اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{eu_n}{u_n+1}$

1. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq e$

ب. ادرس اتجاه تغير (u_n)، ثم استنتج تقاربها.

2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{e(1-e)u_n}{u_n - e + 1}$

أ) بين أن (v_n) تتاليه هندسية أساسها e يطلب حساب حدها الأول.

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim u_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$

4. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} - e + 1 \leq e^{-1}(u_n - e + 1)$

ب. استنتج أن: $0 < u_n - e + 1 \leq e^{-n}$

ت. استنتج $\lim u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات مع التبرير :

1. قانون الإحتمال للمتغير العشوائي معرف بالجدول المقابل :

x_i	-2	β	2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	α	$\frac{7}{15}$

قيمة العددين الحقيقيين α و β حتى يكون $E(193X+1444) = 2023$ هي :

أ) $\alpha = \dfrac{3}{27}\ ;\ \beta = 1$ ، ب) $\alpha = \dfrac{1}{3}\ ;\ \beta = 4$ ، ج) $\alpha = \dfrac{1}{3}\ ;\ \beta = 0$

2. المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = e^n - \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

نصع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

أ) $S_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} + \ln(n+1)$ ، ب) $S_n = ne^n - \ln(n) + \ln(n+1)$ ، ج) $S_n = \dfrac{e^{n+1} - e}{-1} + \ln(n+1)$

3. نعتبر العدد الحقيقي $I = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^{2022}}{x}\,dx$ قيمة I هي :

أ) $I = 2023$ ، ب) $I = \dfrac{1}{2023}$ ، ج) $I = \dfrac{2022}{2023}$

4. حلول المعادلة التفاضلية $(E)\ldots\ldots y'' = e^{-x} + \dfrac{1}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$ هي :

أ) $f(x) = \ln x - e^{-x} + c_1x + c_2$ ، ب) $f(x) = e^{-x} + \ln x + c_1x + c_2$ ، ج) $f(x) = e^{-x} - \ln x + c_1x + c_2$

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $g(x)=2x\ln(x+1)$

ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=3cm$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $\left[0;+\infty\right[$: $\dfrac{x^2}{x+1}=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

2. عين مجموعة الدوال F الأصلية للدالة $f:x\mapsto\dfrac{x^2}{x+1}$ على المجال $\left[0;+\infty\right[$

3. نضع: $I=\displaystyle\int_0^{e-1}\frac{x^2}{x+1}dx$ و $J=\displaystyle\int_0^{e-1}g(x)dx$

أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن : $J=(e-1)^2-I$

ب) أحسب قيمة I و استنتج قيمة J .

4. أ) تحقق أنه من أجل كل $x\geq 0$: $g(x)\geq 0$

ب) استنتج مسا ة الحيز المحدد بالمنحنى (Γ) و محور الفواصل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=e-1$

التمرين الرابع :(07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(4x+2)e^x-1$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل ج ول غيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0,2<\alpha<-0,19$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\left(2xe^x-1\right)e^x$.

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $0,34<\beta<0,36$

ب) استنتج أن : $e^\beta=\dfrac{1}{2\beta}$

5) أرسم (T) و المنحنى (C_f).

6) أ) تحقق أن الدالة $H:x\mapsto\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 2xe^{2x}$ على $\mathbb{R}$

ب) احسب بالسنتمتر المربع مساحة $S(\beta)$ الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى و محور الفواصل و المستقيمات المعرفة بالمعادلات $x=0$ و $x=\beta$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{4+u_n^2}}$

1. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n > 0$

ب. أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{4}{u_n^2}$

أ. بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب. أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n. واحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1\sqrt{v_1} + 2u_2\sqrt{v_2} + 3u_3\sqrt{v_3}\cdots + nu_n\sqrt{v_n}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التعليل :

1) الحد العام للمتتالية العددية (w_n) المعرفة بـ: $w_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $w_{n+1} = -\dfrac{1}{3}w_n - 4$ هو: $w_n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 3$

2) الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = (x - \ln(x))e^{-2x}$ تمثيلها البياني يقبل مستقيم مقارب معادلته : $y = 0$

3) الدالتان G و H المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = x + \ln(e^{-2x}+1)$ و $H(x) = -x + \ln(e^{2x}+1)$ أصليتان لنفس الدالة

4) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \dfrac{1+\ln x^2}{x}$ على المجال $\left[e^{-1};e\right]$ تساوي $\dfrac{2e}{e^2-1}$.

5) من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $\ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x-1)^2\, e^x$

ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1. نعتبر G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = (\alpha x + \beta)e^x$

- عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون الدالة G دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

2. نضع: $A = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ و $B = \displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,dx$

أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن: $B = e - 2A$

ب) أحسب قيمة A ، ثم استنتج قيمة B

3. أ) بالإستعانة بنتائج السؤال (2. ب) أحسب العدد الحقيقي A حيث $A = \int_0^1 (x-1)^2\, e^x dx$

ب) فسر النتيجة هندسيا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 + 4\ln x$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,78 < \alpha < 0,79$

3. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

$(II$ لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1-2x+\frac{1+2\ln x}{x^2}$

(C) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، حيث وحدة الطول $\|\vec{i}\|=2cm$.

1. أ. بين أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$ ، فسر النتيجة هندسيا

ب . احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ يكون : $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^3}$.

ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن : $f(\alpha)=1+\frac{1-3\alpha^3}{\alpha^2}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

بين أن (C) يقبل مماسا وازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

4. أنشئ (Δ)،(T) و (C)

5- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m د حلول المعادلة $f(x)=-2x+m$

6. نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $H(x)=\frac{-1-\ln x}{x}$

أ) بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة $h:\mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\sqrt{e^{-1}}$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني