

الشكل 1

ندرس سلوك وشيعة اتجاه تغير التيار الكهربائي فيها، فمن أجل ذلك نركب الدارة الموضحة في الشكل 1 والمكونة من:

- مولد توتر كهربائي قوته المحركة الكهربائية ثابتة $E = 12V$.
- ناقلان أوميان مقاوماتهما $R_1 = 220\Omega$ ، $R_2 = 100\Omega$.
- وشيعة مقاومتها r وذاتيتها L .
- صمام ثنائي وقاطعة K وأسلاك توصيل.

(I) عند $t = 0$ نغلق القاطعة K :

1- أعد رسم جزء من الدارة المدروسة مع تمثيل الجهة الاصطلاحية للتيار الكهربائي وجهة والتوتر الكهربائي بين طرفي كل عنصر كهربائي.

2- أ- اكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر الكهربائي بين طرفي الناقل الأومي R_1 .

ب- بين أن
$$u_{R_1}(t) = \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} \left(1 - e^{-\frac{(R_1 + r)t}{L}} \right)$$
 حلا للمعادلة التفاضلية.

3- أ- ما هو سلوك الوشيعة في النظام الدائم؟

ب- استنتج عبارة شدة التيار الكهربائي I_0 في النظام الدائم بدلالة E و R_1 و r .

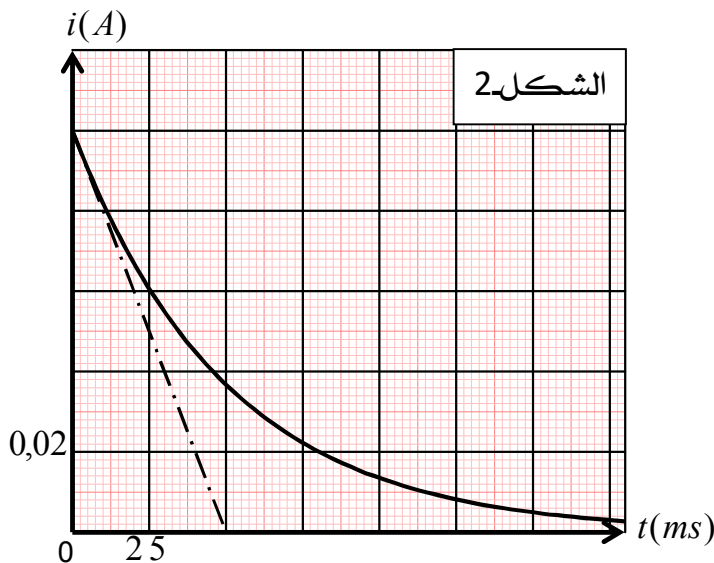
محذوف استثنائيا هذه السنة

(II) - نفتح القاطعة K في لحظة نعتبرها $t = 0$: الدراسة التجريبية مكنتنا من تمثيل منحنى تغيرات شدة

التيار الكهربائي بدلالة الزمن $i = f(t)$ الموضح في الشكل 2:

1- أ- بين أن المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار في الدارة تكتب بالشكل: $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} i(t) = 0$

حيث: τ ثابت الزمن.



الشكل 2

ب- إن حل المعادلة التفاضلية هو $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

- عبر عن الثابت A بدلالة ثوابت الدارة.

2- أ- اعتماد على البيان جد قيمة كل من:

- المقاومة الداخلية للوشيعة r .

- ذاتية الوشيعة L .

3- أ- اكتب العبارة الزمنية للطاقة في الوشيعة.

ب- احسب قيمتها لما $t = 0ms$ و $t = 2,5ms$.

1. المعادلة التفاضلية لتطور شحنة المكثفة $q(t)$

$$\begin{cases} u_c(t) = \frac{q(t)}{C} \\ u_{R_1}(t) = R_1 i(t) = R_1 \frac{dq(t)}{dt} \end{cases}$$

بتطبيق قانون جمع التوترات: $u_c(t) + u_{R_1}(t) = E$ ولدينا:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{R_1 C} = \frac{E}{R_1}$$

ومنه: $R_1 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$ وبقسمة طرفي المساواة على R_1 نجد:

2. عبارة الثوابت A و B وبدلالة مميزات الدارة الكهربائية.

باشتقاق عبارة الحل بالنسبة للزمن نجد: $\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{\alpha} A e^{-\frac{t}{\alpha}}$ ، نعوض الحل والمشتقة في المعادلة التفاضلية:

$$\left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R_1 C}\right) A e^{-\frac{t}{\alpha}} + \frac{1}{R_1 C} B - \frac{E}{R_1} = 0 \text{ ومنه: } -\frac{1}{\alpha} A e^{-\frac{t}{\alpha}} + \frac{1}{R_1 C} A e^{-\frac{t}{\alpha}} + \frac{1}{R_1 C} B - \frac{E}{R_1} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = R_1 C \\ B = CE \end{cases} \text{ اذن: } \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{R_1 C} \\ \frac{1}{R_1 C} B = \frac{E}{R_1} \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R_1 C} = 0 \left(A e^{-\frac{t}{\alpha}} \neq 0 \right) \\ \frac{1}{R_1 C} B - \frac{E}{R_1} = 0 \end{cases} \text{ حيث:}$$

من الشروط الابتدائية ($t = 0$) نجد: $q(0) = A e^0 + B = 0$ ومنه $A = -B$ ومنه $A + B = 0$ ومنه:

$$B = -CE \text{ تصبح عبارة الحل: } q(t) = q_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right) \text{ حيث } q_{\max} = CE$$

3. إيجاد قيمة الثابت α .

مما سبق الثابت α يمثل ثابت الزمن τ_1 وبالاعتماد على البيان نجد: $\tau_1 = 2s$

ب. إيجاد سعة المكثفة C .

$$C = 10^{-3} F = 1mF \text{ اذن: } C = \frac{\tau_1}{R_1} = \frac{2}{2 \times 10^3}$$

ج. إيجاد قيمة القوة المحركة الكهربائية E للمولد.

$$E = 9V \text{ اذن: } E = \frac{q_{\max}}{C} = \frac{9 \times 10^{-3}}{10^{-3}} \text{ ومنه: } q_{\max} = CE$$

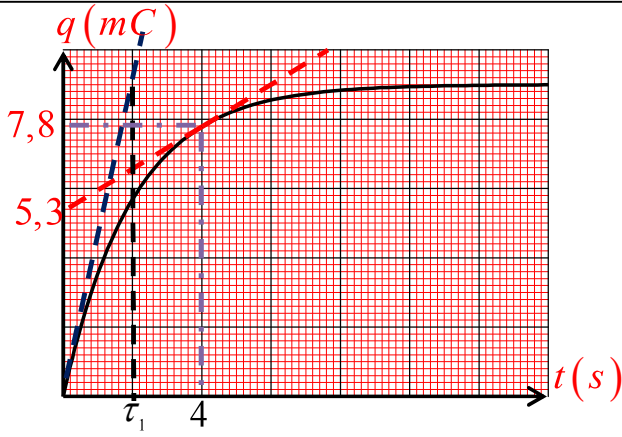
4. عبارة شدة التيار i بدلالة شحنة المكثفة q ، ثم حساب شدة التيار عند اللحظة $t = 4s$.

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ ، شدة التيار تمثل معامل توجيه المماس للمنحنى البياني } q = f(t)$$

حساب قيمته عند اللحظة $t = 4s$.

$$i = \frac{dq}{dt} \Big|_{t=4s} = \frac{(7,8 - 5,3) \times 10^{-3}}{4 - 0}$$

$$i = 6,25 \times 10^{-4} A$$



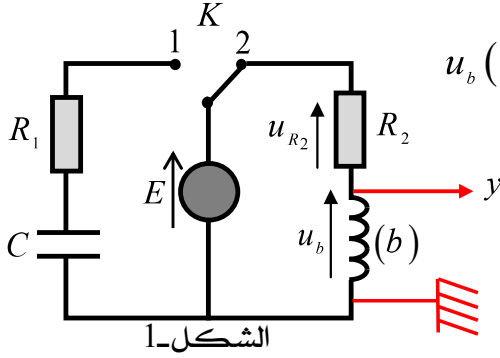
5- حساب قيمة الطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = 4s$

لدينا: $E_c(t) = \frac{1}{2} C u_c(t)^2$ حيث: $u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$

ومنه: $E_c(4s) = \frac{1}{2} \frac{q(4s)^2}{C}$ ، حيث: $E_c(4s) = \frac{1}{2} \frac{(7,8 \times 10^{-3})^2}{C}$

ومنه: $E_c(4s) = 0,122J$

II- 1- تبيان على الدارة كيفية ربط راسم الاهتزاز لمشاهدة التوتربين طرفي الوشيعة $u_b(t)$.



الشكل-1

2- أ- تحديد سلم محور تراتيب المنحنى $u_b = g(t)$.

من قانون جمع التوترات عند اللحظة $t = 0$: $u_b(0) + u_{R_2}(0) = E$

ومنه: $u_b(0) = E$ حيث: $u_{R_1}(0) = 0$ لأن: $i(0) = 0$

اذن: $u_b(0) = E = 9V$ ، من البيان: $9V \rightarrow 4,5cm$

ومنه: $1cm \rightarrow 2V$

ب- ايجاد شدة التيار الكهربائي I_0 في النظام الدائم.

عند بلوغ النظام الدائم يكون: $E = u_b(\max) + u_{R_2}(\max)$ ومنه: $u_{R_2}(\max) = E - u_b(\max)$
 $u_{R_2}(\max) = R_2 I_0$

ومنه: $I_0 = 0,2A$ اذن: $I_0 = \frac{E - u_b(\max)}{R_2} = \frac{9 - 2}{35}$

3- ايجاد المعادلة التفاضلية للتيار $i(t)$.

بتطبيق قانون جمع التوترات: $u_b(t) + u_{R_2}(t) = E$ حيث:
 $\begin{cases} u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt} + ri(t) \\ u_{R_2}(t) = R_2 i \end{cases}$

ومنه: $L \frac{di(t)}{dt} + (R_2 + r)i = E$ بالقسمة على L نجد: $\frac{di(t)}{dt} + \frac{(R_2 + r)}{L} i = \frac{E}{L}$

4- ايجاد عبارة الثابتين A و τ_2 بدلالة مميزات الدارة.

باشتقاق عبارة الحل بالنسبة للزمن نجد: $\frac{di(t)}{dt} = \frac{A}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ ، نعوض الحل والمشتقة في المعادلة التفاضلية:

$\frac{A}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \frac{(R_2 + r)}{L} A e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{(R_2 + r)}{L} A - \frac{E}{L} = 0$

ومنه: $0 = \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{(R_2 + r)}{L} \right) A e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{(R_2 + r)}{L} A - \frac{E}{L}$ حيث:
 $\begin{cases} \frac{1}{\tau_2} - \frac{(R_2 + r)}{L} = 0 \left(A e^{-\frac{t}{\tau_2}} \neq 0 \right) \\ \frac{(R_2 + r)}{L} A - \frac{E}{L} = 0 \end{cases}$

تصبح عبارة شدة التيار الكهربائي: $i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R_2 + r}{L} t} \right)$ حيث $I_0 = \frac{E}{R_2 + r}$

ومنه: $\begin{cases} \tau_2 = \frac{L}{R_2 + r} \\ A = \frac{E}{R_2 + r} \end{cases}$

5- أثبت أن عبارة التوتور $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعية تكتب من الشكل: $u_b(t) = \frac{rE}{R_2+r} + \frac{R_2E}{R_2+r} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

