سلاسل المنجد - دروس و تمارين

3AS
الشعب العلمية و الرياضية

السلسلة 3-02-1

تطور جملة ميكانيكية

عرض نظري و تمارين محلولة

يمكن تحميل السلسلة بصيغة pdf من موقع المنجد :
www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل – تمارين – فيديوهات ......)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في نفس الموقع الإلكتروني .

لكي يصلك جديد موقع المنجد تابع صفحة الفايسبوك التالية :
facebook.com/elmoundjidff

الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
fares_fergani@yahoo.fr
0771998109

الإصدار : جانفي/2023

علوم فيزيائية

العلوم الفيزيائية

سلاسل المنجد في العلوم الفيزيائية – ثالثة ثانوي – الوحدة 05

تطور جملة ميكانيكية

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

****

السلسلة 3 –05– 01

عرض نظري و تمارين

I– مفاهيم أساسية في الميكانكيك

1- المرجع و المعلم

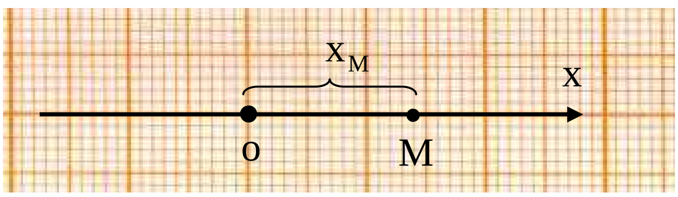
1– المرجع و المعلم :

أ– نسبية الحركة :

- الحركة و السكون مفهومان نسبيان ، و لدراسة حركة أي جسم ، يقتضي اختيار مرجع تنسب إليه حركة هذا الجسم و هذا المرجع عادة ما يكون الأرض . أو جسم ساكن بالنسبة للأرض .

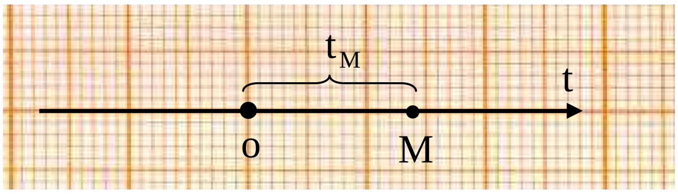
ب– معلم المسافة و الفاصلة :

- معلم المسافة هو معلم مرتبط بالمرجع ، يرتكز على نقطة ثابتة (O) تدعى مبدأ المعلم (أو مركز الإحداثيات) ، يستعمل هذا النوع من المعالم في تعيين موضع المتحرك عند كل لحظة زمنية ، و هو يوجد على ثلاث أنواع : فضائي ، مستوي ، خطي .
- فاصلة الموضع M لمتحرك على مسار مستقيم في معلم خطي يوازي هذا المسار، هو مقدار جبري يمثل بعد هذا الموضع عن مبدأ المعلم (الشكل) .



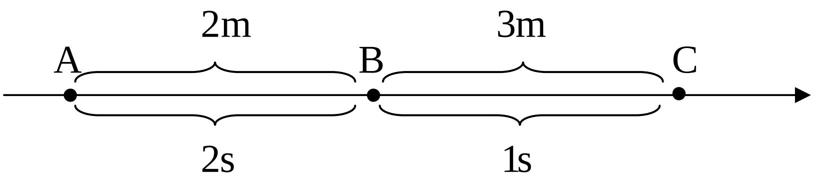
جـ- معلم الأزمنة و اللحظة الزمنية :

- معلم الأزمنة هو معلم خطي موجه و موحد بوحدات زمنية ، مبدأه يكون كيفي و مختار .
- اللحظة الزمنية عند الموضع M هي الفاصل الزمني بين لحظة بلوغ المتحرك النقطة M ، و مبدأ الأزمنة .



التمرين (1) : (التمرين : 001 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جسم نقطي (S) يتحرك على مسار مستقيم ، يبدأ حركته من النقطة (A) باتجاه النقطة (B) ، فيقطع مسافة AB = 2 m ، بعد 2 s من بدأ حركته ، ثم مسافة BC = 3 m بعد 1s من مروره بالنقطة (B) باتجاه نقطة أخرى (C) .



- في معلم خطي منطبق على مسار الحركة أوجد فواصل النقاط (A) ، (B) ، (C) ، و كذا لحظة مرور المتحرك بهذه النقاط في الحالات التالية :
1- مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة (A) .
2- مبدأ الأزمنة عند النقطة (A) و مبدأ الفواصل عند النقطة (B) .

الأجوبة :

1)

	A	B	C
t (s)	0	2	3
x (m)	0	2	5

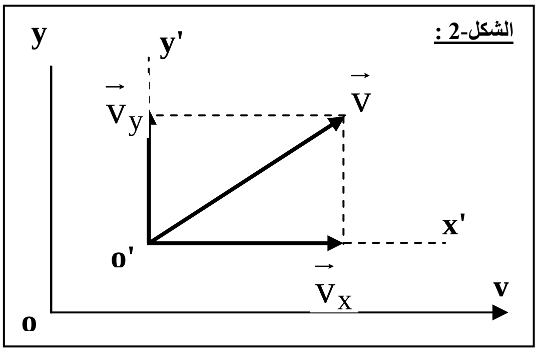
3)

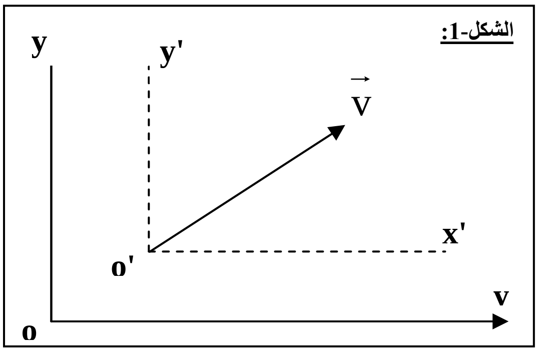
	A	B	C
t (s)	0	2	3
x (m)	-2	0	3

2- تحليل الأشعة

أ- كيفية تحليل شعاع إلى مركبتيه في معلم مستوي :

لتحليل شعاع و ليكن شعاع السرعة $\vec{v}$ إلى مركبتيه $\vec{v}_x$ وفق المحور ox و $\vec{v}_y$ وفق المحور oy نسقط عموديا الشعاع $\vec{v}$ على المستقيمين (o'x') ، (o'y') فنحصل على الشعاع $\vec{v}_x$ الذي يمثل مركبة الشعاع $\vec{v}$ على المحور (ox) و على الشعاع $\vec{v}_y$ الذي يمثل مركبة الشعاع $\vec{v}$ المحور (oy) (الشكلين 2- 1،)





- يمكن كتابة شعاع و ليكن $\vec{v}$ بدلالة مركبتيه v_x ، v_y و شعاعي الوحدة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ كما يلي :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}}$$

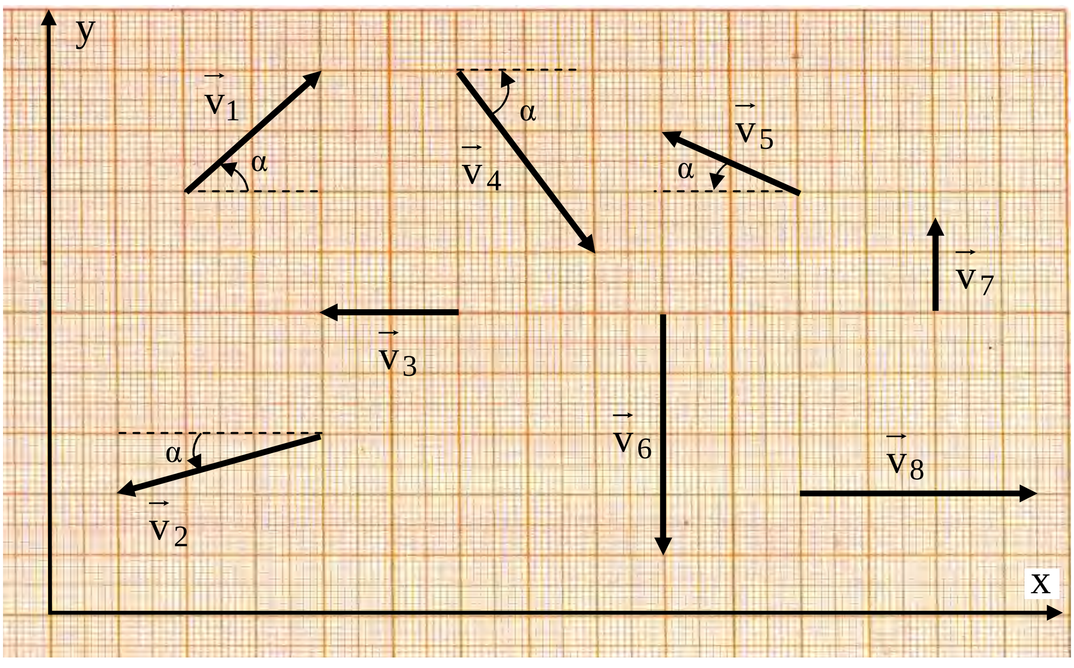
مع الأخذ بعين الاعتبار ما يلي :

- عندما يكون الشعاع $\vec{v}_x$ في جهة المحور ox يكون : $v_x = +\left\|\vec{v}_x\right\|$
- عندما يكون الشعاع $\vec{v}_x$ عكس جهة المحور ox يكون : $v_x = -\left\|\vec{v}_x\right\|$
- إذا كان المعلم خطي ox يكون لأي شعاع و ليكن $\vec{v}$ مركبة واحدة $\vec{v}_x$ تكون منطبقة على الشعاع الأصلي و نكتب :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i}}$$

التمرين (2) : (التمرين : 003 في بنك التمارين على الموقع) (*)

1- يمثل الشكل التالي أشعة للسرعة في معلم مستوي (o,x,y) :



1- من خلال هذا الشكل و اعتمادا على سلم السرعة : $1\ cm \rightarrow 2\ m/s$ أكتب عبارت أشعة السرعة على الشكل $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$.

2- عبر عن مركبتي كل شعاع بدلالة طويلة شعاع السرعة v و الزاوية α التي يصنعها شعاع السرعة مع المحور ox .

الأجوبة :

1- كتابة عبارات أشعة السرعة على الشكل $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$:

$$\vec{v_1} = +4\vec{i} + 4\vec{j}\ ,\quad \vec{v_2} = -6\vec{i} - 2\vec{j}\ ,\quad \vec{v_3} = -4\vec{i}\ ,\quad \vec{v_4} = +4\vec{i} - 6\vec{j}$$
$$\vec{v_5} = -4\vec{i} + 2\vec{j}\ ,\quad \vec{v_6} = -8\vec{j}\ ,\quad \vec{v_7} = +3\vec{j}\ ,\quad \vec{v_8} = +7\vec{i}\ .$$

2- عبارتي v_x ، v_y بدلالة v ، α :

$$\vec{v_1}\begin{cases} v_{1x} = +v_1 \cos\alpha \\ v_{1y} = +v_1 \sin\alpha \end{cases} \qquad \vec{v_2}\begin{cases} v_{2x} = -v_2 \cos\alpha \\ v_{2y} = -v_2 \sin\alpha \end{cases} \qquad \vec{v_3}\begin{cases} v_{3x} = -v_3 \\ v_{3y} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v_4}\begin{cases} v_{4x} = +v_4 \cos\alpha \\ v_{4y} = -v_4 \sin\alpha \end{cases} \qquad \vec{v_5}\begin{cases} v_{5x} = -v_5 \cos\alpha \\ v_{5y} = +v_5 \sin\alpha \end{cases} \qquad \vec{v_6}\begin{cases} v_{6x} = 0 \\ v_{6y} = -v_6 \end{cases}$$

$$\vec{v_7}\begin{cases} v_{7x} = +0 \\ v_{7y} = +v_7 \end{cases} \qquad \vec{v_8}\begin{cases} v_{8x} = +v_8 \\ v_{8y} = 0 \end{cases}$$

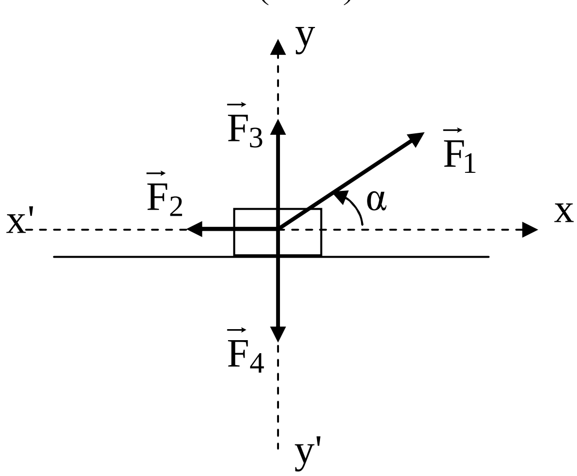
- **تحليل علاقة شعاعية بالنسبة في معلم مستوي :**

- يعتمد مبدأ تحليل علاقة شعاعية على مبدأ تحليل شعاع على ما يلي :

$$\boxed{\vec{A} = \alpha\vec{B} \rightarrow A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = \alpha B_x \vec{i} + \alpha B_y \vec{j} \rightarrow \begin{cases} A_x = \alpha B_x \\ A_y = \alpha B_y \end{cases}}$$

التمرين (3) : (التمرين : 004 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر جسم (S) خاضع إلى تأثير مجموعة من القوى (الشكل) :



حلل العلاقة الشعاعية التالية وفق المحورين x'x ، y'y :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = m\vec{a}$$

حيث m كتلة الجسم و الشعاع $\vec{a}$ هو شعاع يميز حركة الجسم .

الأجوبة :

- تحليل العلاقة الشعاعية :

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = m.a_x \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = m.a_y \end{cases}$$

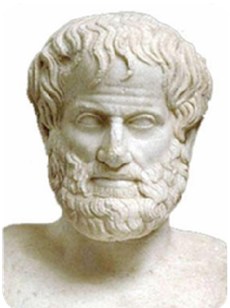
$$\begin{cases} F_1.\cos\alpha - F_2 + 0 + 0 = m.a_x \\ F_1.\sin\alpha + 0 + F_3 - F_4 = m.a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1.\cos\alpha - F_2 = m.a_x \\ F_1.\sin\alpha + F_3 - F_4 = m.a_y \end{cases}$$

II- مقاربة تاريخية لميكانيك نيوتن

1- نبذة تاريخية لميكانيك نيوتن

منذ الفيزياء الأكثر حسية لأرسطو إلى غاية الفيزياء النسبية و تنبؤات أينشتاين ، كان لفهم حركات الأجسام و الفعل الجاذبي أثر كبير على الفكر تمخضت عنه ثلاث ثورات على الأقل ، فلقد شهد تاريخ الميكانيك تطورا في المفاهيم و النظريات ، أبرز التحولات فيها كانت الإنتقال من النظام المركزي الأرضي لأرسطو ، إلى النظام المركزي الشمسي لكوبرنيك و تفسير غاليلي و نيوتن للحركات .



- أرسطو Aristote (384 – 322 ق.م) :

هو فيلسوف يوناني ، تتلمذ على يد أفلاطون اشتهر بنظريته للكون و المادة ، قسم الميكانيك إلى قسمين : ميكانيك سماوية (فلكية مثالية) ، و ميكانيك أرضية .

- ميكانيك سماوية :

قال أن الكون محدود كروي الشكل و لا يمكن أن يمتد إلى مالا نهاية و أن الكواكب السبعة (آنذاك) و هي الشمس ، القمر ، عطارد ، الزهرة ، المريخ ، زحل ، المشتري تدور في حركة دائرية في مدارات (أفلاك) مثالية حول الأرض التي اعتبرها مركز الكون .

- ميكانيك أرضية :

فيها نوعان من الحركات ، الحركات الطبيعية (كالسقوط الحر) ، و الحركات العنيفة (كحركة القذائف) تسقط الأجسام الثقيلة بسرعة أكبر من الأجسام الخفيفة و الجسم المتحرك يتوقف عن الحركة عندما تنعدم القوى المؤثرة عليه .

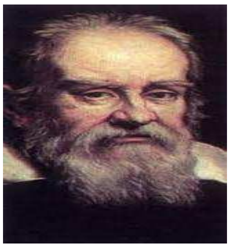
- بطليموس Ptolémée (140 م) :

فلكي و جغرافي ـ من مدرسة الإسكندرية ـ صاحب كتاب ـ الماجستي ـ الذي رسخ فيه النظام الجيومركزي للكون لأرسطو الذي اعتبر فيه أن الأرض هي مركز الكون و أن الكواكب السبعة (آنذاك) لكل واحد منها حركتان دائريتان .

▪ الحركة الأولى :
حركة الكوكب حول نفسه (دائرة صغيرة) .
الحركة الثانية :
حركة الكوكب حول الأرض (دائرة كبيرة) .

● كوبرنيك Copernic (1473 – 1543 م) :
تبنى نظرية مركزية الشمس ، أي أن الكواكب تدور حول الشمس في مدارات دائرية استطاع أن يحدد المسافات النسبية بين الكواكب و الشمس ، وسرعتها النسبية ، وزمن دورتها حول الشمس كما وجد أن سرعة الكوكب تزداد كلما كان اقتربت من الشمس ، و أكد على دوران الأرض حول محورها الوهمي أثناء حركتها الانتقالية حول الشمس وتميل عن هذا المحور حول القطب الفلكي الشمالي مما يؤدي إلى تغير نقطتي الاعتدالين الربيعي والخريفي .

● كبلر Kepler (1571 – 1630 م) :
- توصل كبلر بعد أن حلل نتائج زميله تايكوبراهي حول كوكب المريخ إلى أن مدار المريخ حول الشمس ليس دائريا بل إهليليجيا ثم توصل إلى أن سرعة الكواكب ليست ثابتة ،كما وضع ثلاث قوانين لدراسة حركة الكواكب و الأقمار سنتطرق إليها لاحقا .



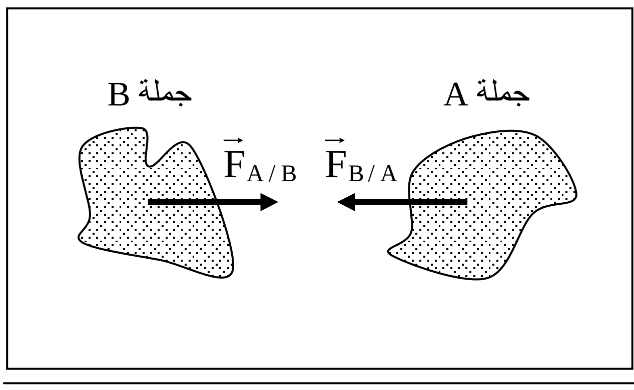
● غاليلي Galilée (1564 – 1642 م) :
صنع منظارا تمكن من خلاله اكتشاف الأقمار الرئيسية للمشتري و بمراقبة أطوار كوكب الزهرة و قدم البرهان القاطع الذي يفند كليا نظرية مركزية الأرض لأرسطو كما وضح أن حركة الأجسام على الأرض تسقط بسرعة واحدة إذا أهملنا مقاومة الهواء لها و أن تسارع الأجسام ثابت بغض النظر عن كتلتها ، تمكن أيضا بفضل تجاربه من إعطاء مبدأ النسبية الغاليلية ، فأصبحت للحركة طابع نسبي ، بحيث لا توجد حركة إلا بالنسبة لمرجع .

● نيوتن Newton (1642 – 1727 م) :

اعتمد على نظريات من سبقه فاستطاع ربط القوى المطبقة على جسم بتسارعه ، فقد كان نيوتن السباق في فهم أن التفاحة التي تسقط من شجرة و القمر الذي يدور حول الأرض يخضعان لنفس القانون فقدم قانون التجاذب الكوني ، فاستطاع نيوتن التوحيد بين الميكانيك الأرضية و الفلكية هي إذا تطبيق ميكانيك نيوتن عبر المبدأ الأساسي للتحريك و نتائجه (القوانين الثلاثة لنيوتن) .

2- تذكير بالقانونين الأول و الثالث لنيوتن

أ– القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة):
ينص على ما يلي :
في المراجع العالمية **" يحافظ كل جسم على سكونه أو حركته المستقيمة المنتظمة إذا لم تتدخل قوة لتغيير حالته الحركية "**



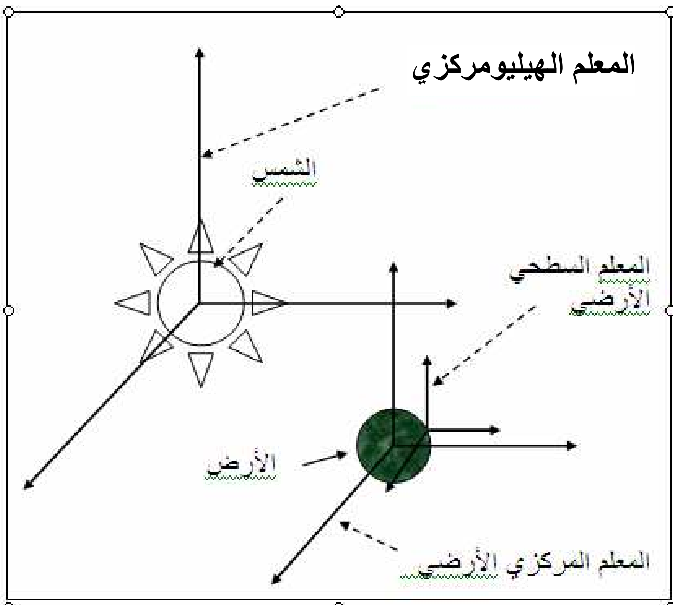
● **القانون الثالث لنيوتن (مبدأ الفعلين المتبادلين):**
" إذا أثرت الجملة (A) على الجملة (B) بقوة $\vec{F}_{A/B}$ ، فإن الجملة (B) تأثر أيضا وبصفة آنية على الجملة (A) بقوة $\vec{F}_{B/A}$ تساوي القوة $\vec{F}_{A/B}$ في الشدة و تعاكسها في الإتجاه أي : $\vec{F}_{A/B} = - \vec{F}_{B/A}$ " .

3- المراجع الغاليلية

أ– تعريف المرجع الغاليلي :

- المرجع الغاليلي هو كل مرجع يتحقق فيه مبدأ العطالة ، و كل مرجع في حركة مستقيمة منتظمة مع مرجع غاليلي هو كذلك مرجع غاليلي .
- لتعريف المراجع الغاليلية نبحث عن مرجع ساكن أصلا ، لذلك اختير مركز الشمس و اعتبر مرجعا غاليليا .

ب– أمثلة عن المراجع الغاليليلة :



المرجع المركزي الشمسي (الهيليو مركزي) :

- هو مرجع منطبق على مركز الشمس يرتبط به معلم محاوره الثلاثة تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لمركز الشمس (الشكل) .
- يعتبر المرجع الهيليومركزي غاليليا إلى حد كبير .
- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تدور حول الشمس كالأرض و بقية الكواكب .

المرجع المركزي الأرضي (الجيومركزي) :

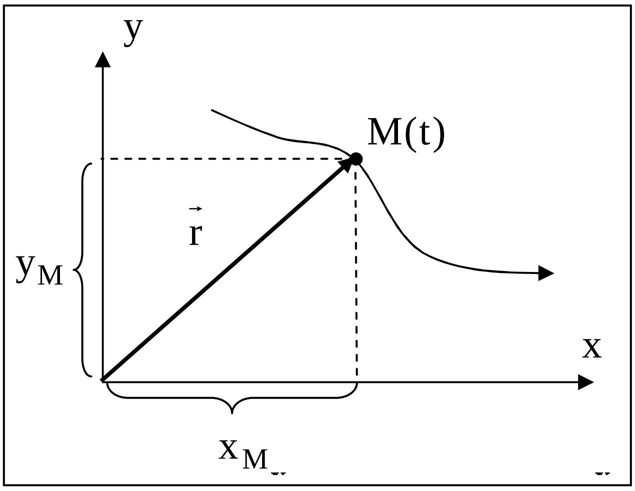
- هو مرجع منطبق على مركز الأرض يرتبط به معلم محاوره الثلاثة تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لمركز الأرض (الشكل) .
- في الحقيقة إن المرجع المركزي الأرضي ليس غاليليا بالمعنى الدقيق ، لكون مبدأ معلمه له مسار إهليلجي حول الشمس ، غير أنه بالنسبة للتجارب التي تدوم وقتا قصيرا مقارنة مع مدة دوران مركز الأرض حول الشمس يمكن اعتبار هذا المرجع غاليلي إذ أن حركة مركز الأرض حول الشمس في هذا المجال الزمني (زمن التجربة القصير) تكون مستقيمة منتظمة تقريبا مع المرجع الهيليومركزي الغاليلي .
- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتحرك حول الأرض ، مثل الأقمار الاصطناعية .

المرجع السطحي الأرضي :

- هو مرجع منطبق على نقطة من سطح الأرض يرتبط به معلم محاوره الثلاثة تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لنقطة من سطح الأرض (الشكل) .
- في الحقيقة إن المرجع السطحي الأرضي ليس غاليليا بالمعنى الدقيق ، لكون مبدأ معلمه له مسار دائري بسبب دوران الأرض حول نفسها ، غير أنه بالنسبة للتجارب التي تدوم وقتا قصير مقارنة مع مدة دوران الأرض حول نفسها يمكن اعتبار هذا المرجع غاليلي إذ أن حركة نقطة من سطح الأرض في هذا المجال الزمني (زمن التجربة القصير) تكون مستقيمة منتظمة تقريبا مع المرجع الهيليومركزي الغاليلي .
- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتم على سطح الأرض مثل حركة قذيفة ، حركة جسم على مستوي مائل ، حركة نواس ....

4- شعاع التسارع و المعادلات الزمنية للحركة

أ- شعاع الموضع – الإحداثيات الديكارتية :



- تجري دراسة الحركة في معالم ثابتة قد تكون فضائية أو مستوية أو خطية ، و ذلك حسب ما تقتضيه نوع كل حركة .
- إذا اعتبرنا الدراسة في معلم مستوي كما في (الشكل) التالي : فإن الموضع (M) للنقطة المادية في اللحظة الزمنية (t) يتعين بشعاع يسمى شعاع الموضع ، يرمز له بـ $\vec{r}$ و هو يعطى بالعلاقة الشعاعية التالية :

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

- تسمى المقادير الجبرية x ، y **بالإحداثيات الديكارتية** لشعاع الموضع $\vec{r}$ ، و هي دوال في الزمن $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ ، تسمى بالمعادلات الزمنية للحركة .

ب- شعاع السرعة :

- شعاع السرعة المتوسطة الذي يرمز له بـ $\vec{v}_m$ بين لحظتين t_1 ، t_2 هو النسبة بين شعاع الإنتقال $\overrightarrow{\Delta r}$ بين هاتين اللحظتين و المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ أي :

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}}$$

- عندما يؤول Δt نحو الصفر ، ينتهي شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$ نحو شعاع يدعى شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}$ هو مشتق شعاع الموضع $\vec{r}$ بالنسبة للزمن ، أي :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

و منه :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}}$$

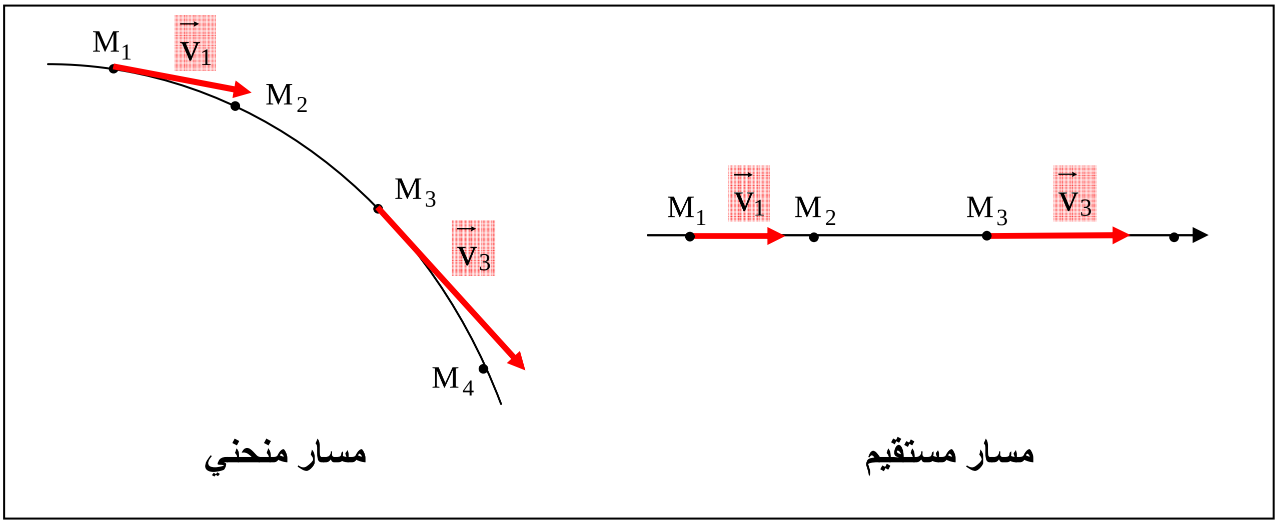
حيث :

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt}}$$

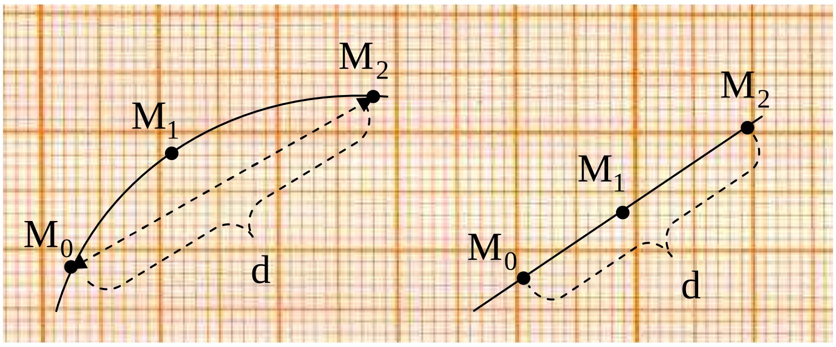
- كما يكون :

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

- يكون شعاع السرعة اللحظية مماسي للمسار المنحني و منطبق على المسار المستقيم في كل موضع و يكون دوما في جهة الحركة ، و لا يكون أبدا شعاع السرعة عكس جهة الحركة (الشكل) .



● حساب السرعة اللحظية عند موضع M كيفي من التصوير المتعاقب :



لتحديد قيمة السرعة اللحظية في موضع من مواضع المتحرك و ليكن M_1 (الشكل) ، نقيس المسافة M_0M_2 بين الموضعين M_0 ، M_2 المجاورين للموضع M_1 و اللذان تفصلهما مدة زمنية $\Delta t = 2\tau$ (سواء كان المسار مستقيم أو منحنى) . ثم نستنتج المسافة الحقيقية المقطوعة بالإعتماد على سلم الرسم ، و في النهاية نحسب قيمة السرعة عند الموضع M_1 من خلال العلاقة التالية :

$$\boxed{v_1 = \frac{M_0M_2}{2\tau}}$$

جـ- شعاع التسارع :

- شعاع التسارع المتوسط الذي يرمز لـه بـ $\vec{a}_m$ بين لحظتين t_1 ، t_2 هو النسبة بين شعاع تغير السرعة $\overrightarrow{\Delta v}$ بين هاتين اللحظتين و المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ أي :

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$

- عندما يؤول Δt نحو الصفر ، ينتهي شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ نحو شعاع يدعى شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$ هو مشتق شعاع السرعة $\vec{v}$ أي :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

و منه :

$$\boxed{\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}}$$

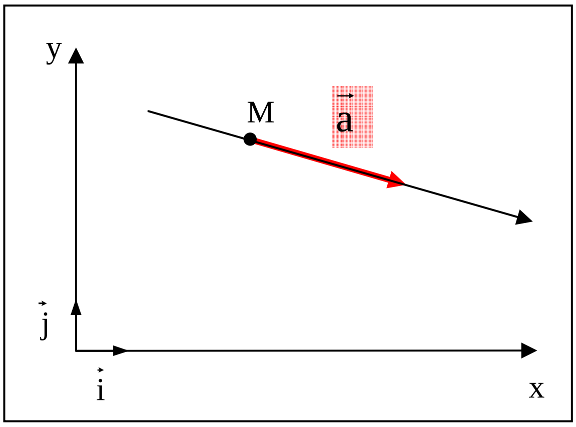
حيث :

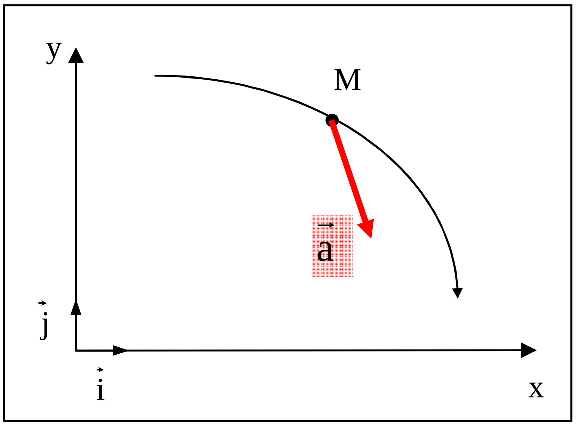
$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}}$$

- كما يكون :

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

- ينطبق شعاع التسارع اللحظي على المسار المستقيم و يتجه نحو تقعر المسار المنحني و ليس بالضرورة يكون في جهة الحركة (الشكل) .





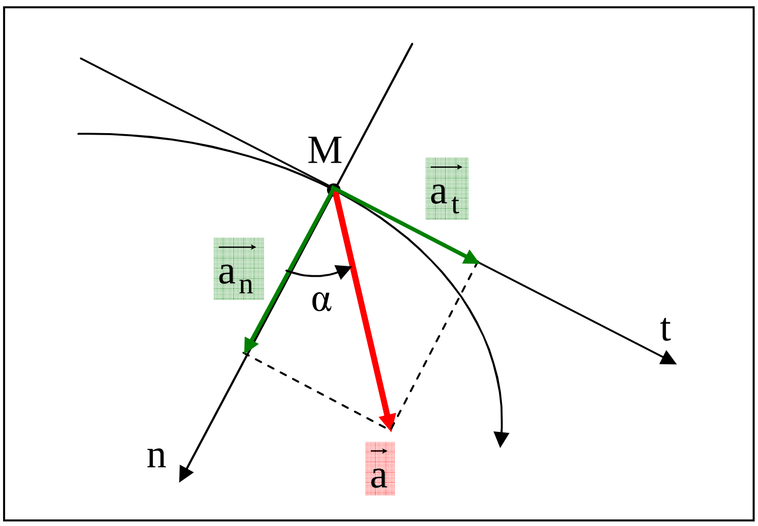
ملاحظة-1 :

- وحدة السرعة هي : m/s ، و وحدة التسارع هي : m/s^2 .

د- مركبتي شعاع التسارع في معلم فريني :

- معلم فريني في الحركات المنحنية هو معلم مبدأه موضع المتحرك M في لحظة ما و يتكون من محورين متعامدين أحدهما (ot) يكون مماسي للمسار المنحني في الموضع M و الآخر (on) ناظمي ، يتجه نحو مركز المسار و يكون عمودي على المحور المماسي (الشكل) .

- يمكن تحليل شعاع التسارع في الموضع M عند اللحظة t ، الى مركبتين : مماسية $\vec{a}_t$ ، وناظمية $\vec{a}_n$ وفق المحورين المماسي و الناظمي ، كما مبين في الشكل التالي :



و نكتب :

$$\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$$

حيث :

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

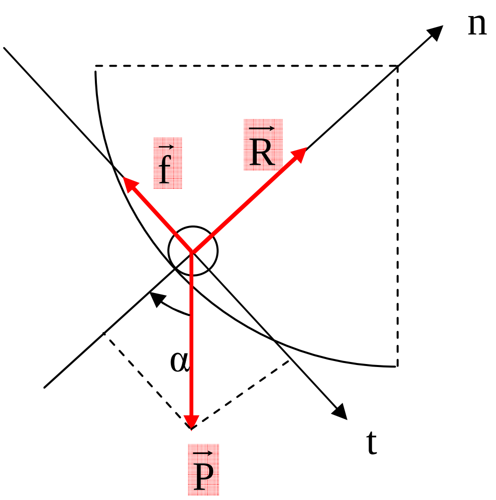
- v : طويلة شعاع السرعة عند اللحظة t .
- r : نصف قطر المسار المنحني عند اللحظة t .

كما يكون :

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}}$$

<u>التمرين (4) :</u> <u>(التمرين : 012 في بنك التمارين على الموقع) (*)</u>

جسم نقطي (S) يتحرك على مسار دائري خاضع إلى تأثير القوى : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.



نعتبر العلاقة الشعاعية التالية :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ هو شعاع التسارع اللحظي .

1- حلل هذه العلاقة الشعاعية وفق محوري معلم فريني المماسي (ot) ، و الناظمي (on) .

2- أكتب عبارة التسارع المماسي a_t بدلالة : m ، g ، f ، α .

3- عبر عن شدة قوة رد الفعل $\vec{R}$ بدلالة m ، g ، α ، v ، r .

<u>الأجوبة :</u>

<u>1- تحليل العلاقة الشعاعية في معلم فريني :</u>

لدينا :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محوري معلم فريني نجد :

$$\begin{cases} P.\sin\alpha - f = m\,.\,a_t \quad .... \ (1) \\ -P.\cos\alpha + R = m\,.\,a_n \quad .... \ (2) \end{cases}$$

<u>2- عبارة التسارع المماسي a_n :</u>

من العلاقة (1) لدينا :

$$m.g.\sin\alpha - f = m\,.\,a_t \rightarrow a_t = \frac{m.g.\sin\alpha - f}{m}$$

3- عبارة شدة قوة رد الفعل R بدلالة m ، g ، α ، v ، r :

لدينا $P = m.g$ ، $a_n = \frac{v^2}{R}$ و منه يمكن كتابة العلاقة (2) كما يلي :

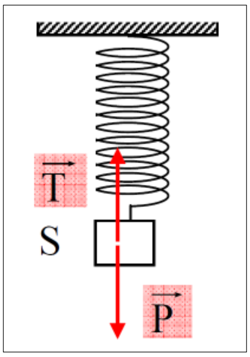
$$-m.g.\cos\alpha + R = m.\frac{v^2}{r} \rightarrow R = m.g.\cos\alpha + m.\frac{v^2}{r} \rightarrow R = m(g.\cos\alpha + \frac{v^2}{r})$$

5- القانون الثاني لنيوتن

أ- تذكير بمفهوم الجملة الميكانيكية و القوى الخارجية :

- الجملة الميكانيكية هو الجسم أو جزء من الجسم أو مجموعة من الأجسام التي تكون محل الدراسة الفيزيائية .
- إذا كان جسم (A) خاضع إلى قوة $\vec{F}$ فإن هذه القوة تكون ناتجة عن تأثير جسم آخر (B) عليه ، أي في كل قوة هناك مؤثر و متأثر بها .
- تكون القوة داخلية إذا كان الجسمين المؤثر و المتأثر بهذه القوة ينتميان إلى نفس الجملة ، أما إذا كان أحد الجسمين داخل الجملة و الآخر خارجها نقول عن القوة أنها خارجية .
- إذا كانت الجملة لا تخضع إلى قوى خارجية نقول عنها معزولة ، أما إذا كانت تخضع إلى قوى خارجة محصلتها معدومة نقول عن الجملة أنها شبه معزولة .

مثال :



في الشكل المقابل يخضع الجسم (S) إلى تأثير قوتين الأولى قوة الثقل $(\vec{P})$ الناتجة عن تأثير (جذب) الأرض للجسم (S) و الثانية قوة توتر النابض $(\vec{T})$ الناتجة عن تأثير النابض على الجسم (S)

-القوتين : الثقل $\vec{P}$ و التوتر $\vec{T}$ يمكن أن تكون داخلية أو خارجية حسب الجملة المختارة كما مبين في الجدول التالي :

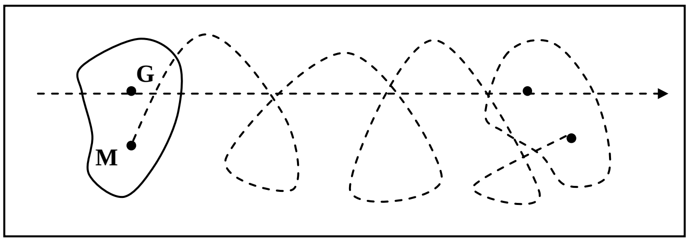
الجملة	الثقل $\vec{P}$	التوتر $\vec{T}$
(جسم + أرض)	داخلية	خارجية
(جسم)	خارجية	خارجية
(جسم + نابض)	خارجية	داخلية
(جسم + أرض + نابض)	داخلية	داخلية

ب- مفهوم النقطة المادية و الجسم الصلب :

- الجسم الصلب هو الجملة التي لا يتغير شكلها أثناء قيامها بحركة ، أي أن المسافة بين كل نقطتين من هذا الجسم تبقى ثابتة أثناء الحركة .
- النقطة المادية هي كل جسم ذو أبعاد مهملة أمام المرجع الذي يدرس بالنسبة إليه هذا الجسم ، و كتلة النقطة المادية هي كتلة هذا الجسم .

جـ- مفهوم مركز العطالة :

- عندما يكون جسم صلب معزولا أو شبه معزول في مرجع غاليلي ، ويتحرك بحركة كيفية (الشكل) فإنه توجد نقطة (G) وحيدة من هذا الجسم حركتها مستقيمة منتظمة ، ندعوها **مركز عطالة** هذا الجسم الصلب.



- مركز عطالة جسم متناظر منطبق على مركز تناظره ، مثلا مركز عطالة كرة منطبق على مركزها .

د- نص القانون الثاني لنيوتن :

ينص على ما يلي :

" في معلم غاليلي ، المجموع الشعاعي $\sum\vec{F}_{ext}$ للقوى الخارجية المطبقة على مركز عطالة جملة مادية يساوي في كل لحظة جداء كتلتها في شعاع تسارع مركز عطالتها "

- يكتب القانون الثاني لنيوتن كما يلي :

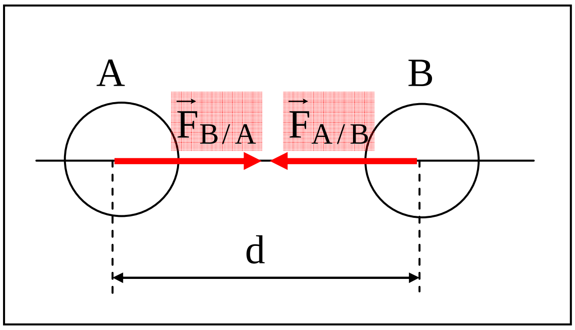
$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G}$$

هـ- قانون الجذب العام :

- في عام 1687 ، أعطى إسحاق نيوتن قانون الجذب العام في كتابه الشهير على الشكل التالي :

" جسمان كيفيان يتجاذبان بقوة تتناسب مباشرة مع جداء كتلتيهما و عكسيا مع مربع المسافة التي تفصلهما "

- يمكن نمذجة قوة الجذب العام ، المتبادلة بين جسمين A و B كتلتهما على الترتيب M_A و M_B تفصلهما المسافة d ، بعلاقة رياضية تسمح بتحديد شدة هذه القوة بدلالة الكتلتين و المسافة الفاصلة بين مركزي الجسمين ، تكون كما يلي :



$$\boxed{F_{A/B} = F_{B/A} = G\,\frac{M_A . M_B}{d^2}}$$

حيث : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI هو ثابت يدعى **ثابت الجذب العام** .

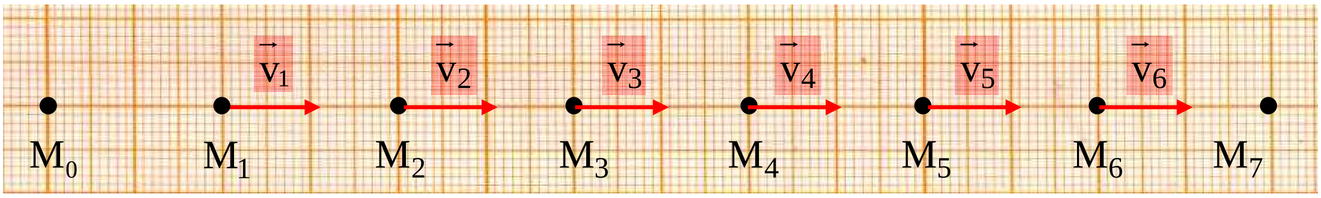
6- خواص الحركة المستقيمة المنتظمة و المتغيرة بانتظام

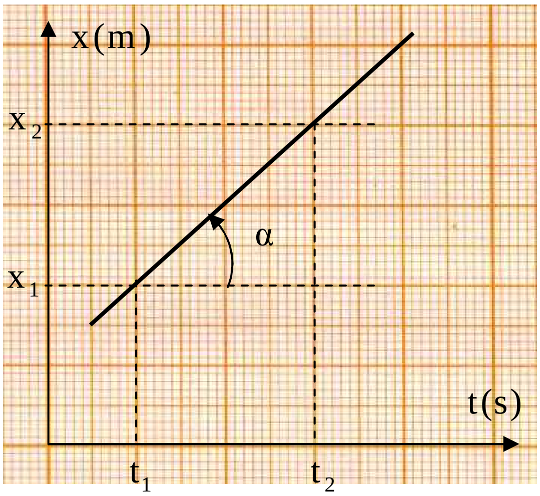
● الحركة المستقيمة المنتظمة :

- الحركة المستقيمة المنتظمة هي حركة مسارها مستقيم و سرعتها ثابتة ، يقطع فيها المتحرك مسافات متساوية d خلال أزمنة متساوية τ .

- في الحركة المستقيمة المنتظمة لا يخضع المتحرك إلى أي قوة (مبدأ العطالة) أو يخضع إلى قوى مجموعها الشعاعي معدوم .

- في الحركة المستقيمة المنتظمة يكون شعاع السرعة ثابت في المنحى و الجهة و الطويلة . و عليه يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ معدوم .





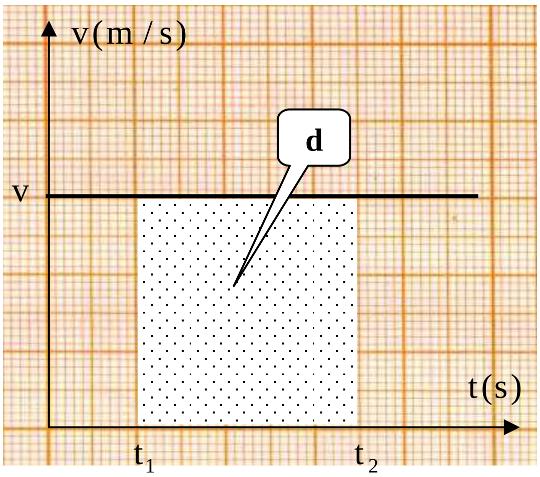
- المنحنى $x = f(t)$ في الحركة المستقيمة المنتظمة هو مستقيم معادلته من الشكل : $x = at + b$ (a : ميل هذا المستقيم) ، كما مبين في (الشكل) :

- ميل المنحنى $x(t)$ (المستقيم) يمثل سرعة المتحرك ، أي :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

- المسافة المقطوعة بين لحظتين t_1 ، t_2 من خلال مخطط المسافة $x(t)$ تساوي الفرق بين قيمتي الفاصلتين عند هاتين اللحظتين ، أي :

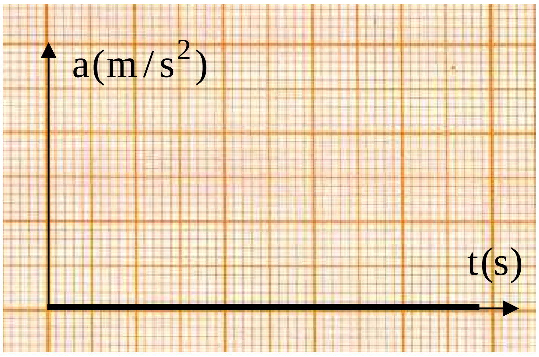
$$d = |\Delta x| = |x_2 - x_1|$$



- منحنى السرعة $v = f(t)$ هو مستقيم يوازي محور الأزمنة (ot) كما مبين في (الشكل) المقابل :

- تساوي المسافة المقطوعة d ، من طرف متحرك بين لحظتين t_1 ، t_2 بيانيا من مخطط السرعة ، مساحة السطح المحصور بين المنحنى $v = f'(s)$ و محور الأزمنة و المستقيمين العموديين على محور الأزمنة (ot) في اللحظتين t_1 ، t_2 (الشكل) أي :

$$d = v(t_2 - t_1)$$



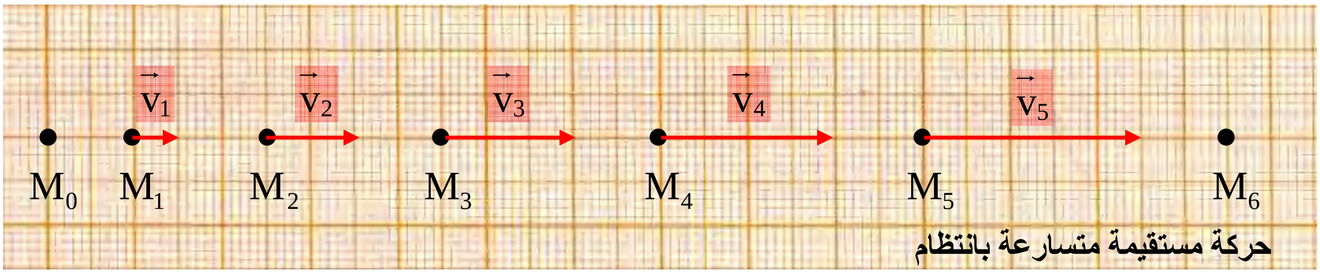
- منحنى التسارع $a = f(t)$ هو مستقيم منطبق على محور الأزمنة (ot) كما مبين في (الشكل) التالي :
- يعبر عن الحركة المستقيمة المنتظمة بمعادلة زمنية $x(t)$ تكون دوما من الشكل :

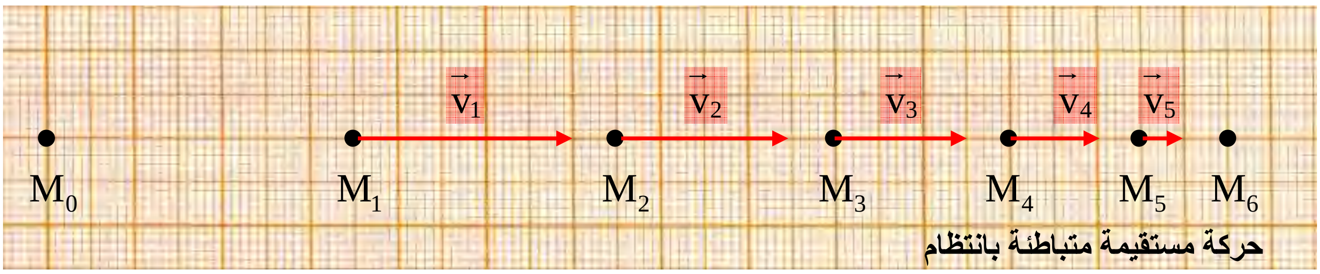
$$\boxed{x = v\,t + x_0}$$

حيث : v سرعة الحركة ، x_0 الفاصلة الابتدائية (عند اللحظة $t = 0$)

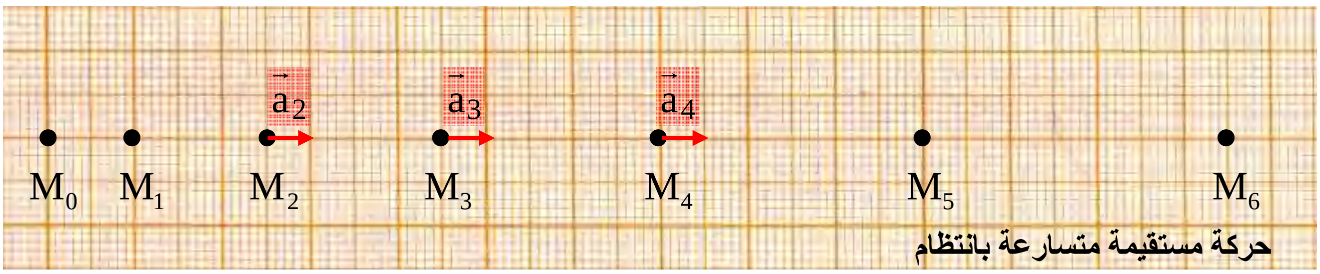
• الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام :

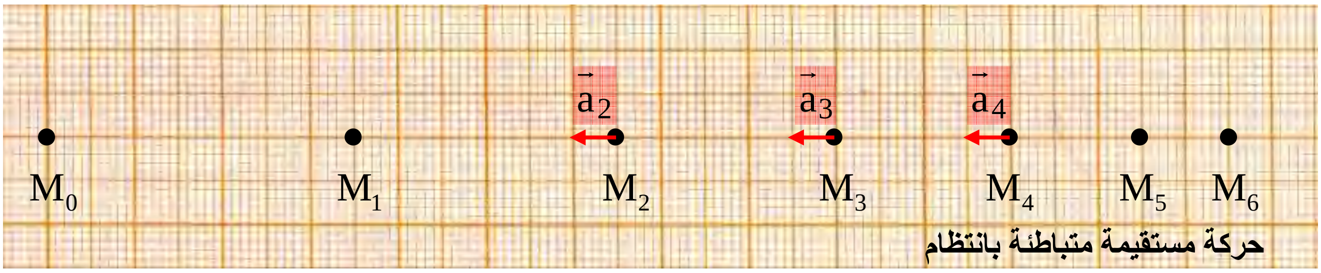
- عندما يخضع جسم متحرك إلى قوة $\vec{F}$ ثابتة (في المنحى و الجهة و الطويلة) تكون حركة هذا الجسم مستقيمة متغيرة بانتظام ، فإذا كانت هذه القوة في جهة حركته تكون الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام أما إذا كانت في الجهة المعاكسة لجهة حركته تكون الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام .
- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يحافظ شعاع السرعة $\vec{v}$ على منحاه و جهته و طويلته تتغير بانتظام حيث تتزايد بانتظام في حالة الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام و تتناقص بانتظام في حالة الحركة المستقيمة المتباطئة بانتظام .

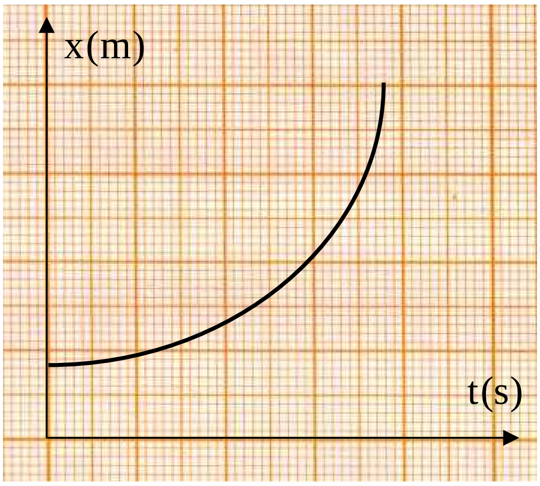




- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت في المنحى و الجهة و الطويلة ، و يكون في جهة الحركة في حالة الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام و عكس جهة الحركة في حالة الحركة المستقيمة المتباطئة بانتظام .



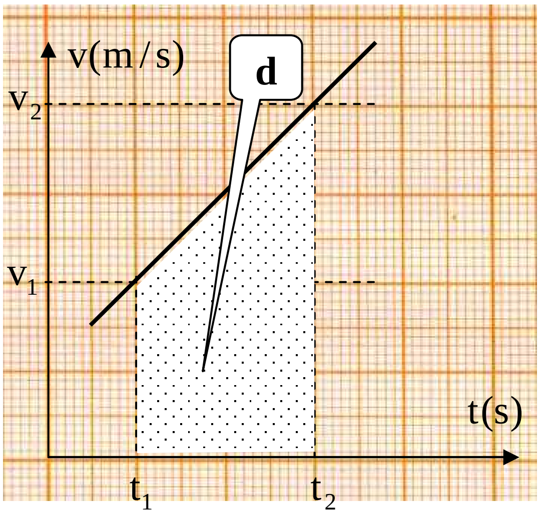




- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام منحنى المسافة $x = f(x)$ هو خط منحني ، ففي الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام يكون مخطط المسافة $x = f(t)$ كما في (الشكل) المقابل :

- من المنحنى $x(t)$ تساوي سرعة المتحرك في لحظة t ميل المماس عند هذه اللحظة ، أي :

$$v = \frac{dx}{dt} \ (\text{ميل المماس})$$



- مخطط السرعة $v = f(x)$ في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام هو مستقيم معادلته من الشكل : $v = a\,t + b$ ، و في الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام يكون مخطط السرعة كما مبين في الشكل المقابل :

- ميل المنحنى $v(t)$ (المستقيم) يمثل تسارع الحركة ، أي :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

تساوي المسافة المقطوعة d من طرف متحرك بين لحظتين t_1 ، t_2 ، بيانيا من خلال مخطط السرعة ، مساحة السطح (لشبه المنحرف مثلا) المحصور بين المنحنى $v = f(t)$ و محور الأزمنة (ot) و المستقيمين العموديين على محور الأزمنة في اللحظتين t_1 ، t_2 ، أي :

$$d = \frac{\text{ق ك} + \text{ق ص}}{2}\,\text{إ} = \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2}$$

- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام مخطط التسارع $a = f(t)$ هو مستقيم يوازي محور الأزمة كما في الشكل المقابل .

- يعبر عن الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام بمعادلات زمنية تكون دوما من الشكل :

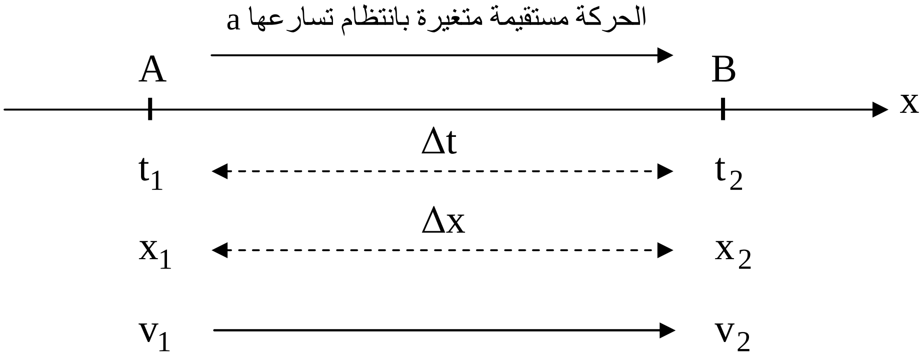
$$\boxed{v = a\,t + v_0}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0}$$

حيث : a تسارع الحركة ، x_0 ، v_0 الفاصلة و السرعة الابتدائيتين (عند اللحظة $t = 0$)

ملاحظة مهمة :

نعتبر جسم نقطي ينتقل من موضع A إلى موضع B على محور موجه ox بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام تسارعها ثابت a ، إذا اعتبرنا t_1 ، x_1 ، v_1 هي اللحظة و الفاصلة و السرعة عند الموضع A و t_2 ، x_2 ، v_2 هي اللحظة و الفاصلة و السرعة عند الموضع B يكون :



- المدة الزمنية المستغرقة بين الموضعين A و B :

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$$

- المسافة المقطوعة بين الموضعين A و B عندما لا يغير جهة حركته بين هذين الموضعين :

$$\boxed{d = |\Delta x| = |x_2 - x_1|}$$

كما يكون :

$$\boxed{v_2^2 - v_1^2 = 2\,a\,\Delta x}$$

تسمى هذه العلاقة بمحذوفية الزمن

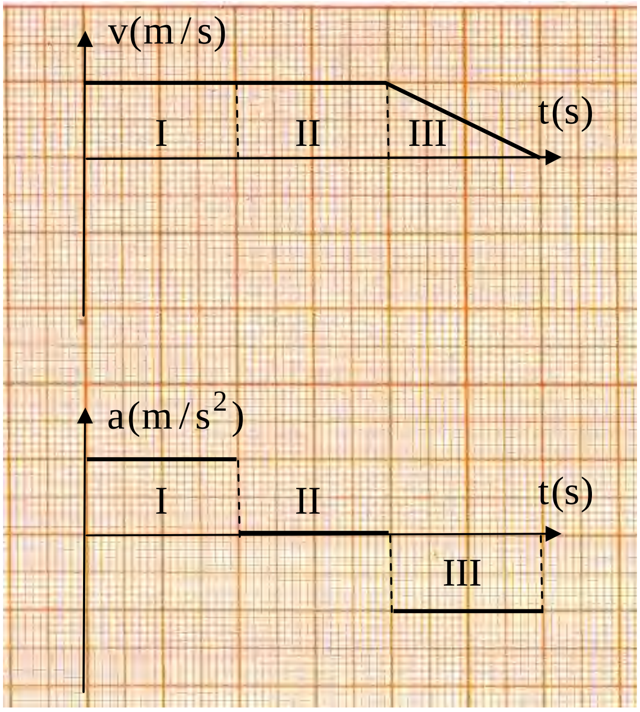
$$\boxed{v_2 - v_1 = a\,\Delta t}$$

ملاحظة مهمة-1 :

- يمكن تحديد طبيعة الحركة (مستقيمة منتظمة ، مستقيمة متغيرة بانتظام ، دائرية منتظمة ، بناءا على شعاع التسارع أو قيمته كما يلي :

- إذا كان شعاع التسارع معدوم تكون الحركة مستقيمة منتظمة .
- إذا كان شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .
- إذا كانت قيمة التسارع a معدومة تكون الحركة مستقيمة منتظمة .
- إذا كانت قيمة التسارع a ثابتة ، تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام أو دائرية منتظمة ، فإذا كان المسار مستقيم أو السرعة من الشكل $v = at + b$ تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، أما إذا كان المسار دائري أو السرعة v ثابتة فالحركة دائرية منتظمة .

مثال :



المخططين البيانيين المقابلين يمثلان تطور السرعة و التسارع لمتحرك نقطي على مسار ذو ثلاث أجزاء I ، II ، III ، أحدهما دائري و الآخرين مستقيم .

- نريد تحديد طبيعة الحركة في كل جزء من المسار .

الجواب :

الجزء I : نلاحظ في هذا الجزء من الحركة أن التسارع ثابت و السرعة ثابتة ، هذا يتحقق فقط في الحركة الدائرية المنتظمة ، إذن المسار في هذا الجزء دائري و الحركة دائرية منتظمة .

الجزء II : نلاحظ في هذا الجزء من الحركة أن التسارع معدوم و السرعة ثابتة ، هذا يتحقق فقط في الحركة المستقيمة المنتظمة ، إذن المسار في هذا الجزء مستقيم و الحركة مستقيمة منتظمة .

الجزء III : نلاحظ في هذا الجزء من الحركة أن التسارع ثابت و السرعة دالة تآلفية من الشكل $v = a\ t = b$ ، هذا يتحقق فقط في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام ، إذن المسار في هذا الجزء مستقيم و الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

ملاحظة مهمة-2 :

- تعتمد طبيعة الحركة المستقيمة (متسارعة أو متباطئة) على الجداء a.v حيث :

- إذا كان $(a.v > 0)$ يكون لشعاعي السرعة و التسارع نفس الجهة ، أي يكون شعاع التسارع في جهة الحركة (جهة شعاع السرعة دوما في جهة الحركة) و بالتالي تكون الحركة مستقيمة متسارعة .
- إذا كان $(a.v < 0)$ يكون لشعاع التسارع و السرعة جهتين مختلفتين ، أي يكون شعاع التسارع في الجهة المعاكسة لجهة الحركة و بالتالي تكون الحركة مستقيمة متباطئة .
- إذا كان $(a.v = 0)$ يكون الجسم في حالة حركة مستقيمة منظمة .

التمرين (5) : (التمرين : 014 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جسم نقطي (S) ينطلق عند اللحظة $t = 0$ بسرعة ابتدائية $v_A = 4\ m/s$ من موضع A نعتبره مبدأ للفواصل بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام باتجاه موضع B ، حيث يبلغ هذا الموضع بسرعة $v_B = 6\ m/s$ ، يستغرق اثناء هذا الانتقال AB مدة زمنية قدرها : $\Delta t = 1s$.

1- أحسب تسارع الحركة .

2- أحسب المسافة AB .

3- أكتب المعادلة الزمنية للسرعة $v(t)$ ثم المعادلة الزمنية للمسافة $x(t)$.

الأجوبة :

1- تسارع الحركة :

$$v_B - v_A = a.\Delta t \rightarrow \quad a = \frac{v_B - v_A}{\Delta t}$$

$$a = \frac{6 - 4}{1} = 2 m/s^2$$

2- المسافة AB :

$$v_B{}^2 - v_A{}^2 = 2a.AB \rightarrow \quad AB = \frac{v_B{}^2 - v_A{}^2}{2.a} \rightarrow AB = \frac{6^2 - 4^2}{2\ .\ 2} = 5\,m$$

3- المعادلتين الزمنيتين :

● معادلة السرعة $v(t)$:

$$v = a\,t + b$$

▪ $a = 2\ m/s^2$.

من الشروط الابتدائية :

▪ $t = 0 \rightarrow v_0 = 4\ m/s$

و منه :

$$v = 2\,t + 4$$

● معادلة المسافة $x(t)$:

$$x = \frac{1}{2} a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

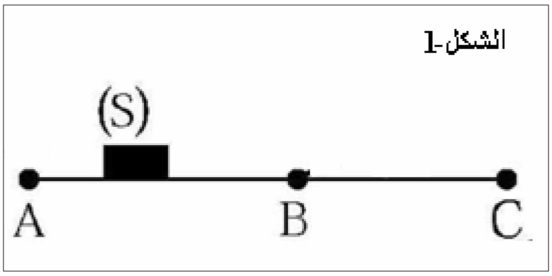
اعتمادا على ما سبق :

$$x = t^2 + 4t + x_0$$

من الشروط الابتدائية :

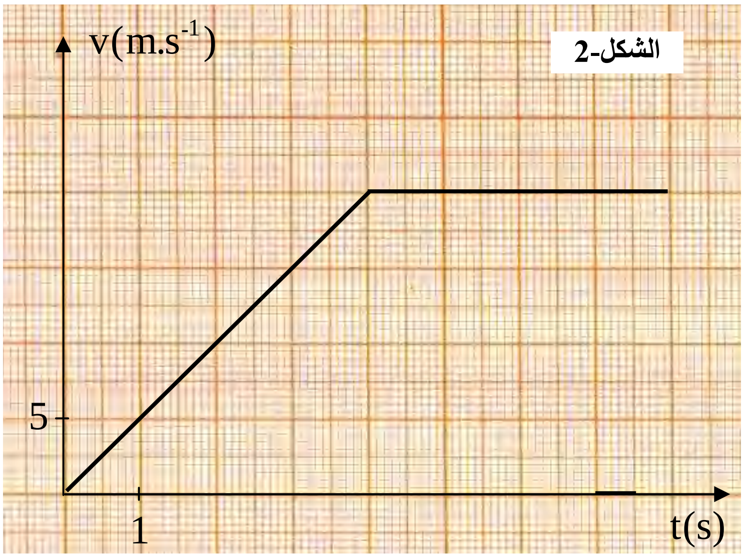
▪ $t = 0 \rightarrow x_0 = 0$

التمرين (6) : (التمرين : 017 في بنك التمارين على الموقع) (*)



يتحرك جسم (S) نعتبره نقطي ، كتلته $m = 200\ g$ ، على المسار ABC (الشكل-1) . يمر عند اللحظة $t = 0$ من الموضع A الذي نعتبره مبدأ للفواصل بدون سرعة ابتدائية و عند اللحظة $t_1 = 4\ s$ يمر من الموضع B ليواصل بعد ذلك حركته على المسار BC ، حيث يبلغ الموضع C في اللحظة $t_2 = 8\ s$.

1- بيان الشكل-2 يمثل تغيرات سرعة الجسم (S) أثناء انتقاله من الموضع A إلى الموضع C .



اعتماد على البيان جِد في كل طور :

أ- طبيعة حركة الجسم (S) و قيمة تسارعه .

ب- المسافة المقطوعة .

2- أرسم مخطط التسارع a(t) .

3- أحسب فاصلة المتحرك عند اللحظات $t_0 = 0$ ، $t_1 = 4\ s$ ، $t_2 = 8\ s$.

4- جِد في كل طور المعادلة الزمنية للسرعة v(t) ثم المعادلة الزمنية للمسافة x(t) .

الأجوبة :

1- أ- طبيعة الحركة و قيمة التسارع :

الطور الأول : $(0 \rightarrow 4\ s)$

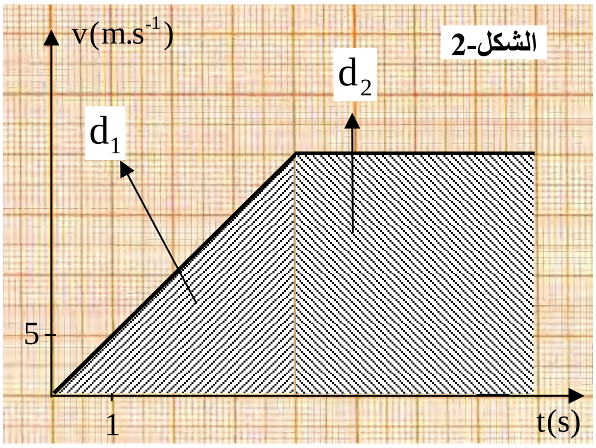
المنحنى v(t) هو مستقيم معادلته يشمل المبدأ معادلته من الشكل $v = at$ ، و حيث أن $av > 0$ ، فالحركة مستقيمة متسارعة بانتظام .

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5}{1} = 2,5\ m/s^2$$

الطور الثاني : $(0 \rightarrow 4\ s)$

المنحنى v(t) هو مستقيم يوزاي محور الأزمنة و منه الحركة مستقيمة منتظمة .

$$a_2 = 0$$



ب- المسافة المقطوعة في كل طور :

نستعمل طريقة المساحة في حساب المسافة المقطوعة :

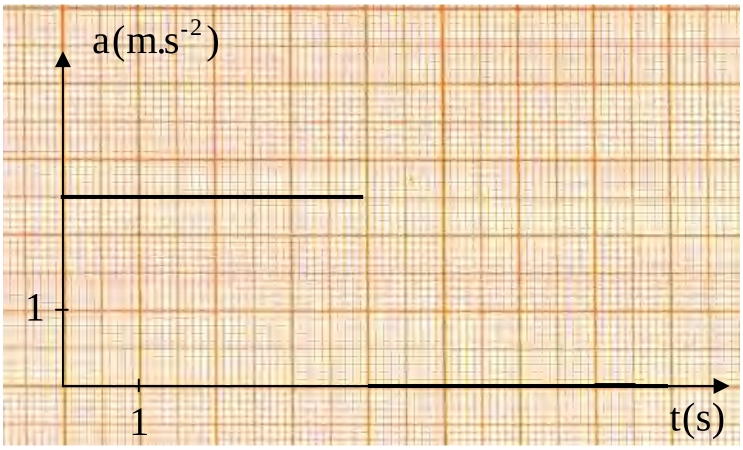
الطور الأول :

$$d_1 = \frac{(4.5)\times(4.1)}{2} = 40\ \text{m}$$

الطور الثاني :

$$d_2 = (5\ .\ 4) \times (\ 4\ .\ 1) = 80\ \text{m}$$

2- مخطط التسارع :



3- فاصلة الجسم (S) عند اللحظات $t_0 = 0$ ، $t_1 = 4$ d ، $t_2 = 8$ s :

- $t = 0 \rightarrow x = 0$
- $t = 4\ \text{s} \rightarrow x = d_1 = 40\ \text{m}$
- $t = 8\ \text{s} \rightarrow x = d_1 + d_2 = 40 + 80 = 120\ \text{m}$

4- المعدلة الزمنية للسرعة v(t) و المعادلة الزمنية للمسافة x(t) :

الطور الأول :

● معادلة السرعة v(t) :

$v = a\,t + b$

- $a = 2\ \text{m/s}^2$

من الشروط الابتدائية :

- $t = 0 \rightarrow v_0 = 0$

و منه :

$v = 2\,t$

● معادلة المسافة x(t) :

$$x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

اعتمادا على ما سبق :

$$x = t^2 + x_0$$

من الشروط الابتدائية :

▪ $t = 0 \rightarrow x_0 = 0$

ومنه :

$x = t^2$

الطور الثاني :

● معادلة السرعة $v(t)$:

$v = v_0 \rightarrow v = 20\ m/s$

▪ $a = 2\ m/s^2$

● معادلة المسافة $x(t)$:

$x = vt + x_0$

اعتمادا على ما سبق :

$x = 20\ t + x_0$

من الشروط الابتدائية :

▪ $t = 4\ s \rightarrow x = d_1 = 40\ m$

بالتعويض :

$40 = (20\ .\ 4) + x_0 \rightarrow x_0 = 4 - (20\ .\ 4) = -40$

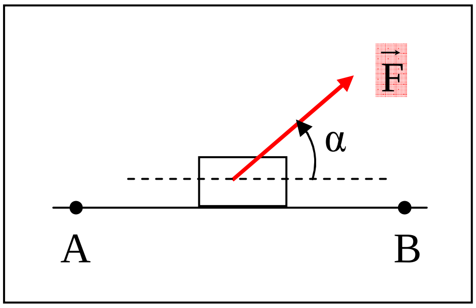
و منه :

$x = 20\ t - 40$

7- العمل و الطاقة

● عمل قوة ثابتة في مسار مستقيم :

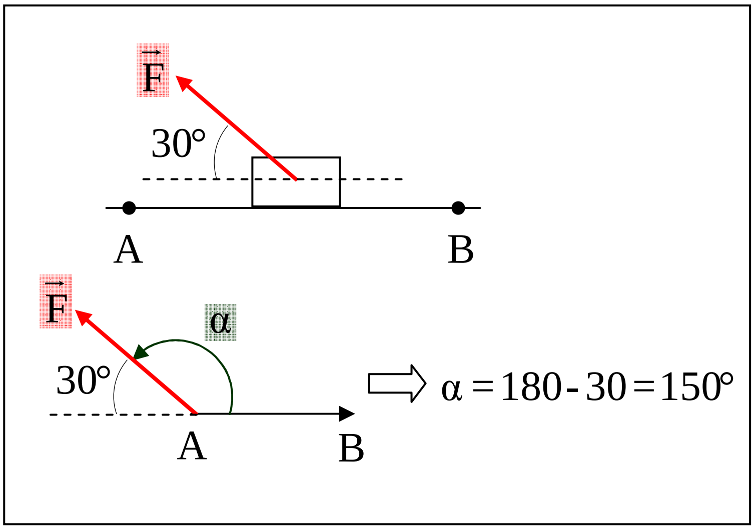
- نقول عن قوة أنها قامت بعمل إذا انتقلت نقطة تطبيقها من موضع إلى موضع آخر .
- عمل قوة $\vec{F}$ أثناء الإنتقال من موضع A إلى موضع B الذي يرمز له بـ $W_{AB}(\vec{F})$ و وحدته الجول هو مقدار جبري يكون موجب إذا كانت القوة $\vec{F}$ في جهة الحركة و يقال عنه **عمل محرك** بينما يكون سالبا إذا كانت القوة $\vec{F}$ معاكسة لجهة الحركة و يقال عنه في هذه الحالة **عمل مقاوم** .

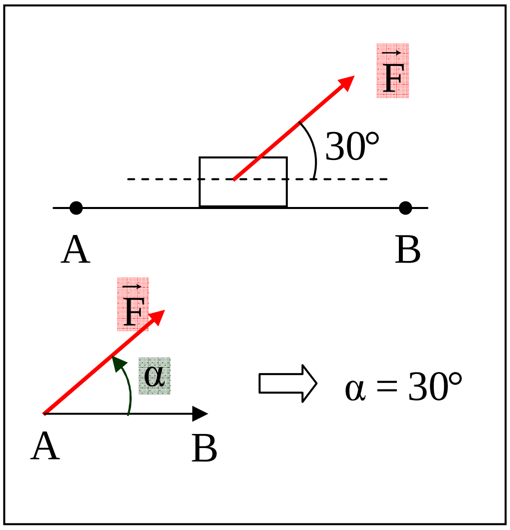


- يعبر عمل قوة $\vec{F}$ ثابتة عندما تنتقل نقطة تطبيقها وفق مسار مستقيم AB بالعلاقة :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = F\ AB \cos\alpha}$$

حيث α هي الزاوية التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{AB}$ مع شعاع القوة $\vec{F}$ ، كما مبين في المثالين التاليين :

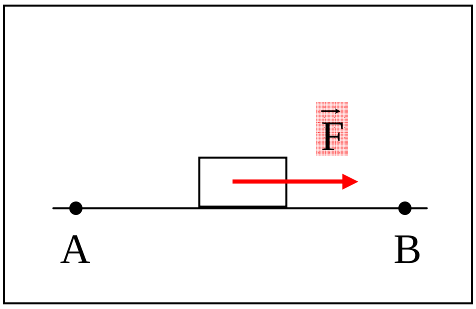




- تقدر المسافة AB بالمتر (m) و شدة القوة $\vec{F}$ بالنيوتن (N) و العمل W بالجول (J) .

حالات خاصة :

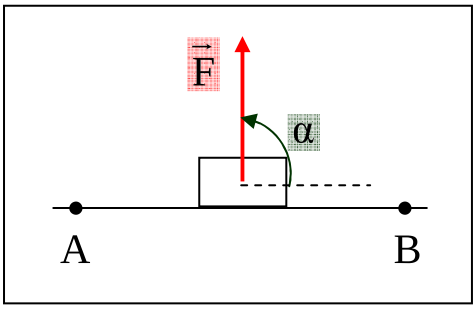
▪ القوة $\vec{F}$ توازي المسار و في جهة الحركة :



في هذه الحالة يكون : $\cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = F\ AB}$$

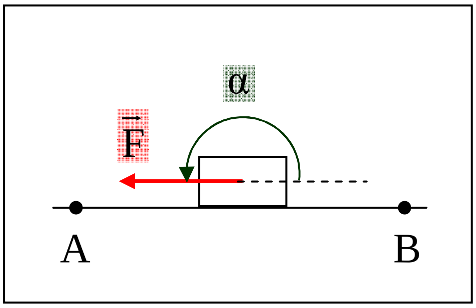
▪ القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار :



في هذه الحالة يكون : $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = 0}$$

▪ القوة $\vec{F}$ توازي المسار و معاكسة لجهة الحركة :

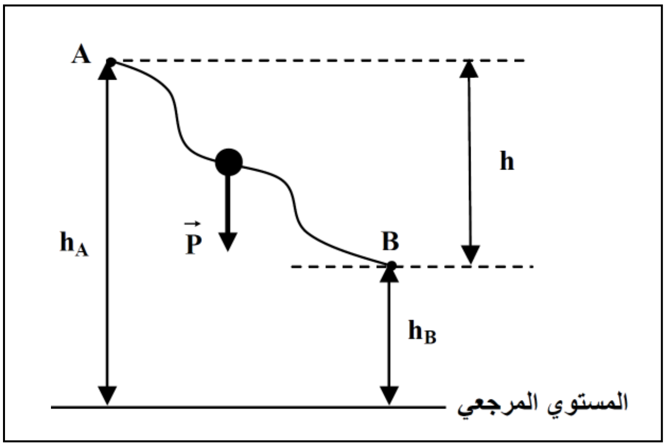


في هذه الحالة يكون : $\alpha = \pi \rightarrow \cos\alpha = -1$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = -\ F\ AB}$$

● **عمل قوة الثقل :**

عندما ينتقل مركز ثقل جسم من موضع A موجودة على ارتفاع z_A من مستوي مرجعي (أو سطح الأرض) إلى موضع B لموجودة على ارتفاع z_B من نفس المستوي المرجع (أو سطح الأرض) ، فإن عمل ثقل هذا الجسم أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B يعبر عنه بالعلاقة :



$$\boxed{W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m.g\,(z_A - z_B)}$$

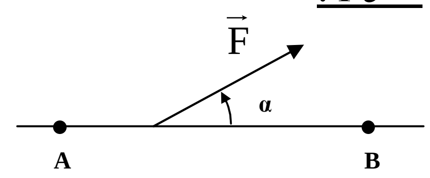
أو بإحدى العلاقتين :

$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = +\,m.g.h \quad (\text{عمل الثقل محرك ، الجسم نازل})$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = -\,m.g.h \quad (\text{عمل الثقل مقاوم ، الجسم صاعد})$$

حيث : h هو الفرق في الارتفاع بين الموضعين A و B .

التمرين (7): (التمرين : 008 في بنك التمارين على الموقع) (*)

الشكل-1 :



1- يتحرك جسم (S) كتلته m ، أفقيا من موضع A إلى موضع B على مسار مستقيم تحت تأثير قوة $\vec{F}$ تصنع زاوية α مع شعاع الانتقال (الشكل) .

- أحسب عمل القوة $\vec{F}$ عندما ينتقل الجسم (S) من الموضع A إلى الموضع B في الحالات التالية :

▪ القوة $\vec{F}$ تصنع زاوية $\alpha = 60^0$ مع المسار في الإتجاه الموافق لجهة الحركة .

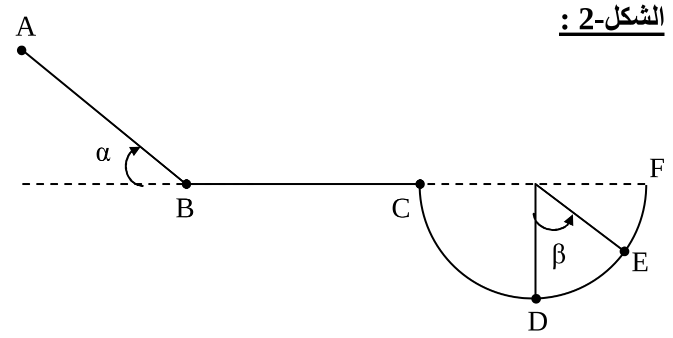
▪ القوة $\vec{F}$ توازي المسار و في جهة الحركة .

▪ القوة $\vec{F}$ توازي المسار و معاكسة لجهة الحركة .

▪ القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار .

يعطى : $F = 20\ N$ ، $AB = 5\ m$.

الشكل-2 :



2- يتحرك جسم (S) كتلته $m = 2\ kg$ بدون احتكاك على المسار ABCDEF الموضح في (الشكل) التالي و الذي يتكون من :

▪ مستوي مائل AB يميل على الأفق بزاوية α .

▪ مستوي أفقي BC .

▪ مسار دائري نصف قطره R .

يعطى : $AB = 10\ m$ ، $R = 8\ m$ ، $g = 10\ N/kg$ ، $\alpha = 30°$ ، $\beta = 60°$.

أ- أحسب عمل قوة الثقل في الحالات التالية :

▪ عند الانتقال من الموضع A إلى الموضع B .

▪ عند الانتقال من الموضع B إلى الموضع C .

▪ عند الانتقال من الموضع C إلى الموضع D .

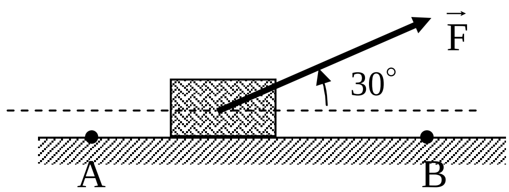
▪ عند الانتقال من الموضع D إلى الموضع E .

يعطى : $AB = 10\ m$ ، $R = 8\ m$ ، $g = 10\ N/m$ ، $\alpha = 30°$ ، $\beta = 60°$.

الأجوبة :

1- عمل القوة $\vec{F}$:

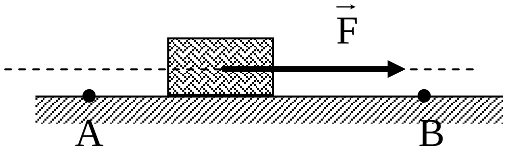
▪ القوة $\vec{F}$ تصنع الزاوية $\alpha = 60°$ في جهة الحركة :



$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = F \,.\, AB \cos 60^\circ$$

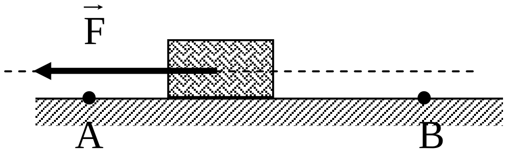
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 20 \,.\, 5 \,.\, 0.5 = 50\ J$$

▪ القوة $\vec{F}$ توازي المسار و في جهة الحركة :



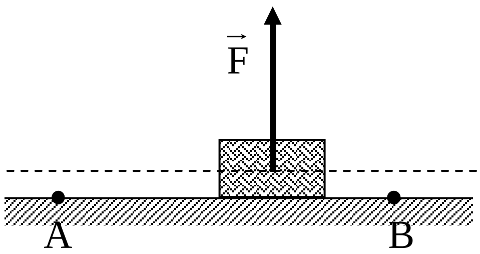
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = F \,.\, AB$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 20 \,.\, 5 = 100\ J$$

▪ القوة $\vec{F}$ توازي المسار و معاكسة لجهة الحركة :



$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = -\,F \,.\, AB$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = -\,20 \,.\, 5 = -100\ J$$

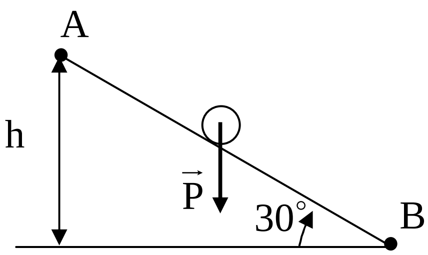
▪ القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار :



$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 0$$

2- عمل الثقل :

▪ الانتقال $(A \rightarrow B)$:



$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m\,g\,h$$

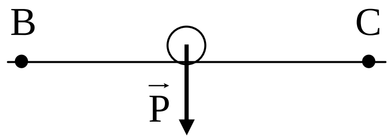
من الشكل :

$$\sin\alpha = \frac{h}{AB} \rightarrow h = AB\sin\alpha$$

و منه :

$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m\,g\,AB\sin\alpha$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = 2 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, \sin 30° = 100\ J$$

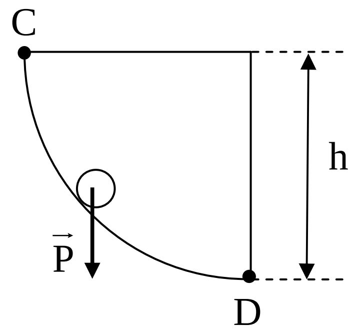
▪ الانتقال $(B \rightarrow C)$:



في هذه الحالة قوة الثقل $\vec{P}$ عمودية على شعاع الانتقال و بالتالي يكون :

$$W_{B\text{-}C}(\vec{P}) = 0$$

▪ الانتقال $(C \rightarrow D)$:

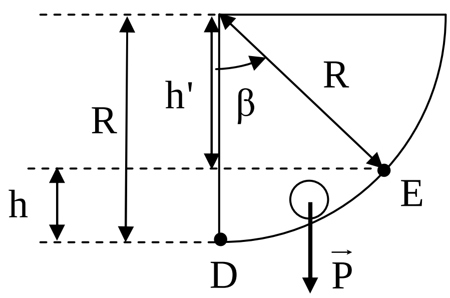


$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = m\,g\,h$$

من الشكل : $h = R$ و منه :

$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = m\,g\,R$$
$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = 2 . 10 . 8 = 160\ J$$

▪ الانتقال $(D \rightarrow E)$:



$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -\,m\,g\,h$$

من الشكل :

$$\begin{cases} h = R - h' \\ \cos\beta = \dfrac{h'}{R} \rightarrow h' = R\cos\beta \rightarrow h = R - R\cos\beta \rightarrow h = R\,(1 - \cos\beta) \end{cases}$$

و منه تصبح عبارة عمل الثقل :

$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -\,m\,g\,R\,(1 - \cos\beta)$$
$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -2 . 10 . 8\ (1 - \cos 60°) = -80\ J$$

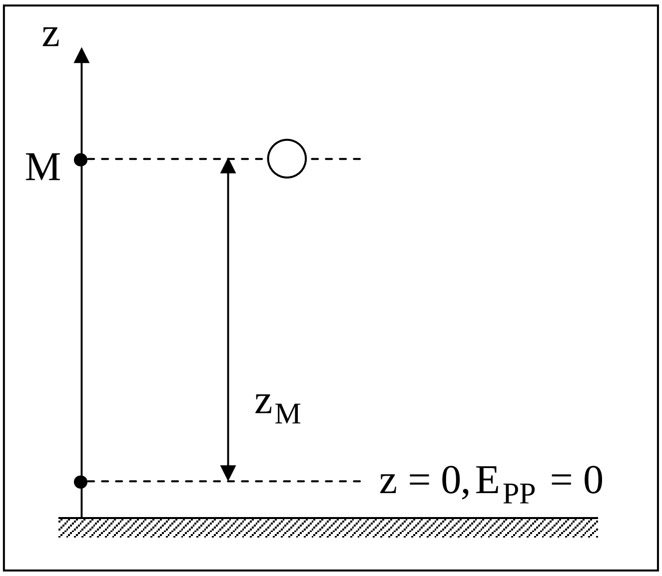
● **الطاقة الحركية الانسحابية :**

- عندما يتحرك جسم ذو كتلة m بسرعة v غند لحظة t ، فإن طاقته الحركية Ec مقدرة بالجول عند هذه اللحظة تعطى بالعبارة التالية :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

● **الطاقة الكامنة الثقالية :**

- نقول عن جملة ميكانيكية أنها تمتلك طاقة كامنة مرنة إذا كانت مرنة في حالة تشوه ، و الجملة تتشوه عندما تتغير الأبعاد بين مختلف أجزائها عندما تتكون من عدة أجزاء .
- الجملة المرنة هي جملة قابلة للتشوه و تعود إلى وضعها الأصلي عند إزالة سبب التشوه (التأثير الخارجي) .
- عكس الجملة المرنة ، الجملة اللينة و هي الجملة التي لا تعود إلى وضعها الأصلي عند إزالة سبب التشوه (مثل العجين) .



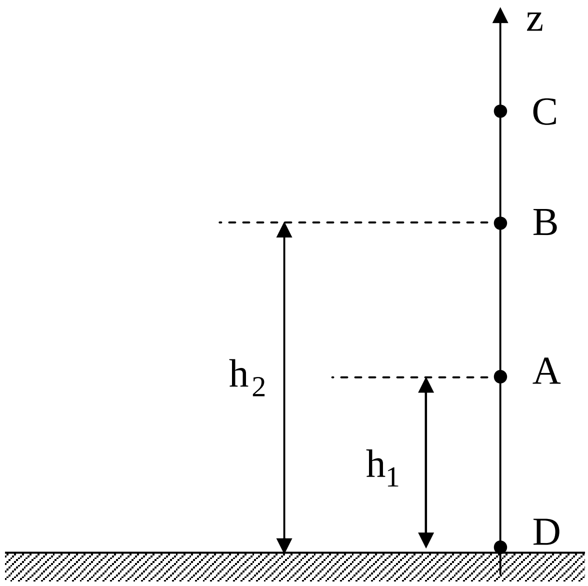
- عندما تستقر الجملة (جسم + أرض) يكون الجسم على سطح الأرض ، و عندما نبعد الجسم عن سطح الأرض يتغير البعد بين الجسم و الأرض فنقول أن الجملة (جسم + أرض) أنها تشوهت ، عندما نترك الجسم حرا لحالة نلاحظ أن الجسم يعود إلى وضعه الأصلي على سطح الأرض فنقول عن الجملة (جسم + أرض) أنها مرنة ، إذن الجملة (جسم + أرض) هي جملة مرنة و قابلة للتشوه و عليه يمكنها تخزين طاقة كامنة تدعى الطاقة **الكامنة الثقالية** يرمز لها بـ $\mathbf{E_{PP}}$ ، يعبر عنها بالعلاقة :

$$E_{pp} = m.g.z$$

حيث : z هو ارتفاع الجسم عن مستوي مرجعي تكون الطاقة الكامنة الثقالية عنده معدومة .

التمرين (8): (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)

من موضع A يقع على ارتفاع $h_1 = 1.2\ m$ من سطح الأرض ، يقذف طفل كرة كتلتها $m = 400\ g$ شاقوليا نحو الأعلى بسرعة v_A ، تمر بالموضع B الذي يرتفع عن سطح الأرض بمقدار $h_2 = 1.5\ m$ ، ثم بالموضع C الذي تغير فيه جهة حركتها ، تمر مرة ثانية من موضع القذف A لتسقط في النهاية على سطح الأرض في الموضع D .



- أحسب الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (كرة + أرض) عند المواضع A ، B ، D في الحالتين التاليتين :
- المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة الثقالية منطبق على سطح الأرض .
- المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة الثقالية مار من النقطة A .

الأجوبة :

- حساب الطاقة الكامنة :

- المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة يكون منطبق على سطح الأرض (مار من D) :

- $E_{PPA} = m\ g\ z_A = m\ g\ h_1 = 0.4\ .\ 10\ .\ 1.2 = 4.8\ J$
- $E_{PPB} = m\ g\ z_B = m\ g\ h_2 = 0.4\ .\ 10\ .\ 1.5 = 6\ J$
- $E_{PPD} = m\ g\ z_D = 0$ (المستوى المرجعي)

- المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة يكون مار من A:

- $E_{PPA} = m\ g\ z_A = 0$ (المستوي المرجعي)
- $E_{PPB} = m\ g\ z_B = m\ g\ (h_2 - h_1) = 0.4\ .\ 10\ .\ (1.5 - 1.2) = 1.2\ J$
- $E_{PPD} = m\ g\ z_D = m\ g\ (-\ h_1) = 0.4\ .\ 10\ .\ (-1.2) = -\ 4.8\ J$

• معادلة انحفاظ الطاقة في الجملة الميكانيكية :

إذا انتقلت جملة ميكانيكية من موضع A إلى موضع B و كانت طاقتها عند A هي E_A و طاقتها عند B هي E_B ، فإنه يعبر عن معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الإنتقال من A إلى B كما يلي :

$$\underbrace{E_A}_{(1)} + \underbrace{E_{\text{مكتسبة}}}_{(2)} - \underbrace{E_{\text{مقدمة}}}_{(3)} = \underbrace{E_B}_{(4)}$$

أشكال الطاقة عند A : حركية أو كامنة أو معا ، حسب الجملة المدروسة

مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في جهة الحركة

مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في عكس جهة الحركة

أشكال الطاقة عند B : حركية أو كامنة أو معا ، حسب الجملة المدروسة

و يكون مخطط الحصيلة الطاقة الموافقة كما يلي :

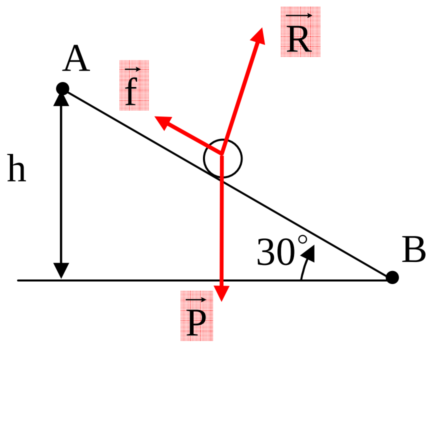
مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في جهة الحركة ⟵

أشكال الطاقة التي تغيرت قيمها أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B حركية أو كامنة أو معا ، حسب الجملة المدروسة

⟵ مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في عكس جهة الحركة

مثال-1:

جسم صلب (S) يتحرك على مستوي مائل إنطلاقا من الموضع A أعلى مستوي مائل إلى الموضع B أسفل هذا المستوي المائل ، نريد كتابة معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الانتقال AB .

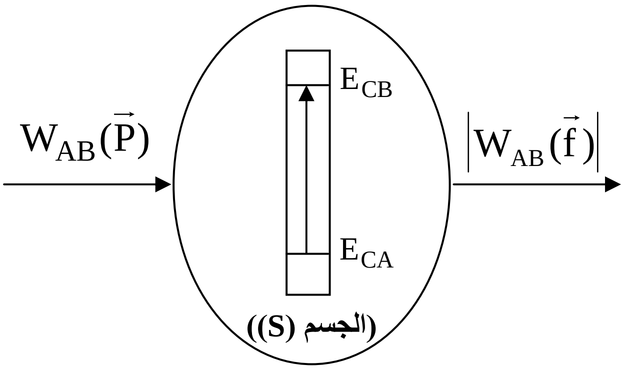


- الجملة المدروسة : (جسم)

- القوى الخارجية :

- الثقل $\vec{P} \leftarrow W_{AB}(\vec{P}) > 0$.
- قوة رد الفعل $\vec{R} \leftarrow W_{AB}(\vec{R}) = 0$
- قوة الاحتكاك $\vec{f} \leftarrow W_{AB}(\vec{f}) < 0$.

- أشكال الطاقة :
- حركية متزايدة .
- الحصيلة الطاقوية :



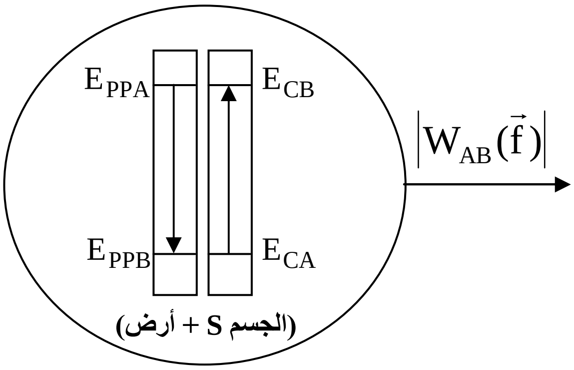
- معادلة انحفاظ الطاقة :

$$\boxed{E_{CA} + W_{AB}(\vec{P}) - |W_{AB}(f)| = E_{CB}}$$

- الجملة المدروسة : (جسم + أرض)

- القوى الخارجية :
- قوة رد الفعل $\vec{R} \leftarrow W_{AB}(\vec{R}) = 0$
- قوة الاحتكاك $\vec{f} \leftarrow W_{AB}(\vec{f}) < 0$.

- أشكال الطاقة :
- حركية متزايدة .
- كامنة ثقالية متناقصة .
- الحصيلة الطاقوية :

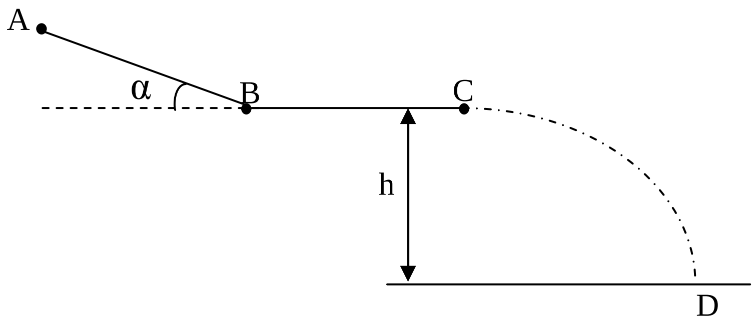


- معادلة انحفاظ الطاقة :

$$\boxed{E_{CA} + E_{PPA} - |W_{AB}(f)| = E_{CB} + E_{PPB}}$$

التمرين (9): (التمرين : 009 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جسم (S) نعتبره نقطي (أبعاده مهملة) كتلته $m = 1\ Kg$ يتحرك على المسار ABCD (الشكل) حيث :
AB : مستوي مائل طوله $AB = 2\ m$ و يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ به الاحتكاك مهمل .
BC : مسار مستقيم أفقي طوله $BC = 2\ m$
يخضع الجسم (S) على المسار BC لقوة احتكاك $\vec{f}$ شدتها ثابتة .

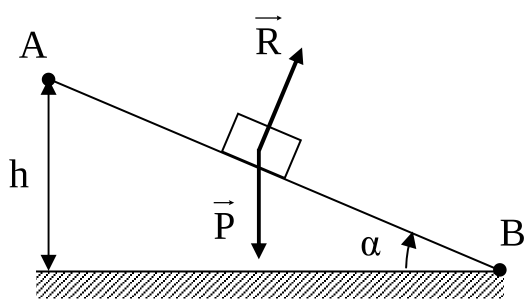


يُدفع الجسم (S) من الموضع (A) بسرعة ابتدائية قدرها $v_A = 4\ m/s$. يعطى : $g = 10\ m/s^2$.
1 – مثل مخطط الحصيلة الطاقوية و اكتب معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الإنتقال من الموضع A إلى الموضع B ثم أحسب سرعة مركز عطالة الجسم (S) عند الموضع (B) أسفل المستوي المائل ، في الحالتين :
أ- باعتبار الجملة (جسم S) .
ب- باعتبار الجملة (جسم S + أرض) ، و بأخذ المستوي الأفقي المار من B مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية .
2 – إذا علمت أن الجسم (S) يصل إلى الموضع C بسرعة قدرها 4 m/s .
أ- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية و اكتب معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الانتقال من B إلى C .
ب- جِد شدة قوة الاحتكاك f .
3 – عند وصول الجسم (S) إلى النقطة C التي تبعد عن سطح الأرض بمقدار h، يندفع الجسم في الهواء و يسقط تحت تأثير ثقله حتى يصطدم بالأرض في الموضع D بسرعة $v_D = 7\ m/s$.
أ- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية و اكتب معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الانتقال من الموضع C إلى الموضع D .
ب- جِد الارتفاع h (تهمل كل قوى الاحتكاك و دافعة أرخميدس) .

الأجوبة :

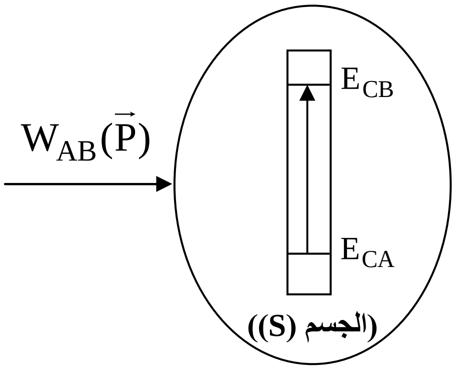
1- مخطط الحصيلة الطاقوية و معادلة انحفاظ الطاقة و حساب السرعة عند B باعتبار الجملة (جسم) :

أ- الجملة المدروسة : جسم (S) .



- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

▪ مخطط الحصيلة الطاقوية :



▪ معادلة انحفاظ الطاقة :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = E_{CB}$$

▪ السرعة عند B :

اعتمادا على معادلة انحفاظ الطاقة السابقة :

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\frac{1}{2} v_A^2 + g h = \frac{1}{2} v_B^2 \rightarrow v_A^2 + 2g h = v_B^2$$

من الشكل :

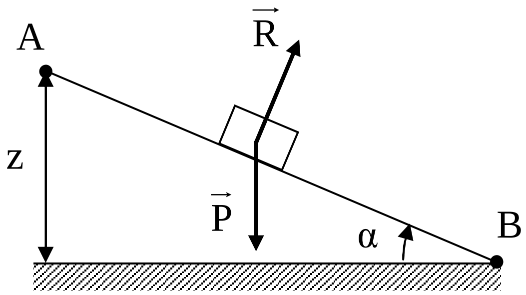
$$\sin\alpha = \frac{h}{AB} \rightarrow h = AB.\sin\alpha$$

و منه :

$$v_A^2 + 2 g\, AB \sin\alpha = v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 g\, AB \sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{(4)^2 + (2\ .10 .2\ .\ 0.5)} = 6\ m/s$$

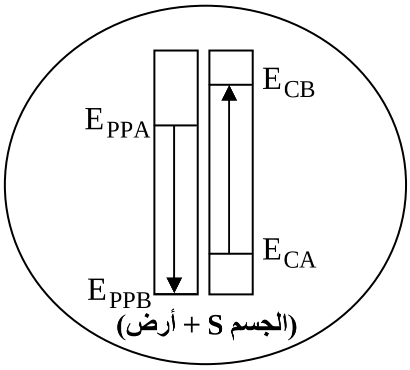
ب- الجملة المدروسة : (جسم S + أرض) :



- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : قوة رد الفعل $\vec{R}$.

▪ مخطط الحصيلة الطاقوية :



▪ معادلة انحفاظ الطاقة :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{cA} + E_{ppA} = E_{cB} + E_{ppB}$$

ب- السرعة عند B :

بالاعتماد على معادلة انحفاظ الطاقة :

$$\frac{1}{2} m\, v_A^{\;2} + m\, g\, z_A = \frac{1}{2} m\, v_B^{\;2}$$

$$\frac{1}{2} v_A^{\;2} + g\, z_A = \frac{1}{2} v_B^{\;2} \rightarrow v_A^{\;2} + 2g\, z_A = v_B^{\;2}$$

من الشكل :

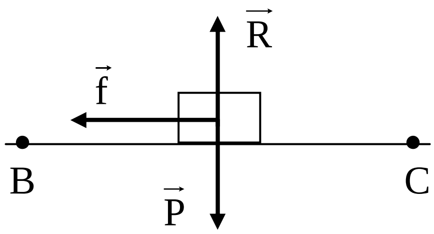
$$\sin\alpha = \frac{z_A}{AB} \rightarrow z_A = AB.\sin\alpha$$

و منه :

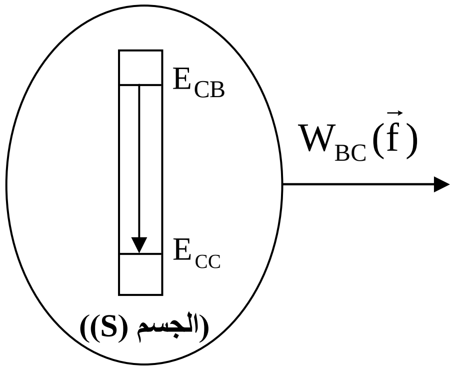
$$v_A^{\;2} + 2\, g\, AB \sin\alpha = v_B^{\;2} \rightarrow v_B = \sqrt{v_A^{\;2} + 2\, g\, AB \sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{(4)^2 + (2\ .10 . 2\ .\ 0.5)} = 6\, m/s$$

2- أ- مخطط الحصيلة الطاقوية :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.



▪ معادلة انحفاظ الطاقة :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين B و C :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CB} - \left|W_{B-C}(\vec{f})\right| = E_{CC}$$

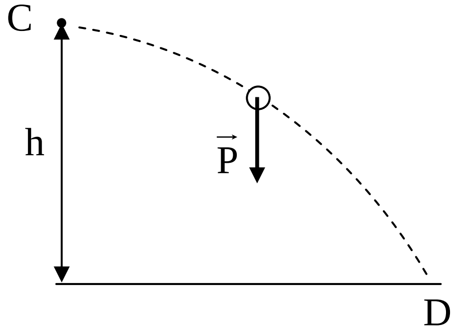
ب- شدة قوة الاحتكاك f :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - |-f.BC| = \frac{1}{2} m v_C^2$$

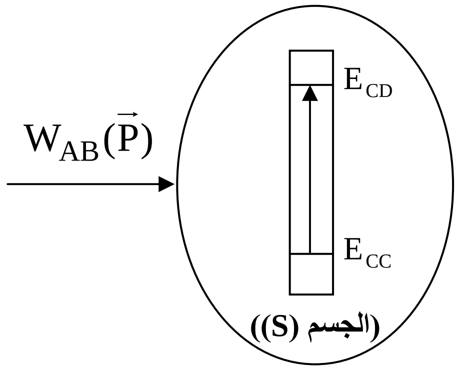
$$\frac{1}{2} m v_B^2 - f.BC = \frac{1}{2} m v_C^2 \rightarrow m v_B^2 - 2f\ BC = m v_C^2$$

$$m v_B^2 - m v_C^2 = 2f\ BC \rightarrow f = \frac{m(v_B^2 - v_C^2)}{2.BC} \rightarrow f = \frac{1(6^2 - 4^2)}{2\ .\ 2} = 5\ N$$

3- أ- مخطط الحصيلة الطاقوية :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.



▪ معادلة انحفاظ الطاقة :

بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين C و D حيث :

$$E_C + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_D$$

$$E_{CC} + W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = E_{CD}$$

▪ حساب الارتفاع h :

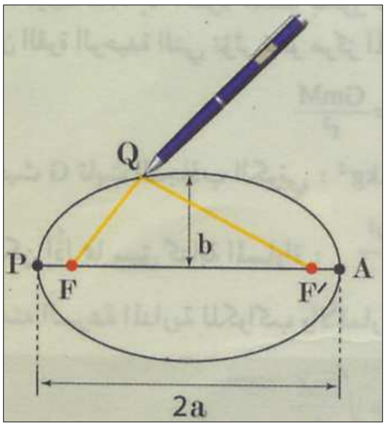
بالاعتماد على معادلة انحفاظ الطاقة :

$$\frac{1}{2} m v_C^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_D^2 \rightarrow v_C^2 + 2 g h = v_D^2$$

$$2 g h = v_D^2 - v_C^2 \rightarrow h = \frac{v_D^2 - v_C^2}{2g} \rightarrow h = \frac{(7)^2 - (4)^2}{2.10} = 1.65\, m$$

III – حركة الأقمار الاصطناعية و الكواكب

1- قوانين كيلر



● **خواص الإهليليج :**

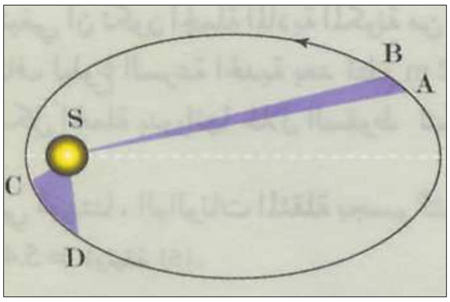
- الإهليليج هو منحنى يكون فيه دائما مجموع المسافتين من نقطة منه إلى المحرقين F و F' ثابتا (الشكل) .

● **القانون الأول لكبلر :**

- ينص على ما يلي :

" إن الكواكب تتحرك وفق مدارات اهليلجية تمثل الشمس إحدى محرقيها "

● **القانون الثاني لكبلر :**



- ينص على ما يلي :

" إن المستقيم الرابط بين الشمس و كوكب يمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية "

مثال :

إذا فرضنا أن خلال مجال زمني معين ، ينتقل كوكب من النقطة A إلى النقطة Bو ينتقل من C إلى D خلال مجال زمني آخر مساوي للمجال الزمني الأول .

- من الشكل نلاحظ CD > AB ، يدل ذلك على أن سرعة الكوكب ليست ثابتة و تزداد كلما اقترب الكوكب من الشمس أي : $v_m(CD) > v_m(AB)$.

● **القانون الثالث لكبلر :**

- ينص على ما يلي :

" إن مربع الدور لمدار كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس أي :

$$T^2 = k\,r^3 \Leftrightarrow \frac{T^2}{r^3} = k$$

و بعبارة أخرى :

$$\frac{T_1^{\,2}}{r_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{r_2^{\,3}} = \frac{T_3^{\,2}}{r_3^{\,3}} = ... = k$$

k : ثابت صالح لكل الكواكب و مستقل عن كتلة الكواكب.

التمرين (10) : (التمرين : 015 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يتحرك قمر إصطناعي (S) بسرعة ثابتة على مدار دائري حول الأرض نصف قطره r .

1- أكتب عبارة شدة القوة المؤثرة على القمر الإصطناعي بدلالة G ، m ، M ، r ، حيث G : ثابت الجذب العام ، m : كتلة القمر الإصطناعي ، M : كتلة الأرض ، r : نصف قطر مسار القمر الإصطناعي حول الأرض .

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن استنتج عبارة التسارع الناظمي a_n بدلالة G ، M ، r .

3- أوجد عبارة سرعة القمر الإصطناعي v بدلالة G ، M ، r . .

4- أكتب عبارة دور القمر الاصطناعي T بدلالة v ، r .

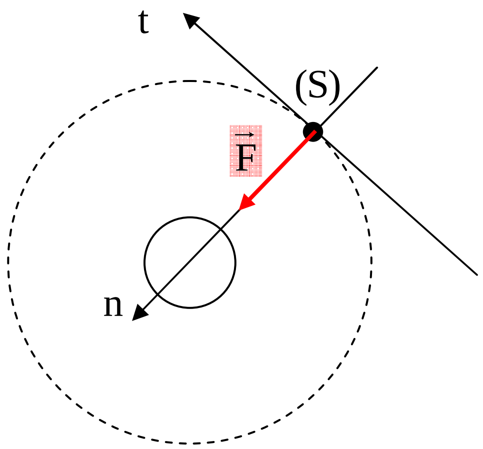
5- أوجد عبارة دور القمر الاصطناعي T بدلالة G ، M ، r .

6- أثبت أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة من أجل أي قمر اصطناعي .

7- ما معنى قمر إصطناعي جيو مستقر . أوجد ارتفاع هذا القمر الإصطناعي على سطح الأرض و كذا سرعته على مداره .

<u>المعطيات :</u>

- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 \,.\, 10^{-11}$ SI .
- كتلة الأرض : $M = 5.98 \,.\, 10^{24}$ kg .
- نصف قطر الأرض : $R = 6.37 \,.\, 10^{6}$ m .
- دور حركة الأرض حول نفسها : T = 23 h , 56 min .



الأجوبة :

<u>1- عبارة شدة القوة المؤثرة :</u>

حسب قانون الجذب العام يخضع القمر الاصطناعي إلى قوة $\vec{F}_{T/S}$ ناتجة عن جذب الأرض (T) للقمر الاصطناعي (S) و حسب ذات القانون شدة هذه القوة هي :

$$F = G\,\frac{m\,.\,M}{r^2}$$

<u>2- عبارة a_n :</u>

- الجملة المدروسة : قمر اصطناعي (S) .
- مرجع الدراسة : مركزي أرضي نعتبره غاليلي (جيومركزي)
- القوة الخارجية المؤثرة على الجملة : القوة $(\vec{F}_{T/S})$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F}_{T/S} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية على المحورين المماس (ot) و الناظمي (on) .

$$\begin{cases} 0 = m\,a_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ F = m\,a_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من العلاقة (2) :

$$G\frac{m.M}{r^2} = m\,a_n \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{GM}{r^2}$$

<u>3- عبارة سرعة القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة G ، M ، r :</u>

لدينا من جهة :

$$a_n = \frac{GM}{r^2}$$

ومن جهة أخرى :

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

ومنه :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,.\,M}{r}}$$

<u>4- عبارة الدور بدلالة v ، r :</u>

$$T = \frac{2\pi\,r}{v}$$

<u>5- عبارة الدور بدلالة G ، M_T ، r :</u>

اعتمادا على ما سبق :

$$T = \frac{2\pi\,r}{\sqrt{\frac{G.M}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\,r^2}{\frac{G.M}{r^2}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\,r^3}{G.M} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G\,.\,M}}$$

<u>7- إثبات أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة :</u>

اعتمادا على ما سبق :

$$T^2 = \frac{4\pi^2\,r^3}{G.M} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

π ، G ، M ثوابت ، إذن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية .

6- معنى قمر جيو مستقر :
يعني أثناء حركته يكون ثابت بالنسبة لنقطة من سطح الأرض ، و بالتالي فهو يتميز بالخصائص التالية :
- دور حركته مساوي لدور حركة الأرض حول نفسها .
- يتحرك في جهة حركة دوران الأرض .
- يدور على خط الإستواء .

- ارتفاع القمر الجيومستقر :
إذا كان h هو ارتقاع القمر الاصطناعي بالنسبة للأرض و كان R هو نصف قطر الأرض يكون : $r = R + z$ و منه يمكن كتابة :

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

$$(R+h)^3 = \frac{T^2 G\,M}{4\pi^2} \rightarrow (R+h) = \sqrt[3]{\frac{T^2\,G\,M}{4\pi^2}} \rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T^2\,G\,M}{4\pi^2}} - R$$

$$T = (23\,.\,3600) + (56\,.\,60) = 86160\ s$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(86160)^2\,.\,6.67\,.\,10^{-11}\,.\,5.98\,.\,10^{24}}{4\pi^2}} - 6.37\,.\,10^6 = 3.5816\ 10^7\ m = 35816\ km$$

- سرعة القمر الاصطناعي على مساره :
مما سبق يمكن كتابة :

$$v = \sqrt{\frac{G\,.\,M}{(R+h)}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{6,67\,.\,10^{-11}\,.\,5,98\,.\,10^{24}}{(6,37\,.\,10^6 + 3,58\,.\,10^7}} = 3075,47\ m/s$$

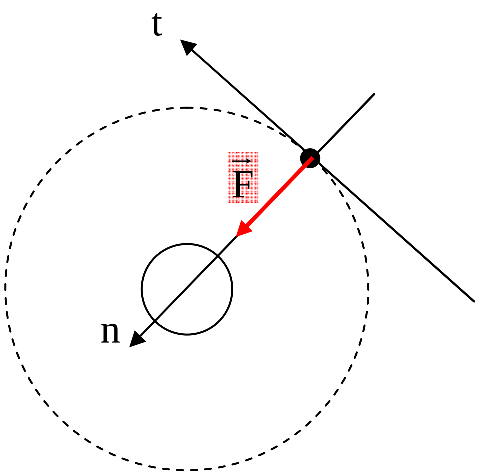
التمرين (11) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (*)

كوكب كتلته m يدور حول الشمس ذات الكتلة M متبعا مسارا نعتبره دائريا مركزه o هو مركز عطالة الشمس .
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن حركة مركز عطالة هذا الكوكب دائرية منتظمة بالنسبة للمرجع الهيليومركزي .
2- أوجد عبارة سرعة الكوكب v بدلالة كل من ثابت الجذب العام G ، كتلة الشمس M و البعد r بين مركزي العطالة لكل من الكوكب و الشمس .
3- اذكر نص القانون الثالث لكبلر .
4- كوكبا الأرض و المريخ يدوران حول الشمس على مدارين يمكن اعتبارهما دائريين ، مركزهما هو مركز الشمس o . بتطبيق قانون كبلر الثالث ، استنتج قيمة r_m نصف قطر مدار المريخ .

المعطيات :
- ثابت الجذب العام : $G = 6.67\ .\ 10^{-11}\ SI$.
- نصف قطر مدار الأرض حول الشمس : $r_t = 150\ .\ 10^6\ km$.
- مدة دوران الأرض حول الشمس : $T_t = 365.25\ j$.
- مدة دوران كوكب المريخ حول الشمس : $T_m = 687\ j$.

الأجوبة :

1- إثبات أن حركة الكوكب دائرية منتظمة :



- الجملة المدروسة : كوكب (P) .
- مرجع الدراسة : مركزي شمسي (هيليو مركزي) نعتبره غاليلي
- القوى الخارجية المؤثرة : قوة الجذب العام $\vec{F}_{S/P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\Sigma\vec{F}_{S/P} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المحورين المماسي و الناظمي :

$$\begin{cases} 0 = m.a_t \;.....................\; (1) \\ F = m.a_n \;.....................\; (2) \end{cases}$$

الطريقة الأولى :

- من العلاقة (1) :

$$a_t = 0$$

و حيث أن : $a_t = \frac{dv}{dt}$ يكون :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \;\rightarrow\; v = C$$

أي أن سرعة القمر الاصطناعي ثابتة ، و كون أن مساره دائري ، تكون حركته دائرية منتظمة .

الطريقة الثانية :

نحسب قيمة التسارع :

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}$$

- من العلاقة (1) و مما سبق وجدنا : $a_t = 0$.

من العلاقة (2) نكتب :

$$\frac{G.m.M}{r^2} = m\,a_n \;\rightarrow\; a_n = \frac{GM}{r^2}$$

و منه يصبح :

$$a = a_n = \frac{GM}{r^2}$$

G ، M ، r ثوابت و منه التسارع يكون ثابت ، و كون أن المسار دائري ، فحركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة .

2- عبارة v بدلالة G ، M ، r :

من العلاقة (2) :

$$F = m\,a_n \rightarrow G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

3- نص القانون الثالث لكبلر :

يتناسب مربع دور كوكب T^2 مع مكعب البعد المتوسط r^3 للكوكب عن الشمس أي :

$$T^2 = \alpha\, r^3$$

أو :

$$\frac{T_1^{\,2}}{r_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{r_2^{\,3}} = \frac{T_3^{\,2}}{r_3^{\,3}} = ... = \alpha$$

حيث α هو ثابت التناسب

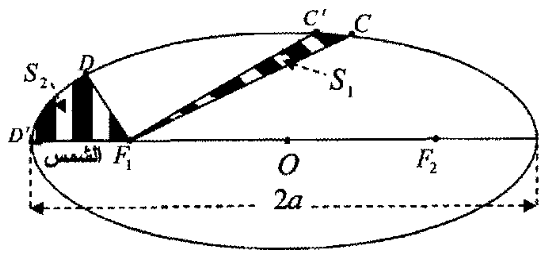
4- نصف قطر كوكب المريخ :

بتطبيق القانون القانون لكبلر بالنسبة لكوكب الأرض t و كوكب المريخ m نكتب :

$$\frac{T_t^{\,2}}{r_t^{\,3}} = \frac{T_m^{\,2}}{r_m^{\,3}} \rightarrow r_m = \sqrt[3]{\frac{T_m^{\,2}.r_t^{\,3}}{T_t^{\,2}}} \rightarrow r_m = \sqrt[3]{\frac{(687\ \text{jours})^2\,(150.10^6\ \text{km})^3}{(365.25\ \text{jours})^2}} = 2.29.10^8\,\text{km}$$

التمرين (12) : (بكالوريا 2010 – رياضيات) (التمرين : 057 في بنك التمارين على الموقع) (*)

أ/ يكون مسار حركة مركز عطالة كوكب حول الشمس اهليليجيا كما يوضحه (الشكل-4) .



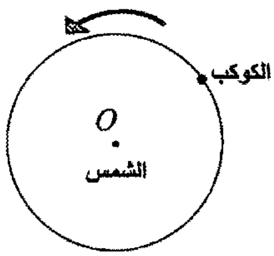
(الشكل-4)

ينتقل الكوكب أثناء حركته على مداره من النقطة C إلى النقطة C' ثم من النقطة D إلى النقطة D' خلال نفس المدة الزمنية Δt .

1- اعتمادا على قانون كبلر الأول فسر وجود موقع الشمس في النقطة F_1 ، كيف نسمي عندئذ النقطتين F_1 ، F_2 ؟

2- حسب قانون كبلر الثاني ما هي العلاقة بين المساحتين S_1 و S_2 ؟

3- بين أن متوسط السرعة بين الموضعين C و C' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين D و D' .



(الشكل-5)

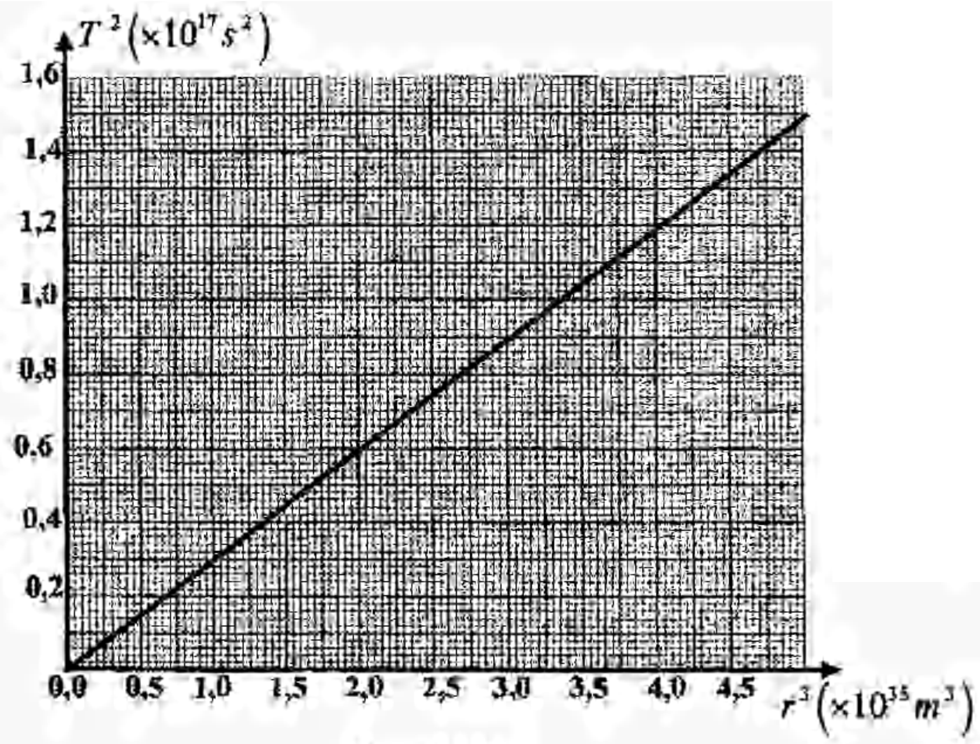
ب/ من أجل التبسيط ننمذج المسار الحقيقي في المرجع الهيليومركزي بمدار دائري مركزه O (مركز الشمس) و نصف قطره r (الشكل-5) .

يخضع كوكب أثناء حركته حول الشمس إلى تأثيرها و الذي ينمذج بقوة $\vec{F}$ ، قيمتها تعطى حسب قانون الجذب العام لنيوتن بالعلاقة :

$F = G\dfrac{mM}{r^2}$ ، حيث M كتلة الشمس ، m كتلة الكوكب و G ثابت التجاذب الكوني

$G = 6.67\ .\ 10^{-11}\ \text{SI}$

باستعمال برمجية "satellite" في جهاز الإعلام الآلي تم رسم البيان $T^2 = f(r^3)$ (الشكل-6) . حيث T دور الحركة



(الشكل-6)

1/ أذكر نص قانون كبلر الثالث .
2/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب و باهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، أوجد عبارة كل من v سرعة الكوكب ، و دور حركته T بدلالة r ، G ، M .
3/ أوجد بيانيا العلاقة بين T^2 و r^3 .
4/ أوجد العلاقة النظرية بين T^2 و r^3 .
5/ بتوظيف العلاقتين الأخيرتين استنتج قيمة كتلة الشمس M .

الأجوبة :

أ/ 1- تفسير وجود الشمس في النقطة F_1 :
- وجود الشمس في النقطة F_1 يفسر بمسار الكوكب الإهليليجي و الذي تمثل الشمس أحد محرقيه ، حسب قانون كبلر االأول .
- تسمى النقطتين F_1 ، F_2 محرقا المدار الإهليليجي .
2- العلاقة بين متوسط المساحتين S_1 ، S_2 :
حسب قانون كبلر الثاني يكون : $S_1 = S_2$
3- إثبات أن متوسط السرعة بين الموضعين C ، C' أقل من متوسط السرعة بين D ، D' .
- من (الشكل-4) المعطى :

$$\overset{\frown}{C'C} < \overset{\frown}{D'D}$$

و كون أن الكوكب يقطع المسافتين C'C ، D'D في نفس المدة الزمنية يكون بقسمة الطرفين على الزمن :

$$v_{(C'C)} < v_{(D'D)}$$

ب/ 1- قانون كبلر الثالث :
ينص على ما يلي : " مربع دور الكوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس "

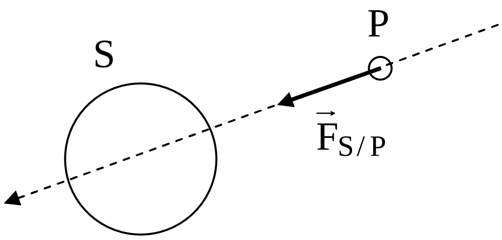
2- عبارة السرعة v و الدور T بدلالة r ، G ، M :

- الجملة المدروسة : كوكب (P) .

- مرجع الدراسة : هيليو مركزي .

- القوى الخارجية المؤثرة : القوة $\vec{F}_{S/P}$ الناتجة عن جذب الشمس للكوكب

- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :



$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\Sigma\vec{F}_{S/P} = m\,\vec{a} \quad .... (1)$$

- بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور الناظمي :

$$F_{S/P} = m\,a_n \rightarrow G\frac{M.m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{r}$$

- لدينا : $T = \dfrac{2\pi r}{v}$ و منه :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM}{r}} = \frac{4\pi^2\, r^3}{GM} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

3- العلاقة بين T^2 و r^3 بيانيا :

البيان $T^2 = f(r^3)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ لذا يكون :

$$T^2 = \alpha\, r^3$$

- من البيان :

$$\alpha = \frac{0.6\ .10^{17}}{2.10^{35}} = 3.10^{-19}$$

و منه يكون : $\mathbf{T^2 = 3\ .\ 10^{-19}\ r^3}$

4- العلاقة النظرية بين T^2 و r^3 :

من عبارة الدور السابقة يمكن كتابة :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\, r^3$$

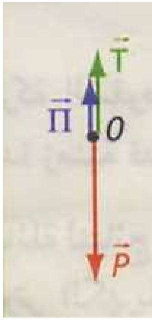
5- كتلة الشمس :

- بمطابقة مع العلاقتين البيانية و النظرية :

$$\frac{4\pi^2}{GM} = \alpha \rightarrow M = \frac{4\pi^2}{G\,\alpha} \rightarrow M = \frac{4\pi^2}{6.67\,.\,10^{-11}\,.3.10^{-19}} = 1.97.10^{30}\ \text{Kg}$$

IV – دراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

1– القوى المؤثرة على جسم صلب يسقط في الهواء :



- عندما لا يهمل تأثير الهواء على حركة سقوط الأجسام يسمى السقوط بالسقوط الحقيقي و في هذه الحالة يخضع الجسم (S) الساقط في الهواء إلى تأثير ثلاث قوى هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة احتكاك الجسم مع الهواء $\vec{f}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$.

▪ قوة الثقل $\vec{P}$:

- ناتجة عن تأثير الأرض على الجسم (S) ، يعبر عنها شعاعيا بدلالة شعاع تسارع الجاذبية بالعلاقة : $\vec{P} = m\,\vec{g}$.
- شدة قوة ثقل جسم (S) كتلته m موجود بجوار سطح الأرض يعطى بالعبارة :

$$\boxed{P = m\,g}$$

▪ قوة الإحتكاك $\vec{f}$:

- ناتجة عن احتكاك الجسم مع الهواء ، يعبر عنها شعاعيا بدلالة شعاع السرعة $\vec{v}$ من أجل السرعات الصغيرة بالعلاقة : $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ حيث k هو ثابت يميز الهواء وحدته Kg/s ، أي أن شدة قوة الاحتكاك تكون دوما عكس جهة الحركة ، كما أنها تتناسب طرديا مع سرعة الجسم (S) و بالتالي يعبر عند شدتها بالعلاقة :

$$\boxed{f = k\,v}$$

- من أجل السرعات الكبيرة تتناسب شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$ مع مربع السرعة وفق العلاقة :

$$\boxed{f = k\,v^2}$$

حيث k هو ثابت يميز الهواء وحدته Kg/m في هذه الحالة ($f = k\,v^2$) .

▪ دافعة أرخميدس :

- عندما نترك جسم (S) يكون أخف من الهواء ، بالونة مملوء بغاز الهيليوم مثلا ، نلاحظ أن هذه البالونة تصعد نحو الأعلى ، القوة المسؤولة عن هذا الصعود تدعى دافعة أرخميدس ، يرمز لها بـ $\vec{\Pi}$ و يعبر عنها شعاعيا بدلالة شعاع تسارع الجاذبية الأرضية بالعلاقة : $\vec{\Pi} = -m_{air}\,\vec{g}$ ، حيث $m_{air} = \rho_{air}.V_{air}$ هي كتلة الهواء المنزاح الذي حل محله الجسم (S) و حجم الجسم المنزاح هو نفسه حجم الجسم (S) ، أي $V_{air} = V_s$ ، و بالتالي يعبر عن شدة دافعة أرخميدس بالعلاقة :

$$\boxed{\Pi = \rho_{air} V_S\, g}$$

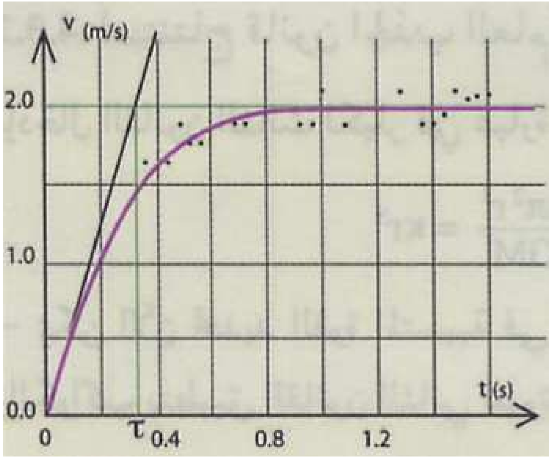
حيث : $\rho_{air} = 1,29\ Kg/m^3$ هي الكتلة الحجمية للهواء .

2- دراسة حركة السقوط الحقيقي لجسم صلب في الهواء :

أ- الدراسة التجريبية :

- نعتبرجملة مادية مكونة من أربعة بالونات خفيفة مثقلة بجسم (S) خفيف كتلته m .
- نقوم بدراسة السقوط الشاقولي للجسم الصلب (S) في الهواء ، و ذلك باستعمال كاميرا رقمية (Webcam) ، و معالجة شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" بجهاز الإعلام الآلي فنحصل على البيان التالي $v = f(t)$ الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل) .
- من البيان يتضح وجود مرحلتين :

▪ مرحلة أولى تكون فيها قيمة السرعة متزايدة بشكل سريع في البداية و أقل فأقل مع مرور الزمن . إذن حركة الجسم (S) في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة ، تسمى هذه المرحلة **بالنظام الانتقالي .**



▪ مرحلة ثانية تكون فيها قيمة السرعة ثابتة حيث تبلغ قيمة حدية $v_\ell = 2.0\ m/s$ ، إذن حركة الجسم (S) مستقيمة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة ، تسمى هذه المرحلة **بالنظام الدائم .**

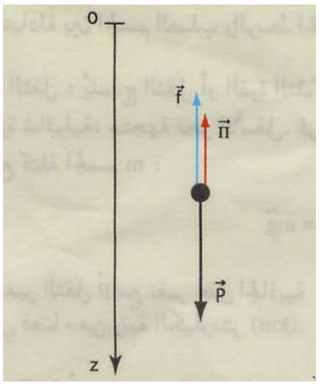
الزمن المميزللسقوط τ :

يقطع مماس البيان v(t) عند اللحظة $t = 0$ في حالة $f = kv$ الخط المقارب $v = v_\ell$ في لحظة تمثل مقدار يدعى الزمن المميز للسقوط يرمز له بـ τ و وحدته الثانية s و يعبر عنه بالعلاقة :

$$\boxed{\tau = \frac{m}{K}}$$

ب- الدراسة النظرية :

▪ الحالة : $f = kv$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ غير مهملتين :



- الجملة المعتبرة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ؛ دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الإحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m_S\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور (z'z) :

$$P - \Pi - kv = m_S\,a_z$$

$$m\,g - \rho_{air} V g - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv = m\,g - \rho_{air} V\,g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \frac{\rho_{air} V\,g}{m}$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v = g - \frac{\rho_{air} V g}{\rho_S V} \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v = g - \frac{\rho_{air} g}{\rho_S}$$

إذن :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v = g(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_{(S)}})}$$

▪ عبارة السرعة الحدية v_ℓ :

في النظام الدائم أين يكون ، $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، يكون بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$0 + \frac{K}{m}v_\ell = g\,(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_{(S)}}) \rightarrow \frac{K}{m}v_\ell = g\,(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_{(S)}})$$

إذن :

$$\boxed{v_\ell = \frac{m\,g}{K}(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_{(S)}})}$$

▪ الحالة : $f = kv^2$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ غير مهملتين :

تصبح المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v^2 = g(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_{(S)}})}$$

- في النظام الدائم أين يكون $\frac{dv}{dt} = 0$ و تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ ، بنفس الطريقة المتبعة سابقا يكون :

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{m\,g}{K}(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_{(S)}})}}$$

▪ الحالة : $f = kv$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ مهملة و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ غير مهملة :

في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{K}{m}v = g}$$

ملاحظة :

في اللحظة $t = 0$ أين $(v = 0)$ تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$(\frac{dv}{dt})_{t=0} + 0 = g \rightarrow a_0 = g$$

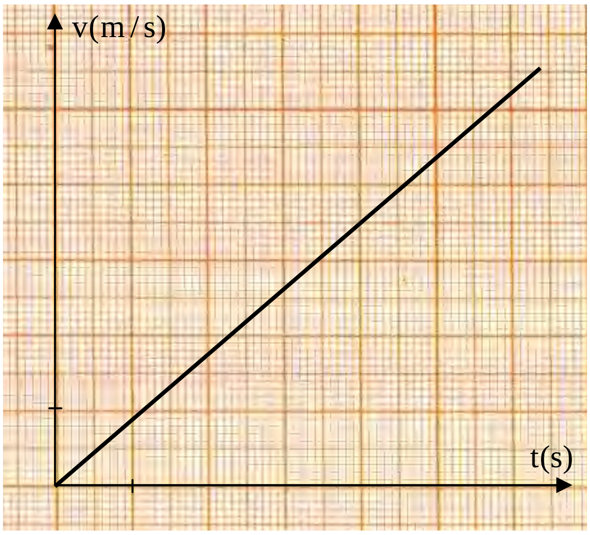
أي أنه عندما تكون دافعة أرخميدس مهملة ، فإن عند اللحظة $t = 0$ يكون $a_0 = g$ ، و عليه لمعرفة إن كانت دافعة أرخميدس مهملة نقارن بين a_0 و g ، إذا كان $a_0 = g$ فإن دافعة أرخميدس مهملة ، أما إذا $a_0 \neq g$ فإن دافعة أرخميدس غير مهملة .

▪ الحالة : دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ مهملتين :

- يسمى السقوط في هذه الحالة **سقوط حر** .
- السقوط الحر هو كل سقوط تهمل فيه كل تاثيرات الهواء (دافعة أرخميدس وقوة الاحتكاك) .
- في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g \rightarrow a = g}$$

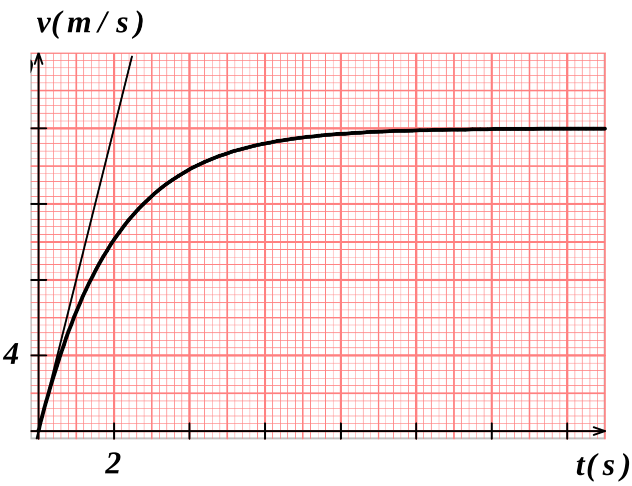
- الجسم (S) خلال السقوط الحر خاضع إلى تأثير ثقله فقط و هي قوة ثابتة ، إذن الحركة خلال السقوط الحر مستقيمة متسارعة بانتظام ،تسارعها $a = g$.
- المنحنى $v = f(t)$ في السقوط الحر هو مستقيم يمر من المبدأ كما في في البيان المقابل :



التمرين (13) : (التمرين : 018 في بنك التمارين على الموقع) (*)

قام فوج من التلاميذ في حصة للأعمال المخبرية بدراسة السقوط الشاقولي لجسم صلب (S) في الهواء كتلته $m = 19\ g$ و حجمه $V = 2,71 . 10^{-3}\ m^3$ و ذلك باستعمال كاميرا رقمية (Webcam) ، عولج شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" بجهاز الإعلام الآلي فتحصلوا على البيان $v = f(t)$ الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل) .

يعطى : $g = 9,8\ m/s$ ، ، $\rho = 1,29\ kg/m^3$ و نعتبر $f = kv$.



1- حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي و الدائم . علل .

2- بالاعتماد على البيان عين :

أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط .

ب- تسارع الحركة في اللحظة $t = 0$ ، و عند اللحظة $t = 12\ s$ ؟

3- بين أن المعادلة التفاضلية لحركة (S) تعطى بالعبارة :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g(1 - \frac{\rho V}{m})$$

حيث : ρ الكتلة الحجمية للهواء ، V حجم الجسم (S) .

4- أثبت أن السرعة الحدية v_{lim} تعطى بالعبارة : $v_{lim} = \frac{g}{k}(m - \rho V)$.

5- أحسب بطريقتين مختلفتين معامل الاحتكاك k .

6- نعتبر دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء مهملتين :

أ- كيف نسمي هذا السقوط ، عرفه .

ب- توقع شكل مخطط السرعة في هذه الحالة .

الأجوبة :

1- طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) :

النظام الانتقالي :

المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن خط منحني ، و بما أن السرعة متزايدة تكون طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة من دون انتظام .

النظام الدائم :

المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، إذن طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة .

2- أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط :

من البيان مباشرة : $v_\ell = 16$ m/s ، $\tau = 2$ s .

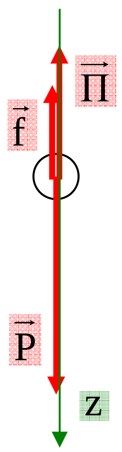
ب- تسارع الحركة في اللحظتين $t = 0$ ، $t = 12$ s :

تسارع الحركة في لحظة t مساوي لميل مماس المنحنى $v = f(t)$ عند هذه اللحظة ، لذا يكون :

- $t = 0 \rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16}{2} = 8.0 \ m/s^2$
- $t = 12$ s $\rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$ (نظام دائم)

3- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بإسقاط العلاقة الشعاعية وفق المحور (zz') :

$$P - \Pi - f = m a$$

$$m.g - \rho V.g - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + k v = m g - \rho V.g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g - \frac{\rho V}{m}.g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g(1 - \frac{\rho V}{m})$$

4- عبارة v_{lim} :

في النظام الدائم يكون : $v = v_{lim}$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$0 + \frac{k}{m} v_{lim} = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)$$

$$v_{lim} = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right) \rightarrow v_{lim} = \frac{g}{k}\left(m - m\frac{\rho V}{m}\right) \rightarrow v_{lim} = \frac{g}{k}(m - \rho V)$$

5- قيمة k :

طريقة 1 :

$$\tau = \frac{m}{k} \rightarrow k = \frac{m}{\tau}$$

وجدنا سابقا : $\tau = 2\ s$ و منه :

$$k = \frac{19.10^{-3}}{2} = 9{,}5.10^{-3}\ kg/s$$

طريقة 2 :

مما سبق :

$$v_{lim} = \frac{g}{k}(m - \rho V) \rightarrow k = \frac{g}{v_{lim}}(m - \rho V)$$

$$k = \frac{9{,}8}{16}(19.10^{-3} - 1{,}29 . 2{,}71.10^{-3}) \approx 9{,}5.10^{-3}\ kg/s$$

6-أ- يسمى هذا السقوط بالسقوط الحر .

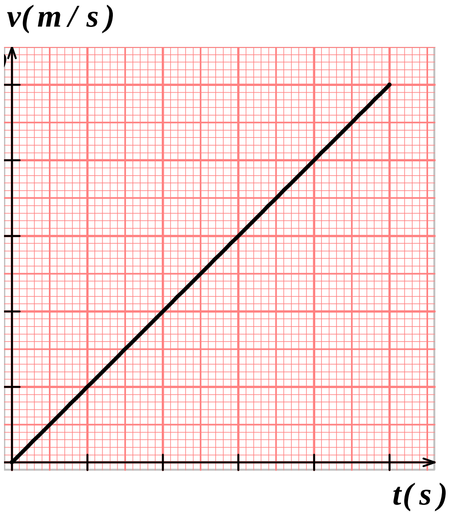
تعريفه : هو سقوط تهمل فيه كل تأثيرات الهواء و يخضع فيه الجسم إلى تأثير ثقله فقط .

ب- مخطط السرعة :

بالاعتماد على المعادلة التفاضلية السابقة مع إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء يكون :

$$\frac{dv}{dt} = g \rightarrow a = g$$

g ثابت و منه a ثابت ، إذن الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام دون سرعة ابتدائية و عليه يكون :

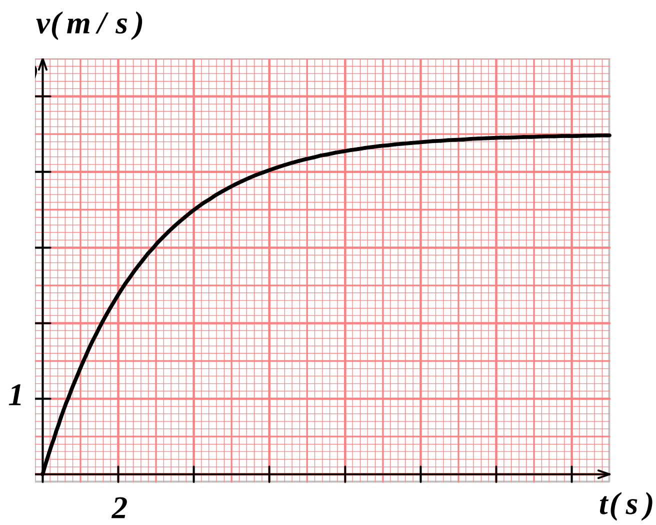


التمرين (14): (التمرين : 019 في بنك التمارين على الموقع) (*)

عند اللحظة $t = 0$ و بدون سرعة ابتدائية ، يسقط شاقوليا مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100\ kg$ فيبلغ سرعة ثابتة حدية قيمتها $v_\ell = 4.5\ m.s^{-1}$ ، نهمل خلال السقوط دافعة أرخميدس أمام القوى الأخرى المطبقة على المظلي و تجهيزه ، نعتبر أن قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على المظلي من الشكل $f = k\,v^2$.

يعطى : $g = 9.8\ m/s^2$

المنحنى البياني التالي يمثل تغيرات سرعة (المظلي و مظلته) بدلالة الزمن .



1- أكتب المعادلة التفاضلية التي تعبر عن سرعة حركة مركز عطالة المظلي و تجهيزه .

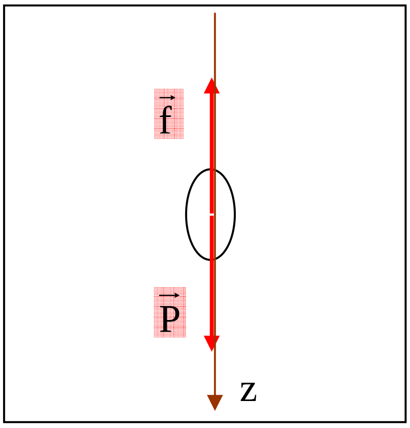
2- فسر لماذا يمكن للسرعة أن تصبح ثابتة (وجود نظامين)

3- جِد قيمة المعامل k الذي يتدخل في قوة الاحتكاك .

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : المظلي و تجهيزه .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G \qquad \rightarrow\ \vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oz) الشاقولي يكون :

$$P - f = m\,a$$

$$m\,g - kv^2 = ma$$

$$m\,g - k\,v^2 = m\frac{dv}{dt} \rightarrow m\frac{dv}{dt} + k\,v^2 = m\,g \quad \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

2- تفسير الحركة المستقيمة المنتظمة (ثبات السرعة) :

في اللحظة $t = 0$ يخضع (المظلي مع تجهيزه) إلى قوة ثقله فقط ($v = 0 \rightarrow f = kv^2 = 0$) ، هذا يجعله ينطلق نحو بحركة مستقيمة متسارعة ، و أثناء ذلك تزداد شدة قوة الاحتكاك (نظام انتقالي) ، حتى تصبح شدتها مساوية لشدة الثقل و عندئذ تصبح محصلة القوى معدومة و بالتالي التسارع معدوم و الحركة مستقيمة منتظمة (نظام دائم) .

3- قيمة k :

في النظام الدائم يكون $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{k}{m}v_\ell^{\,2} = g \quad \rightarrow k = \frac{mg}{v_\ell^{\,2}}$$

من البيان : $v_\ell = 4{,}5\ m/s$ و منه :

$$k = \frac{100 .\ 9{,}8}{(4{,}5)^2} = 48{,}4\ kg/m$$

التمرين (15) : (التمرين : 020 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جسم صلب (S) كتلته $m = 20\ g$ ، يترك ليسقط في الهواء دون سرعة ابتدائية عند اللحظة $t = 0$ وفق محور شاقولي $(\overrightarrow{oz})$ موجه نحو الأسفل ، مبدؤه يوافق مبدأ الأزمنة $t = 0$. نعتبر أن الجسم (S) يخضع أثناء حركته لقوة احتكاك $\vec{f} = -k\vec{v}$ حيث k ثابت يمثل معامل الاحتكاك ، يعطى $g = 10\ m/s^2$.

1- مثل القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الكرية خلال مراحل السقوط .

2- كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي و دائم ؟

3- أ- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة البالون G في معلم عطالي و بفرض أن دافعة أرخميدس غير مهملة ، بين أن المعادلة التفاضلية للسرعة تكتب على الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + Av = B$$

حيث A و B ثوابت يطلب كتابة عبارتيهما .

ب- ما هو المدلول الفيزيائي للثابت B ؟

جـ- حدد وحدة الثابت k باستعمال التحليل البعدي .

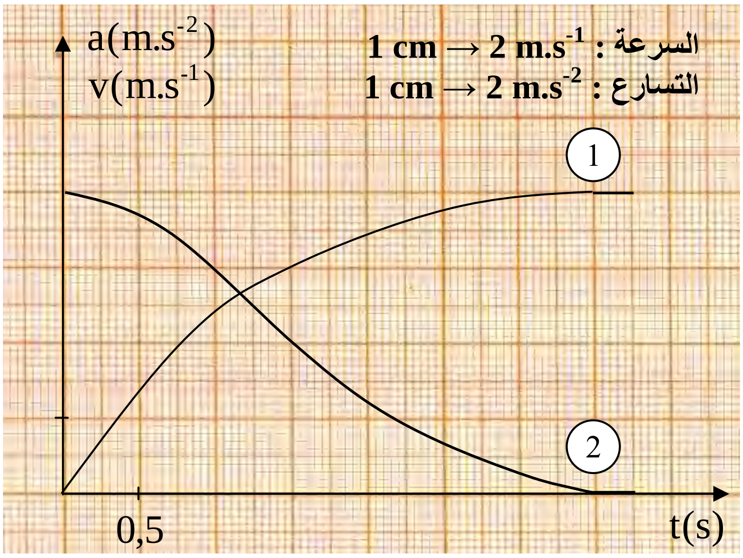
4- سمحت كاميرا رقمية بمتابعة حركة الكرية و عولج شريط الصور الملتقطة ببرمجية مكنتنا من الحصول على البيانين $a = h(t)$ و $v = f(t)$.

أ- أي المنحنيين يمثل تطور السرعة $v(t)$ بدلالة الزمن و أيهما يمثل تطور التسارع $a(t)$ ؟ علل .

ب- حدد بيانيا السرعة الحدية v_{lim} ، و التسارع a_0 عند اللحظة $t = 0$.

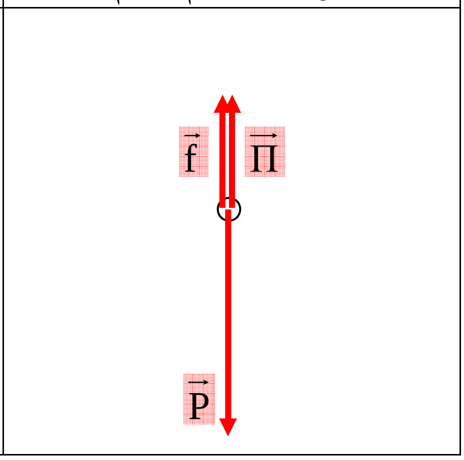
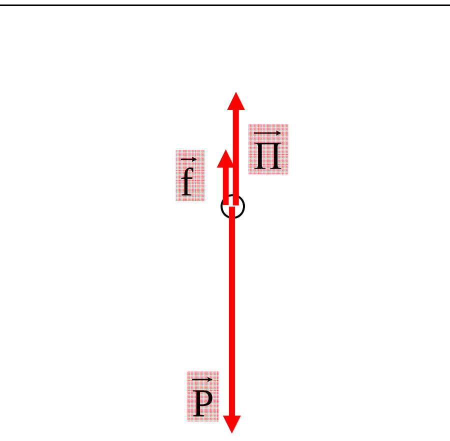
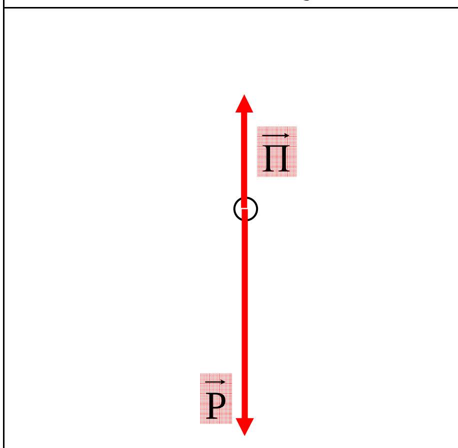
جـ- أثبت أندافعة ارخميدس غير مهملة .

5- استنتج شدة قوة دافعة أرخميدس Π و معامل الاحتكاك k و الزمن المميز للسقوط τ .



الأجوبة :

1- تمثيل القوى الخارجية خلال مراحل السقوط :

مرحلة النظام الدائم	المرحلة الانتقالية	مرحلة الانطلاق
		

2- للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي و دائم يجب أن تكون مقاومة الهواء معتبرة و هذا يتحقق عندما يتميز الجسم (S) بعدة مميزات منها : خفيف ، شكله غير انسيابي .

3- المعادلة التفاضلية بدلالة السرعة $v(t)$:

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبرع غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\Pi} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oz) يكون :

$$P - f - \Pi = m\,a$$
$$m.g - k.v + \Pi = m\frac{dv}{dt}$$
$$m\frac{dv}{dt} + k.v = mg + \Pi \;\rightarrow\; m\frac{dv}{dt} + k.v = mg + \rho Vg$$
$$m\frac{dv}{dt} + k.v = mg(1 - \frac{\rho V}{m}) \;\rightarrow\; \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g(1 - \frac{\rho V}{m})$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة يكون : $A = \frac{k}{m}$ ، $B = g(1 - \frac{\rho V}{m})$.

ب- المدلول الفيزيائي لـ B :

عند اللحظة $t = 0$ يكون $v = 0$ ، $\frac{dv}{dt} = a_0$ ، بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$a_0 + A(0) = B \rightarrow B = a_0$$

إذن المدلول الفيزيائي لـ B هو قيمة التسارع الابتدائي a_0 عند اللحظة $t = 0$.

جـ- وحدة k :

$$f = kv \rightarrow k = \frac{f}{v} \rightarrow [k] = \frac{[f]}{[v]}$$

حسب القانون الثاني لنيوتن :

$$F = m.a \rightarrow [F] = [m].[a]$$

و منه :

$$[k] = \frac{[M][a]}{[v]} = \frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s}} \rightarrow [k] = kg/s$$

4- أ- المنحنى الذي يمثل $v(t)$ و المنحنى الذي يمثل $a(t)$:

الجسم (S) ترك عند اللحظة $t = 0$ دون سرعة ابتدائية ، أي :

$$t = 0 \rightarrow v = 0$$

و هذا يتفق مع المنحنى (1) ، إذن :
المنحنى (1) ← $v(t)$.
المنحنى (2) ← $a(t)$.

ب- قيمة v_ℓ ، a_0 :
- من المنحنى (1) الموافق لـ $v(t)$:

$$v_{lim} = 4 \,.\, 2 = 8 \text{ m/s}$$

- من المنحنى (2) الموافق لـ $a(t)$:

$$a_0 = 4 \,.\, 2 = 8 \text{ m/s}$$

جـ- إثبات أن دافعة أرخميدس غير مهملة :
مما سبق : $a_0 \neq 0$ ، هذا يعني أن الجسم (S) عند اللحظة $t = 0$ لا يخضع فقط إلى تأثير قوة ثقله ، إنما هناك قوة أخرى هي دافعة أرخميدس علما أن شدة قوة الاحتكاك معدومة عند هذه اللحظة كون أن السرعة معدومة ، إذن دافعة أرخميدس غير مهملة .

5- قيمتي Π ، k :
مما سبق يمكن كتابة :

$$mg - f\,v - \Pi = m\,a$$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا : $a = a_0 = 8\,m/s^2$ ، $v = 0$ بالتعويض :

$$mg - f\,(0) - \Pi = m\,a_0$$
$$mg - \Pi = m\,a_0 \rightarrow \Pi = mg - m\,a_0 \rightarrow \Pi = m(\,g - a_0\,)$$
$$\Pi = 20 \,.\, 10^{-3}\,(\,10 - 8) = 4 \,.\, 10^{-2}\text{ N}$$

قيمة k :
- مما سبق يمكن أيضا كتابة :

$$mg - k.v - \Pi = ma$$

- في النظام الدائم : $a = 0$ ، $v = v_\ell$ ، بالتعويض :

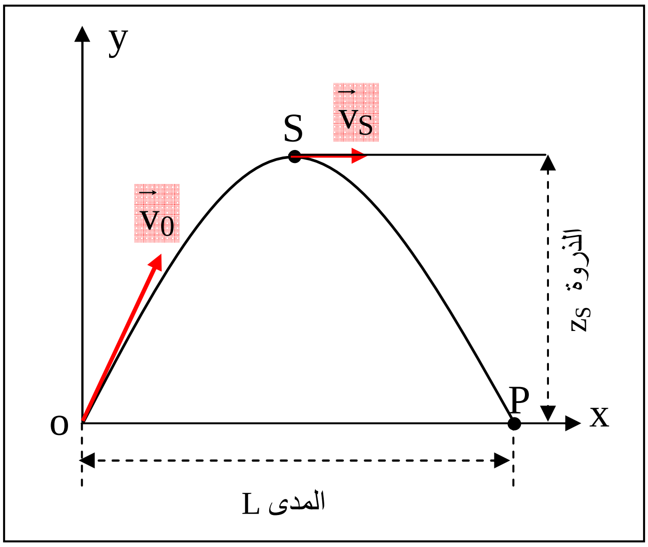
$$mg - k.v_\ell - \Pi = 0 \rightarrow mg - \Pi = kv_\ell$$

$$k = \frac{mg - \Pi}{v_\ell} \rightarrow K = \frac{(20.10^{-3}\,.10) - 4.10^{-2}}{8} = 2.10^{-2}\text{ Kg/s}$$

قيمة τ :

$$\tau = \frac{m}{K} = \frac{20.10^{-3}}{2.10^{-2}} = 1\,s$$

V – حرقة القذيفة



● الذروة و المدى :

- من موضع (o) نعتبره مبدأ الاحداثيات في معلم مستوي $(O , \vec{i} , \vec{j})$ ، نقذف جسم صلب (S) في اللحظة $t = 0$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ ، يصنع شعاعها الزاوية α مع المحور ox (الشكل) . نعتبر قوى الاحتكاك و دافعة أرخميدس مهملة .
- الذروة هي أعظم ارتفاع يبلغه الجسم الصلب (الموضع S). و الذي يكون عنده شعاع السرعة أفقيا ، إذن عند بلوغ الذروة يتحقق :

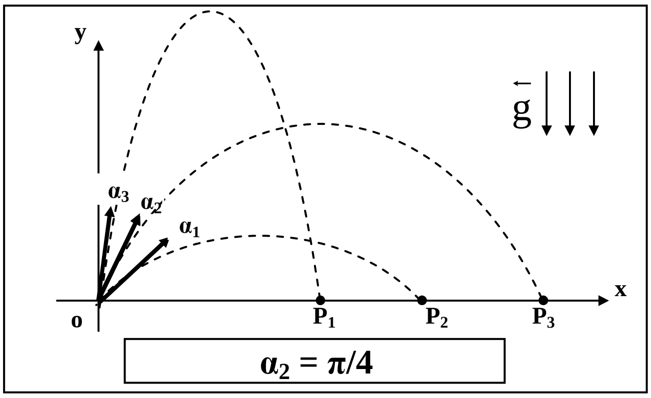
$$\boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = 0}$$

- المدى L هو المسافة الأفقية بين موضع القذف o و موضع سقوط القذيفة على المستوي الأفقي المار من موضع القذف o ، و اعتمادا على الشكل السابق نكتب :

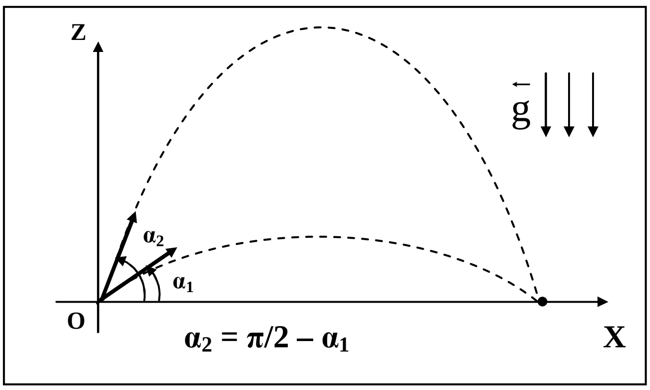
$$\boxed{L = x_P}$$

ملاحظة- 1 :

- من أجل قيمة محددة للسرعة الإبتدائية v_0 ، يكون المدى أعظميا لما $\sin(2\alpha) = 1$ أي $\alpha = 45°$ كما مبين في الشكل التالي :



- نحصل على نفس المدى من أجل الزاويتين α ، $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ كما مبين في الشكل التالي :

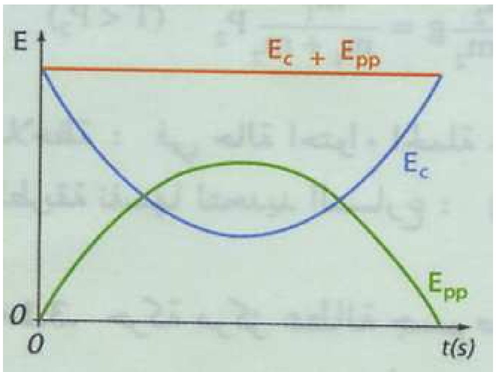


● طاقة الجملة (قذيفة + أرض) :

- طاقة الجملة (قذيفة + أرض) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي تتضمن طاقة حركية $E_c=\frac{1}{2}mv^2$ و طاقة كامنة ثقالية $E_{PP}=mgz$ ، ففي حقل منتظم للجاذبية g يعبر عن طاقة الجملة (قذيفة + أرض) بالعلاقة :

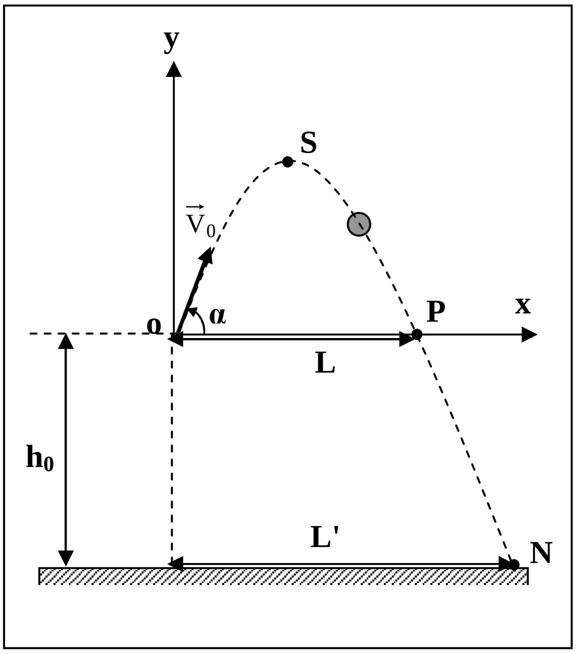
$$\boxed{E=\frac{1}{2}mv^2+mgz}$$

- الدراسة التجريبية لتطور كل من الطاقة الحركية E_C و الطاقة الكامنة E_P و كذا الطاقة الكلية $E = E_C + E_P$ للجملة (قذيفة + أرض) في الحالة التي تكون فيها قوى الإحتكاك مهملة أعطت البيانات الموضحة في الشكل التالي :



التمرين (16) : (التمرين : 023 في بنك التمارين على الموقع) (*)

من نقطة o تقع على ارتفاع $h_0 = 5\ m$ من سطح الأرض نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة (S) كتلتها m بسرعة ابتدائية $v_0 = 20\ m.s^{-1}$ يصنع شعاعها الزاوية $\alpha = 60°$ ، تهمل كل قوى الاحتكاك و كذا دافعة أرخميدس ، نعتبر مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة o .



1- أدرس طبيعة حركة الكرة .

2- أكتب المعادلات الزمنية $v_x(t)$ ، $v_y(t)$ ، $x(t)$ ، $y(t)$ ، مثل مخططات الحركة بشكل كيفي .

3- أكتب معادلة المسار و بين طبيعته .

4- أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .

5- أحسب المسافة الأفقية L بين الموضع P و كذا الزمن اللازم لذلك .

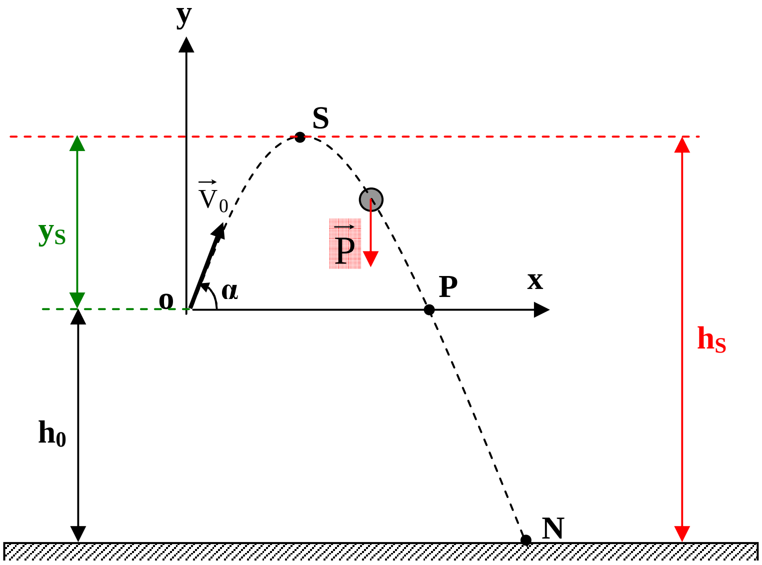
6- أحسب المسافة الأفقية L' بين موضع سقوط الكرة على الأرض و المحور oy .

7- أحسب سرعة الكرة عند المواضع S ، P ، N ، و كذا الزاوية التي يصنعها شعاع كل سرعة مع المحور ox ، مثل كل هذه الأشعة على الشكل .

يعطى : $\cos 60° = 0.5$ ، $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan 60° = \sqrt{3}$ ، $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

1- طبيعة الحركة :



- الجملة المدروسة : كرة (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ P_y = m\,a_y \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_y \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_y \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

إذن :
- مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .
- مسقط حركة الكرة على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- المعادلات الزمنية :

اعتمادا على ما سبق :

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = a_y\,t + v_{0y} \end{cases}$$

لدينا :

$a_y = - g$

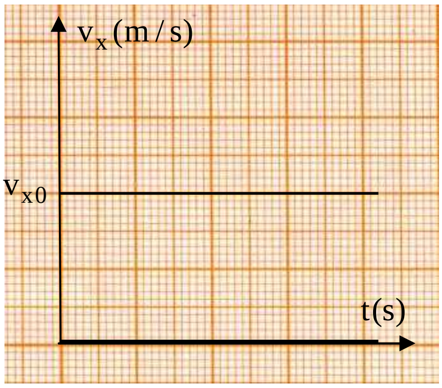
و من الشروط الابتدائية :

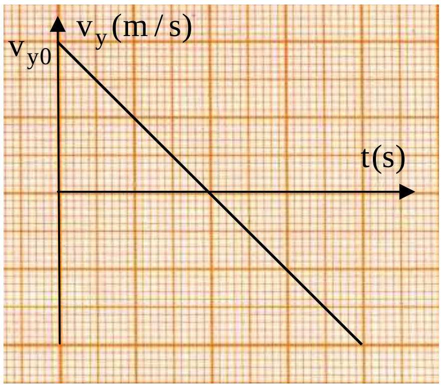
$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

يصبح :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = - g\, t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

- بيانيا :





<u>تطبيق عددي :</u>

$$\begin{cases} v_x = 10 \\ v_y = -10\, t + 10\sqrt{3} \end{cases}$$

لدينا أيضا :

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t + x_0 \\ y = a_y\, t^2 + v_{0y}\, t + y_0 \end{cases}$$

بالإعتماد على ما سبق :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0 \end{cases}$$

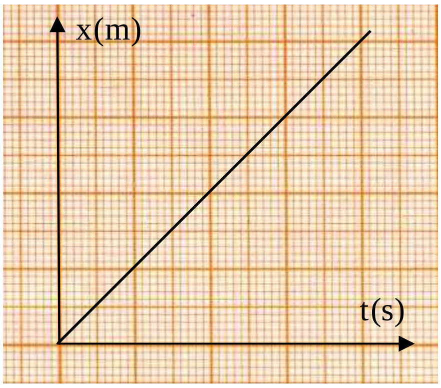
من الشروط الابتدائية :

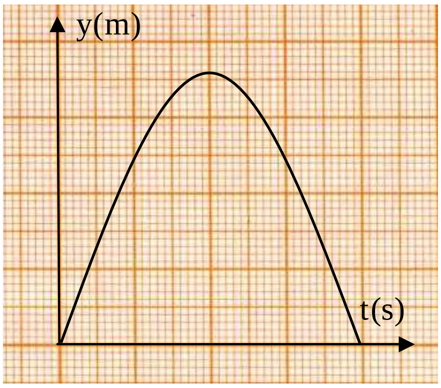
$$t = 0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

- بيانيا :





تطبيق عددي :

$$\begin{cases} x = 10\,t \\ y = -5\,t^2 + 10\sqrt{3}\,t \end{cases}$$

3- معادلة المسار و طبيعته :

من المعادلة $x = f(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

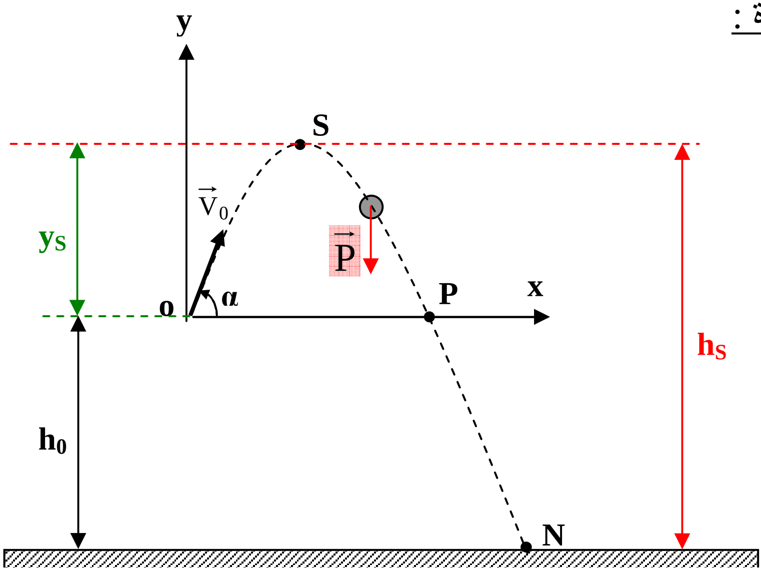
$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x$$

معادلة المسار هي من الشكل $y = ax^2 + bx + c$ و هي معادلة قطع مكافيء ، إذن مسار الكرة (S) عبارة عن قطع مكافيء .

تطبيق عددي :

$$y = -0.05\,x^2 + \sqrt{3}\,x$$

4- أقصى ارتفاع تبلغه الكرة :



$h_S = y_S + h_0$ .... (1)

عند (S) أي عند الذروة يكون $v_{yS} = 0$.

بالتعويض في العبارة $v_y(t)$ نجد :

$0 = -10\,t_S + 10\sqrt{3}$

$10\,t_S = 10\sqrt{3} \rightarrow t_S = \sqrt{3}\ s$

بالتعويض في عبارة $y(t)$:

$y_S = -5(\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{3}\,(\sqrt{3})) = 15\ m$

ومن العلاقة (1) يصبح :

$h_S = 15 + 5 = 20\ m$

و هو أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .

5- المسافة الأفقية L :

$L = x_P$

عند بلوغ الموضع (P) يكون : $y_P = 0$ ، بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$0 = -0.05\,x_P^2 + \sqrt{3}\,x_P \rightarrow 0.05\,x_P^2 = \sqrt{3}\,x_P$

$0.05\,x_P = \sqrt{3} \rightarrow x_P = \dfrac{\sqrt{3}}{0.05} = 20\sqrt{3}\ m$

- الزمن اللازم لبلوغ الموضع P :

لدينا : $x_P = 20\sqrt{3}$ بالتعويض في العبارة $x(t)$ يكون :

$20\sqrt{3} = 10\,t_P \rightarrow t_P = 2\sqrt{3}$

6- المسافة الأفقية 'L :

لدينا : $y_N = -h_0 = -5$ بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$-5 = -0.05\,x_N^2 + \sqrt{3}\,x_N$

$0.05\,x_n^2 - \sqrt{3}\,x_N - 5 = 0$

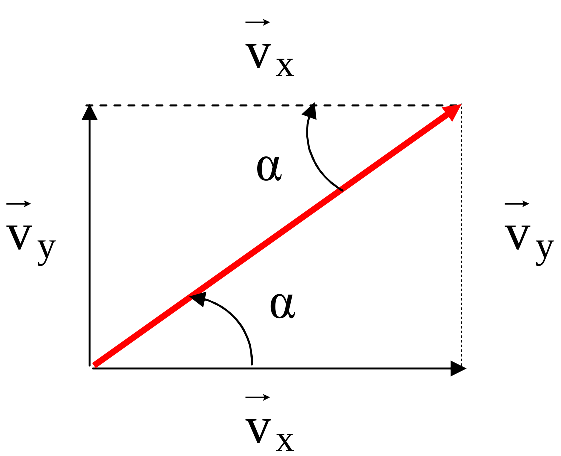
$\Delta = 4 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$x_{N1} = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2.0.05} = -2.68\ m$ (مرفوض)

$x_{N2} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2.0.05} = 37.32\ m$ (مقبول)

إذن المسافة الأفقية بين موضع سقوط الكرة على الأرض (N) و المحور (oy) هي 37.32 m .

