تمرين في حركة القذيفة / بكالوريا رياضيات و تقني رياضي - 2011

في لعبة رمي الجلة، يقذف اللاعب في اللحظة $t = 0\,s$ الجلة من ارتفاع $oz_0 = h = 2,0\,m$، عن سطح الأرض، بسرعة ابتدائية $v_0 = 13,7\,m \cdot s^{-1}$، شعاعها يصنع زاوية $\alpha = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{v_0}) = 35°$.

نهمل تأثير الهواء (مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس)، ونأخذ $g = 9,80\,m \cdot s^{-2}$.

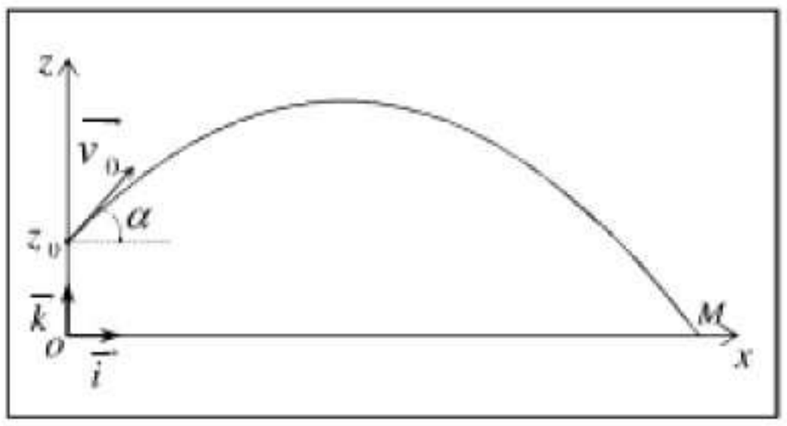
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المعلم المبين على (الشكل-2)، استخرج:

أ- المعادلات التفاضلية للحركة.

ب- المعادلات الزمنية للحركة.

2- اكتب معادلة المسار $z = f(x)$.

3- اوجد إحداثيات M نقطة سقوط القذيفة. وما هي سرعتها عندئذ ؟



الشكل-2

Prof.benhamoud

الشروط الابتدائية: (ضرورية في حدة القذيفة)

عند اللحظة $t=0$ يكون:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = h = 2m \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

1/. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في معلم سطحي أرضي نعتبره غاليلي

القوى الخارجية المؤثرة على المجموعة (جلة) هي: قوة الثقل $\vec{P}$

$$\sum_{ext} \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

منسقط العلاقة الشعاعية على المحورين (ox) و (oy)،

أ) . المعادلات التفاضلية:

وفق المحور (ox) :

$$P_x = m a_x$$
$$0 = m a_x$$
$$a_x = 0$$
$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$P_x = 0$

$a_x = \frac{dv_x}{dt}$

$v_x = \frac{dx}{dt}$

وفق المحور (oy) :

$$P_z = m a_z$$
$$-P = m a_z$$
$$-mg = m a_z$$
$$a_z = -g$$
$$\frac{dv_z}{dt} = -g \rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

$P_z = -P$

$a_z = \frac{dv_z}{dt}$

$v_z = \frac{dz}{dt}$

Prof.benhamoud

ب) إيجاد معادلات الزينة للحركة :

وفق (ox) : $\frac{dv_x}{dt} = 0$

$v_x = C$ (ثابتة) $= v_0 \cos\alpha$

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$

$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t + x_0$ ($x_0 = 0$)

$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$

وفق (oy) : $\frac{dv_z}{dt} = -g$

$v_z = -gt + v_{0z}$

$v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$

$\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha$

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + z_0$

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h$

ج) معادلة المسار $z = f(x)$:

$$z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0\cos\alpha} + h$$
$$z = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha\, x + h$$
$$z = -0{,}04x^2 + 0{,}7x + 2$$

3) إيجاد إحداثيتي النقطة M :

$z_M = 0 \rightarrow 0 = -0{,}04x_M^2 + 0{,}7x_M + 2$

$\Delta = (0{,}7)^2 - 4\times(-0{,}04)\times 2$

$\Delta = 0{,}81$

المميز Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0{,}81 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2{,}5 \text{ (حل مرفوض)} \\ x_2 = 20\,m \text{ (حل مقبول)} \end{cases}$

M : $(x_M = 20m,\ z_M = 0)$

م. إنحفاظ الطاقة الحركية (جملة) ←

سرعتها في النقطة M :

$v_M = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

$v_M = \sqrt{(13{,}7)^2 + 2\times 9{,}8\times 2} = 15{,}06\ \frac{m}{s}$