \dots (1)$$

في الطرف الثاني لدينا :

$$(2) \dots \dots \dots g_0 = GM_T \frac{1}{R_T^2} \text{ ( عند } g_0 \text{ يكون } h = 0 \text{ ) لأن } g_0 \text{ تعني الجاذبية على سطح الأرض .}$$

$$g = g_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^2 \text{ ومنها نجد : } \frac{g}{g_0} = \frac{GM_T \frac{1}{(R_T+h)^2}}{GM_T \frac{1}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \text{ لدينا : (1) على (2) بقسمة}$$

4- تعريف القمر الجيو مستقر :

هو عبارة عن قمر اصطناعي يظهر لمراقب على سطح الأرض ساكنا ويمتاز بالشروط التالية :

✓ يدور في نفس جهة دوران الأرض

✓ لديه نفس دور الأرض  $T = 24 \text{ h} = 24 \times 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$

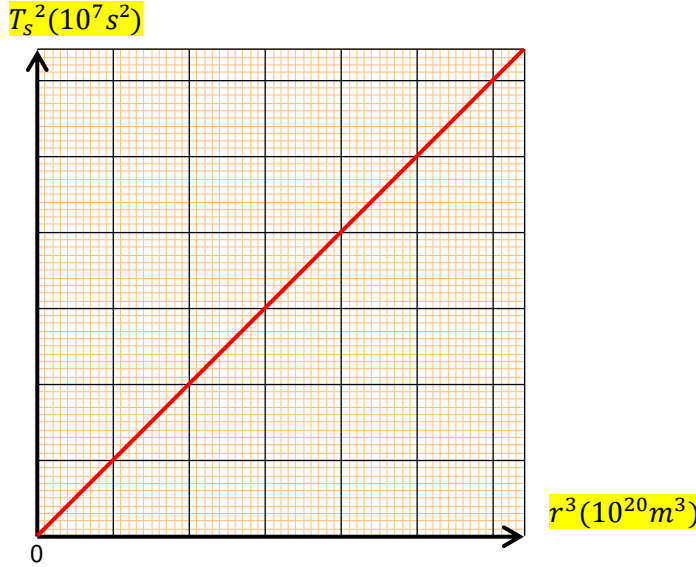
✓ يدور على مستوى خط الاستواء .

تحديد القمر الجيومستقر من بين 6 أقمار السابقة :

القمر الجيو مستقر من لديه دور يساوي 86400 s ومنه القمر الذي لديه نفس دور الأرض من بين 6 أقمار السابقة هو القمر Starlink 4

| اسم القمر          | Starlink 1 | Starlink 2 | Starlink 3 | Starlink 4 | Starlink 5 | Starlink 6 |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $T_s(s)$           | 5706.7     | 6340       | 10575.4    | 86400      | 17244      | 20963.8    |
| $T_s^2(10^7 s^2)$  | 3.25       | 4.019      | 11.18      | 7.465      | 29.73      | 43.94      |
| $r(10^3 m)$        | 6880       | 7380       | 10380      | 42105      | 14380      | 16380      |
| $r^3(10^{20} m^3)$ | 3.25       | 4.019      | 11.18      | 7.465      | 29.73      | 43.94      |

رسم المنحنى  $T^2 = f(r^3)$  :



6- اثبات العلاقة التالية :  $\frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$  :

لدينا :  $a_n = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$  ونعلم أن  $a_n = \frac{v^2}{(R_T+h)}$  أي  $\frac{v^2}{(R_T+h)} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$  ومنه  $v^2 = \frac{GM_T}{(R_T+h)}$  وأخيرا :  $v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$

نعلم أن  $T_s = \frac{2\pi r}{v}$  ومنه  $T_s = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}}$  ومنه  $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$  أي  $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM_T}$  ومنه  $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$  : وبالتالي : وأخيرا :  $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$

$$\frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T}}{r^3} \Rightarrow \frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

ايجاد كتلة الأرض  $M_T$  :

البيان عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ عبارته من الشكل :  $T^2 = \beta r^3$  حيث  $\beta$  هو معامل توجيه البيان .

$$\beta = \frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta}$$

$$\beta = \frac{(4.019 - 3.25) \times 10^7}{(4.019 - 3.25) \times 10^{20}} = 1 \times 10^{-13}$$

$$M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta} = \frac{4 \times 10}{6.67 \times 10^{-11} \times 1 \times 10^{-13}}$$

$$M_T = 5.99 \times 10^{24} \text{ kg}$$

7- حساب ارتفاع القمر الجيو مستقر عن سطح الأرض ( حساب  $h$  ) :

لايجاد الارتفاع  $h$  نستخدم عبارة الدور  $T_s^2$  :

$$T_s^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T} \Rightarrow r^3 = \frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(24 \times 3600)^2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{4 \times 10}} - (6380 \times 10^3)$$

$$h = 35709000 \text{ m} = 35709 \text{ km}$$

حساب السرعة المدارية للقمر الجيومستقر :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} : \text{ لدينا مما سبق}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{(6380 + 35709) \times 10^3}}$$

$$v = 3081 \text{ m/s}$$

حساب تسارع القمر الجيومستقر :

$$a = g = g_0 \left( \frac{R_T}{R_T + h} \right)^2$$

$$a = 9.81 \left( \frac{6380 \times 10^3}{(6380 + 35709) \times 10^3} \right)^2$$

$$a = 0.22 \text{ m/s}^2$$

8- استعمالات الأقمار الاصطناعية :

- الاتصالات
- الأحوال الجوية
- البث التلفزيوني
- تحديد المواقع GPS
- استعمالات عسكرية مختلفة

**ملاحظتين في الحسابات :**

يجب تحويل الأطوال إلى وحدة المتر ( $m$ )

يجب تحويل الدور إلى وحدة الثانية ( $s$ )