لدينا: $i(t) = \frac{E}{R_2+r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$ بالاشتقاق: $\frac{di(t)}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ ولدينا: $u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt} + ri(t)$

ومنه:

$$u_b(t) = L \frac{E}{L} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{rE}{R_2+r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) = E e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{rE}{R_2+r} - \frac{rE}{R_2+r} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = \frac{rE}{R_2+r} + \left(E - \frac{rE}{R_2+r}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$u_b(t) = \frac{rE}{R_2+r} + \frac{R_2E}{R_2+r} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \text{ ومنه } u_b(t) = \frac{rE}{R_2+r} + \left(E \left(\frac{R_2+r}{R_2+r}\right) - \frac{rE}{R_2+r}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

6- برهن أن المماس للمنحنى $u_b = h(t)$ عند اللحظة $t = 0$ يقطع المستقيم المقارب $u_b = u_b(\infty)$ في اللحظة $t = \tau_2$ ، ثم حدد قيمة ثابت الزمن τ_2 .

المماس عبارة عن خط مستقيم معادلته: $u_b = at + b$ عند اللحظة $t = 0$ ، $u_b = b = E$ ، معامل توجيه

$$u_b = -\frac{R_2E}{(R_2+r)\tau_2} t + E \text{ ومنه } a = \left. \frac{du_b}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{R_2E}{(R_2+r)\tau_2}$$

$$u_b = \frac{rE}{R_2+r} \text{ عند اللحظة } t \rightarrow \infty \text{ المقارب } u_b = u_b(\infty) \text{ معادلة المستقيم المقارب}$$

$$-\frac{R_2}{(R_2+r)\tau_2} t + 1 = \frac{r}{R_2+r} \text{ ومنه } -\frac{R_2E}{(R_2+r)\tau_2} t + E = \frac{rE}{R_2+r}$$

$$\frac{R_2}{(R_2+r)\tau_2} t = \frac{R_2}{R_2+r} \text{ ومنه } \frac{R_2}{(R_2+r)\tau_2} t = -\frac{r}{R_2+r} + 1 = -\frac{r}{R_2+r} + \frac{R_2+r}{R_2+r}$$

$$\text{ومنهم } \frac{t}{\tau_2} = 1 \text{ اذن: } t = \tau_2 \text{ من البيان نجد: } \tau_2 = 2ms$$

7- جد قيمة ذاتية الوشيعية L ، ثم استنتج قيمة مقاومة الوشيعية r .

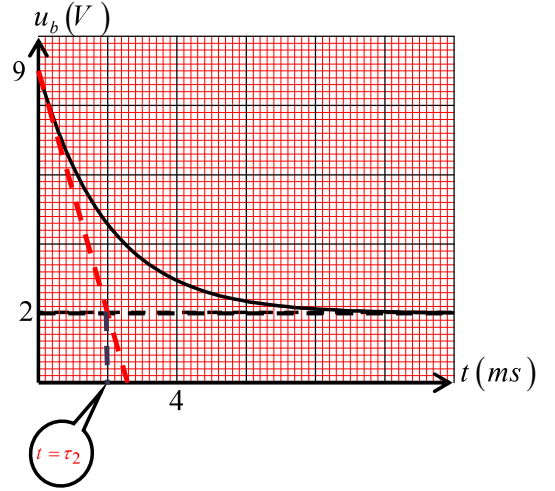
$$\left. \frac{du_b}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{R_2E}{(R_2+r)\tau_2} = -\frac{R_2E}{L} \text{(1) وعند اللحظة } t = 0 \text{ لدينا: } \frac{du_b}{dt} = \frac{rE}{R_2+r} - \frac{R_2E}{L} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$\left. \frac{du_b}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{9-2}{(0-2) \times 10^{-3}} = -3,5 \times 10^3 \text{ V.s}^{-1} \text{(2)}$$

$$\text{بالمطابقة بين العلاقة (1) و(2) نجد: } -\frac{R_2E}{L} = -3,5 \times 10^3 \text{ ومنهم } L = \frac{R_2E}{3,5 \times 10^3} = \frac{35 \times 9}{3,5 \times 10^3} \text{ اذن: } L = 90mH$$

استنتاج قيمة r :

$$r = 10\Omega \text{ :اذن } r = \frac{L}{\tau_2} - R_2 = \frac{90 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} - 35 = 10\Omega$$



8- برهن أن زمن وصول الطاقة المخزنة في الوشيعية إلى النصف هو: $t_{1/2} = \tau_2 \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$.

$$E_b = E_b(max) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)^2 \text{ ومنه: } E_b = \frac{1}{2} L \left(I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)^2 \text{ لدينا: } E_b = \frac{1}{2} L i^2 \text{ ومنه:}$$

$$E_b(max) = \frac{1}{2} L I_0^2 \text{ حيث:}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 1 - e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau_2}} \text{ ومنه: } \frac{1}{2} = \left(1 - e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau_2}}\right)^2 \text{ عند اللحظة } t = t_{1/2} \text{ : } E_b = \frac{E_b(max)}{2} = E_b(max) \left(1 - e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau_2}}\right)^2$$

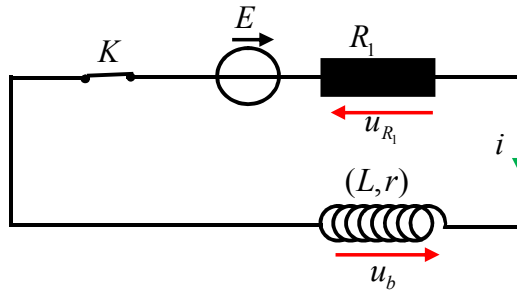
$$\text{ ومنه: } 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau_2}} \text{ ومنه: } \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau_2}} \text{ بالادخال ln على طرفي المساواة نجد: } \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{t_{1/2}}{\tau_2}$$

$$\text{ ومنه: } \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{t_{1/2}}{\tau_2} \text{ اذن: } t_{1/2} = \tau_2 \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) \text{ وهو المطلوب.}$$

حل التمرين رقم: 02

(I) عند $t = 0$ نغلق القاطعة K :

1- تمثيل الجهة الاصطلاحية للتيار الكهربائي وجهة والتوتر الكهربائي بين طرفي كل عنصر كهربائي:



2- المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر الكهربائي بين طرفي الناقل الأومي R_1 :

$$\text{لدينا حسب قانون جمع التوترات: } u_b(t) + u_{R_1}(t) = E$$

$$\text{ولدينا: } u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt} + ri(t)$$

$$\text{ومنه: } L \frac{di(t)}{dt} + ri(t) + u_{R_1}(t) = E$$

$$\text{بضرب طرفي المساواة في } (R_1) \text{ نجد: } L \frac{d(R_1 \cdot i(t))}{dt} + r(R_1 \cdot i(t)) + R_1 u_{R_1}(t) = R_1 E$$

$$\text{ومنه: } L \frac{du_{R_1}(t)}{dt} + (R_1 + r)u_{R_1}(t) = R_1 E \quad \text{ومنه: } L \frac{du_{R_1}(t)}{dt} + ru_{R_1}(t) + R_1 u_{R_1}(t) = R_1 E$$

$$\text{بالضرب في } \left(\frac{1}{L}\right) \text{ نجد: } \left(\frac{1}{L}\right) \left[L \frac{du_{R_1}(t)}{dt} + (R_1 + r)u_{R_1}(t) \right] = \frac{R_1}{L} E \dots (1) \text{ وهو المطلوب.}$$

$$\text{ب- تبيان أن } u_{R_1}(t) = \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} \left(1 - e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} \right) \text{ حلال للمعادلة التفاضلية (1).}$$

نشتق الحل بالنسبة للزمن:

$$u_{R_1}(t) = \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} - \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t}$$

$$\frac{du_{R_1}}{dt} = \frac{R_1 E}{L} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t}$$

ونعوض الحل ومشتقه في المعادلة التفاضلية نجد (1):

$$\frac{R_1 E}{L} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} + \frac{R_1 + r}{L} \cdot \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} - \frac{R_1 + r}{L} \cdot \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} = \frac{E \cdot R_1}{L}$$

$$\frac{R_1 E}{L} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} + \frac{R_1 E}{L} - \frac{R_1 E}{L} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} = \frac{E \cdot R_1}{L}$$

$$\frac{R_1 E}{L} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} - \frac{R_1 E}{L} e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} = \frac{E \cdot R_1}{L} - \frac{R_1 E}{L}$$

$$0 = 0$$

$$\text{إذا: } u_{R_1}(t) = \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} \left(1 - e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} \right) \text{ حل للمعادلة التفاضلية.}$$

3- أ. سلوك الوشيعية في النظام الدائم: الوشيعية تتصرف كناقل أومي لأن: $u_b(t) = ri(t)$

ب- استنتاج عبارة شدة التيار الكهربائي I_0 في النظام الدائم بدلالة E و R_1 و r :

$$I_0 = \frac{E}{(R_1 + r)} \text{ ومنه: } u_{R_1}(t) = \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} \left(1 - e^{-\frac{(R_1 + r)}{L} t} \right)_{t \rightarrow +\infty} = \frac{R_1 E}{(R_1 + r)} = R_1 I_0$$

$$(II) \text{ 1- أ تبيان أن المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار في الدارة تكتب بالشكل: } \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} i(t) = 0$$

حيث: τ ثابت الزمن.

$$\text{لدينا حسب قانون جمع التوترات: } u_b(t) + u_{R_2}(t) = 0$$

$$\text{ولدينا: } u_{R_2}(t) = R_2 i(t) \text{ و } u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt} + ri(t)$$

$$\text{ومنه: } L \frac{di(t)}{dt} + (R_2 + r)i(t) = 0$$

$$\text{بضرب طرفي المساواة في } \left(\frac{1}{L}\right) \text{ نجد: } \left(\frac{1}{L}\right) \left[L \frac{di(t)}{dt} + (R_2 + r)i(t) \right] = 0 \dots (*) \text{ حيث: } \tau = \frac{L}{R_2 + r}$$

$$\text{ب- إن حل المعادلة التفاضلية هو } i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{- باشتقاق الحل بالنسبة للزمن نجد: } \frac{di(t)}{dt} = -\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{بتعويض الحل ومشتقه في المعادلة التفاضلية (*) وبعد التبسيط نجد: } A = I_0 = \frac{E}{(R_2 + r)}$$

2- أ- إيجاد من البيان قيمة كل من :

- قيمة المقاومة الداخلية للوشية r :

من البيان وعند اللحظة $t = 0$ نجد: $I_0 = 0,1(A)$

$$r = \frac{E}{I_0} - R_2$$

$$r = \frac{12}{0,1} - 100 = 20 \Omega$$

- ذاتية الوشية L :

$$\tau = \frac{L}{R_2 + r}$$

$$L = \tau \cdot (R_2 + r)$$

قيمة ثابت الزمن τ : هو فاصلة نقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ مع محور الفواصل من البيان نجد: $\tau = 5(ms)$

$$L = 5 \cdot 10^{-3} \cdot (20 + 100) = 0,6(mH)$$

3- أ- العبارة الزمنية للطاقة في الوشية.

$$\text{لدينا: } E_b(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2 \text{ ولدينا: } i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ ومنه: } E_b(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

ب- حساب قيمتها لما $t = 0ms$:

$$E_b(0) = \frac{1}{2} LI_0^2 e^0 = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} (0,6)(0,1)^2 = 3mJ$$

حساب قيمتها لما $t = 2,5ms$:

$$E_b(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 e^{-\frac{2(2,5)}{5}} = E_{b0} e^{-1} = 3e^{-1} = 1,1mJ$$