7- سرعة الكرة عند المواضع S ، P ، N و كذا الزاوية التي يصنعها شعاع السرعة مع المحور ox :



- $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- $\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$ (من الشكل)

<u>عند الموضع (S) :</u>

لدينا : $t_S = \sqrt{3}\,s$ بالتعويض في $v(t)$:

$$\vec{v}_S \begin{cases} v_{xS} = 10\ m/s \\ v_{yS} = -10(\sqrt{3}) + 10\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$v_S = \|\vec{v}_S\| = \sqrt{(10)^2 + (0)^2} = 10\ m/s$$

- $\tan(\alpha_S) = \dfrac{v_{yS}}{v_{xS}} = \dfrac{0}{10} = 0 \rightarrow \alpha_S = 0$

<u>عند الموضع (P) :</u>

لدينا : $t_S = 2\sqrt{3}\,s$ بالتعويض في في $v(t)$:

$$\vec{v}_P \begin{cases} v_{xP} = 10\ m/s \\ v_{yP} = -10(2\sqrt{3}) + 10\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\ m/s \end{cases}$$

$$v_P = \|\vec{v}_P\| = \sqrt{(10)^2 + (-10\sqrt{3})^2} = 20\ m/s$$

- $\tan(\alpha_P) = \dfrac{v_{yP}}{v_{xP}} = \dfrac{|-10\sqrt{3}|}{10} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha_S = 60°$

<u>عند الموضع (N) :</u>

نحسب أولا الزمن اللازم لبلوغ الموضع (N) .

- لدينا $x_N = 37.32\ m$ بالتعويض في $x(t)$:

$$37.32 = 10\ t_N \rightarrow t_N = 3.73\ s$$

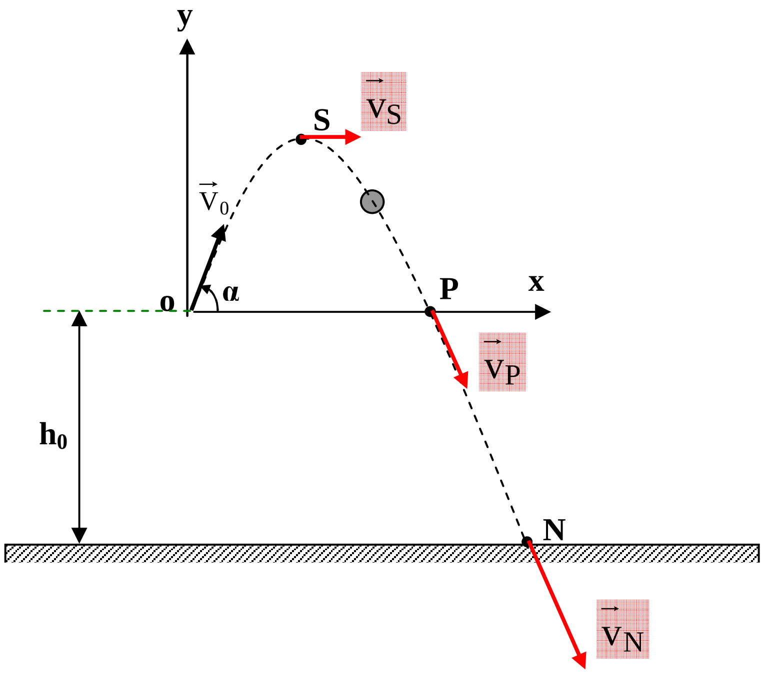
بالتعويض في $v(t)$:

$$\vec{v}_N \begin{cases} v_{xN} = 10\ m/s \\ \end{cases}$$

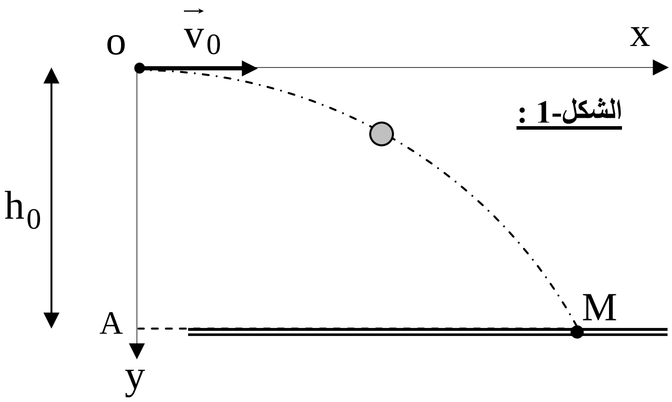
$$v_{yN} = -10(3.73) + 10\sqrt{3} \approx -20\ m/s$$

$$v_N = \|\vec{v}_N\| = \sqrt{(10)^2 + (-20)^2} = 22.36\ m/s$$

$$\tan(\alpha_N) = \frac{v_{yN}}{v_{xN}} = \frac{|-20|}{10} = 2 \rightarrow \alpha_N = 70°$$



التمرين (17) : (التمرين : 024 في بنك التمارين على الموقع) (*)

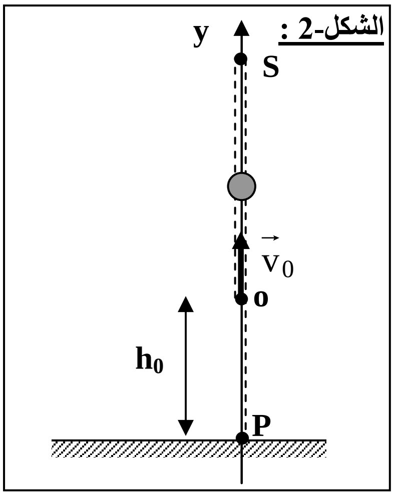


1- من نقطة o نعتبرها مبدأ الإحداثيات تقع على ارتفاع $h_0 = 1.25\ m$ من سطح الأرض ، نقذف افقيا عند اللحظة $t = 0$ كرة (S) مركز عطالته G بسرعة ابتدائية $v_0 = 20\ m/s$ ، فيسقط باتجاه النقطة M من سطح الأرض (الشكل-1) ، نهمل تأثيرات الهواء على الجسم (S) .

أ- أدرس طبيعة حركة مركز عطالة الكرة (S) في المعلم $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy})$.

ب- أوجد المعادلتين الزمنيتين x(t) و y(t) ثم استنتج معادلة المسار .

جـ- حدد المسافة الأفقية AM و سرعة الكرة عند الموضع M .



2- من نفس النقطة (o) السابقة و التي نعتبره مبدأ للفواصل و تقع على ارتفاع $h_0 = 5\ m$ من سطح الأرض نقذف كرة (S) شاقوليا نحو الأعلى عند اللحظة $t = 0$ بسرعة إبتدائية $v_0 = 10\ m/s$ (الشكل-2) .

أ- أدرس حركة مركز عطالة الكرة في المعلم $(\overrightarrow{oy})$ معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة قذف الكرة و إهمال تأثير الهواء .

ب- أوجد المعادلتين الزمنيتين للحركة $v_y(t)$ ، $y(t)$.

جـ- حدد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة الأرض .

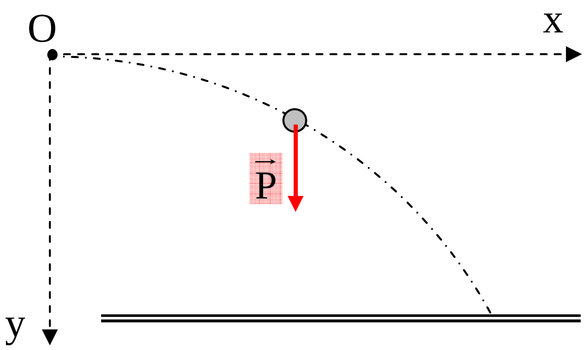
د- أحسب لحظة اصطدام الكرة بالأرض ، ثم استنتج سرعتها عندئذ .

يعطى : $g = 10\ m/s^2$

الأجوبة :

1- أ- دراسة طبيعة الحركة :

- الجملة المدروسة : جسم صلب (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

إذن :

- مسقط حركة مركز عطالة الكرة (S) على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .
- مسقط حركة مركز عطالة الكرة (S) على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام (متسارعة) .

1- أ- المعادلتين الزمنيتين x(t) ، y(t) :

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = a_y\, t + v_{0y} \end{cases}$$

لدينا :

$$a_y = g$$

و من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = g\, t \end{cases}$$

و لدينا أيضا :

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t + x_0 \\ y = a_y\, t^2 + y_0 \end{cases}$$

بالاعتماد على ما سبق :

$$\begin{cases} x = v_0\, t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} g\, t^2 + y_0 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\begin{cases} x = v_0\, t \\ y = \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

ب- معادلة المسار :

من المعادلة x = f(t) :

$$t = \frac{x}{v_0}$$

بالتعويض في y(t) :

$$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{g}{2{v_0}^2} x^2$$

جـ- المسافة الأفقية AM :

$AM = x_M$

لدينا : $y_M = h = 1.25$ ، بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$h = \frac{g}{2{v_0}^2}(AM)^2 \quad \rightarrow \quad AM = \sqrt{\frac{2{v_0}^2.h}{g}} \quad \rightarrow \quad AM = \sqrt{\frac{2\ .20^2\ .1.25}{10}} = 10\ m/s$$

سرعة الكرة عن الموضع M :

- نحسب أولا الزمن اللازم لبلوغ الموضع M :
- لدينا : $x_M = 10\ m$ بالتعويض في العلاقة $x(t)$ يكون :

$$x_M = AM = v_0\, t_M \rightarrow t_M = \frac{x_M}{v_0} \rightarrow t_M = \frac{10}{20} = 0.5s$$

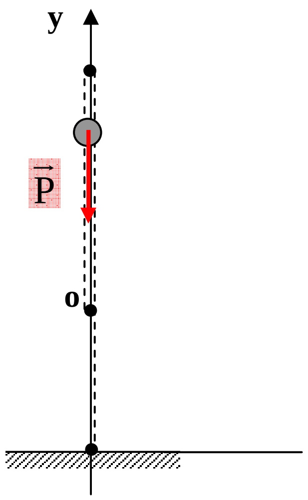
بالتعويض في عبارتي $v_x(t)$ ، $v_y(t)$:

$$\begin{cases} v_{Mx} = 20\ m/s \\ v_{My} = 10\,.\,0,5 = 5\ m/s \end{cases}$$

و منه :

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(20)^2 + (5)^2} = 20,62\ m/s$$

2- أ- دراسة طبيعة الحركة :



- الجملة المعتبرة : جسم صلب .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا خلال مدة السقوط .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : ثقل الجسم الصلب $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور oz :

$$- P = m\, a_z$$

$$- m.g = m\, a_y \quad \rightarrow \quad a_y = -\, g$$

كون أن g ثابت يكون تسارع الجسم (S) ثابت ، و بما أن مساره مستقيم ، فالحركة إذن مستقيمة متغيرة بانتظام .

ب- المعادلات الزمنية للحركة $v_y(t)$ ، $y(t)$ ، كذا معادلة المسار $y(x)$:

لدينا :

$$a_y = -\, g$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$v_y = -\, g\, t + C$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \ \rightarrow\ v_y = v_0$$

بالتعويض :

$$v_0 = -\, g(0) + C \ \rightarrow\ C = v_0$$

و منه تصبح معادلة السرعة :

$$\boxed{v_y = - g\, t + v_0}$$

- نكامل طرفي $v_y(t)$ بالنسبة للزمن فنجد :

$$y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 t + C'$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow y = 0$$

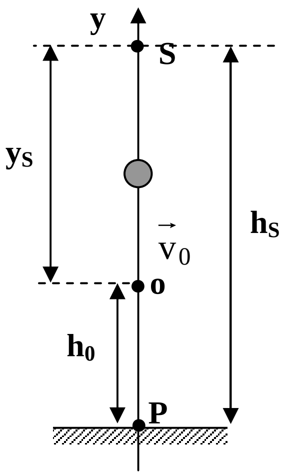
بالتعويض :

$$0 = -\frac{1}{2} g\, (0)^2 + v_0 (0) + C' \quad \rightarrow \quad C' = 0$$

يصبح :

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 t}$$

جـ- أقصى ارتفاع تبلغ الكرة :



$$h_S = h_0 + y_S$$

تبلغ الكرة أقصى ارتفاع في الموضع (S) لذا يكون : $v_{yS} = 0$ ، بالتعويض في $v_y(t)$:

$$v_{yS} = - g.t_S + v_0$$

$$0 = - 10\, t_S + 10$$

$$10\, t_S = 10 \rightarrow t_S = 1\ s$$

بالتعويض في $y(t)$ نجد :

$$y_S = -\frac{1}{2} g t_S^2 + v_0 t_S$$

$$y_S = (0.5 \,.\, 10 \,.\, (1)^2) + (10 \,.\, 1) = 5\ m$$

إذن :

$$h_S = 5 + 5 = 10\ m$$

▪ **يمكن الحصول على نفس النتيجة بتطبيق مبدا انحفاظ الطاقة .**

د- لحظة اصطدام الكرة بالأرض عند P :

لدينا $y_P = - h_0 = - 5\ m$ ، بالتعويض في $y(t)$:

$$y_P = -\frac{1}{2} g t_P^2 + v_0 t_P$$

$$- 5 = - 0.5 \,.\, 10\, t_P^2 - 10 t_P$$

$$5 t_P^2 - 10 t_P - 5 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - (4 \,.\, 5\, (-5)) = 200 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 200 = 10\sqrt{2}$$

▪ $t_{P1} = \dfrac{10 - 10\sqrt{2}}{10} = 1 - \sqrt{2} = 0.41 s$ (مرفوض)

▪ $t_{P1} = \dfrac{10 + 10\sqrt{2}}{10} = 1 + \sqrt{2} = 2.41 s$

- سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض عند P :

لدينا $t_P = 2.41\ s$ بالتعويض $v_y(t)$:

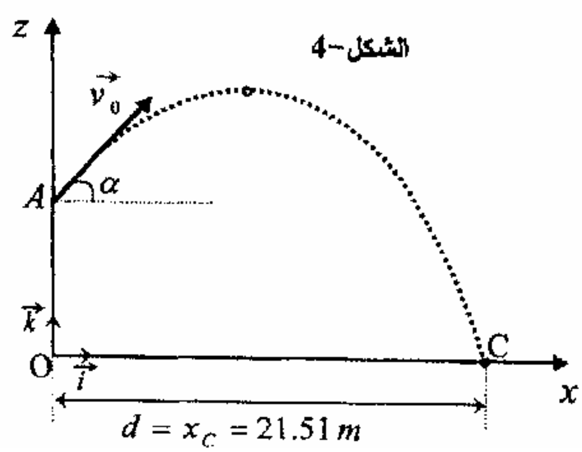
$v_{yP} = -10t_P + 10$

$v_{yP} = -10\ (2.4) + 10 = -14.1\ m/s$

التمرين (18) : (بكالوريا 2012 - علوم تجريبية) (التمرين : 067 في بنك التمارين على الموقع) (*)

خلال منافسة رمي الجلة في الألعاب الأولمبية ببكين ، حقق الرياضي الذي فاز بهذه المنافسة النتيجة $d = 21.51\ m$ اعتمادا على الفيلم المسجل لعملية الرمي و لأجل معرفة السرعة v_0 التي قذفت بها الجلة ، تم استخراج بعض المعطيات أثناء لحظة الرمي :

قذفت الجلة من النقطة A الواقعة على ارتفاع $h_A = 2.00\ m$ بالنسبة لسطح الأرض و بالسرعة $\vec{v}_0$ التي تصنع الزاوية $\alpha = 45°$ مع الخط الأفقي (الشكل-4) .



ندرس حركة الجلة في المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{k})$ و نختار اللحظة الابتدائية $t = 0$ هي اللحظة التي يتم فيها قذف الجلة من النقطة A .

نهمل احتكاكات الجلة مع الهواء و دافعة أرخميدس بالنسبة لقوة ثقل الجلة .

1- جد المعادلتين $x = f(t)$ و $z = h(t)$ المميزتين لحركة الجلة في المعلم المختار ، ثم استنتج معادلة مسار الجلة $z = g(x)$ بدلالة المقادير h_A ، α ، g و v_0 .

2- جد معادلة السرعة الابتدائية v_0 بدلالة h_A ، α ، g و d ، ثم احسب قيمتها .

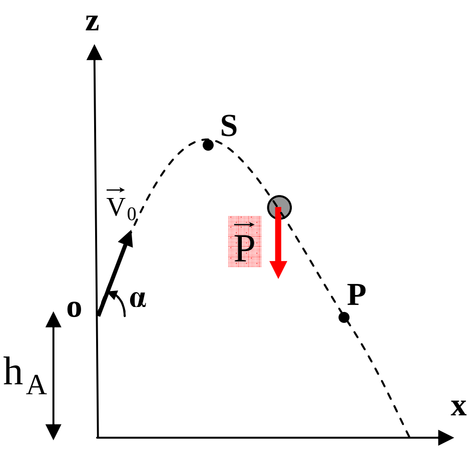
3- جد المدة الزمنية التي تستغرقها الجلة في الهواء .

تعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$.

الأجوبة :

1- المعادلتين $x(t)$ ، $z(t)$ و معادلة المسار :

- الجملة المدروسة : كرة (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oz) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_z \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

- مسقط حركة الجلة على المحور ox هو حركة مستقيمة منتظمة .
- مسقط حركة الجلة على المحور oy هو حركة مستقيمة متغيرة بانتظام
اعتمادا على ما سبق :

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = a_y\, t + v_{0y} \end{cases}$$

لدينا :

$$a_y = -g$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\, t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

و لدينا أيضا :

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t + x_0 \\ y = a_y\, t^2 + v_{0y}\, t + y_0 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h_A \end{cases}$$

يصبح :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ z = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h_A \end{cases}$$

من المعادلة $x = f(t)$: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ بالتعويض في $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) + h_A$$

$$z = -\frac{g}{2 v_0^{\,2} \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x + h_A$$

<u>2- عبارة السرعة الابتدائية بدلالة h_A ، α ، g ، d و حساب قيمتها :</u>

لدينا :

$$x = d \rightarrow z = 0$$

بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$0 = -\frac{g}{2 v_0^{\,2} \cos\alpha^2} d^2 + \tan\alpha . d + h_A$$

$$\frac{g}{2 v_0^{\,2} \cos\alpha^2} d^2 = \tan\alpha . d + h_A$$

$$2\,v_0^2\cos\alpha^2\,(\tan\alpha\,.\,d+h_A)=g\,.\,d^2$$

$$2\,v_0^2\cos\alpha^2=\frac{g\,.\,d^2}{\tan\alpha\,.\,d+h_A}\quad\rightarrow\quad v_0=\sqrt{\frac{g\,.\,d^2}{2\cos\alpha^2\,(\tan\alpha\,.\,d+h_A)}}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{9.8\,.\,(21.51)^2}{2\,(\cos45)^2\,.\,((\tan45\times21.5)+2)}}=13.89\ \text{m/s}$$

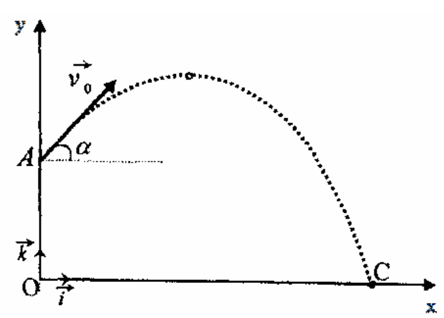
3- المدة الزمنية التي تستغرقها الجلة في الهواء :

$$t=t_C\ \rightarrow\ x=d$$

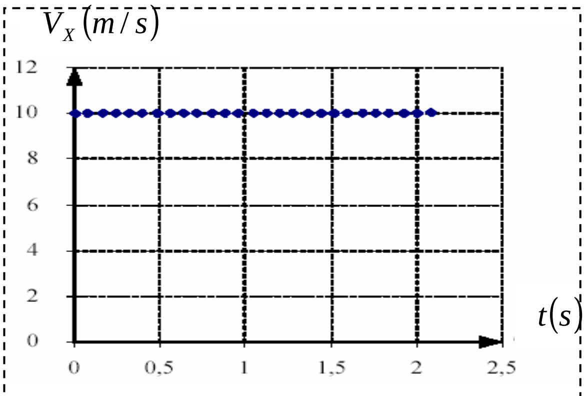
بالتعويض في المعادلة $x(t)$:

$$d=v_0\cos\alpha\,t_C\ \rightarrow t_C=\frac{d}{v_0\cos\alpha}\qquad\rightarrow\ t_C=\frac{21.51}{13.89\,.\cos45}=2.2\,\text{s}$$

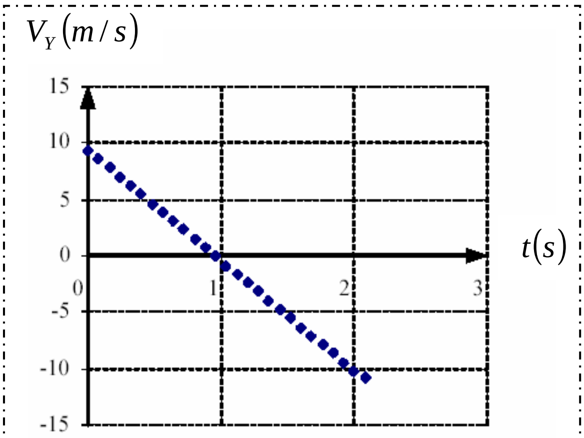
التمرين (19) : (التمرين : 025 في بنك التمارين على الموقع) (*)



في لعبة رمي الجلة ، و عند اللحظة $t = 0$ رمى اللاعب الجلة بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ يصنع شعاعها الزاوية α مع المحور الأفقي من على ارتفاع $h_0 = 2.5\ m$ من سطح الأرض . تهمل دافعة أرخميدس و قوى الاحتكاك .
الدراسة التجريبية لحركة هذه الجلة أعطت بياني الشكلين A ، B أين تمت الدراسة في معلم (O ,x ,y) مبدأه موضع رمي الجلة و باعتبار مبدأ الأزمنة عند مبدأ الإحداثيات (موضع رمي الجلة) .



الشكل A



الشكل B

1- أدرس طبيعة الحركة و أكتب معادلة مسار الجلة .
2- اعتمادا على الدراسة النظرية و البيانين (A) ، (B) أوجد :
- السرعة الابتدائية v_0 .
- زاوية الرمي α $(0 < \alpha < 90°)$.
- لحظة بلوغ الذروة (S) .
- الجاذبية الأرضية g .

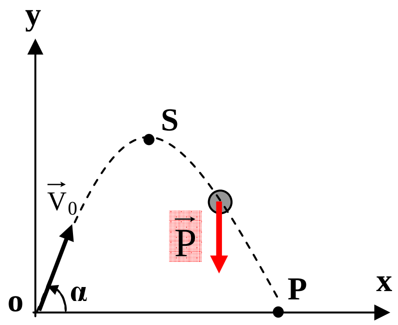
- أقصى ارتفاع تبلغه الجلة بالنسبة لسطح الأرض .
- سرعة الجلة عند بلوغها المدى علما أم انها تبلغه عند اللحظة $t = 2\ s$.
- مدى الجلة .

يعطى : $\tan 45° = 1$ ، $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

الأجوبة :

1- معادلة المسار :

- الجملة المدروسة : الجلة .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ P_y = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

- مسقط حركة الجملة على المحور ox هو حركة مستقيمة منتظمة .
- مسقط حركة الجلة على المحور oy هو حركة مستقيمة متغيرة بانتظام

و منه :

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = a_y\,t + v_{0y} \end{cases}$$

لدينا :

$$a_y = -g$$

و من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

و لدينا أيضا :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_{0x}\, t + x_0 \\ y = a_y\, t^2 + v_{0y}\, t + y_0 \end{cases}$$

بالاعتماد على ما سبق :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + x_0 \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

من المعادلة $x = f(t)$ $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$y = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x$$

<u>2- أ- السرعة الابتدائية v_0 :</u>

من بياني الشكلين A و B :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} = 10\ m/s \\ v_y = v_{0y} = 10\ m/s \end{cases}$$

ومنه :

$$v_0 = \left\| \overrightarrow{v_0} \right\| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2}\ m/s$$

<u>● زاوية الرمي :</u>

من بيان الشكل B :

$$t = 0 \rightarrow v_y = 10\ m/s$$

بالتعويض في المعادلة $v_y(t)$ نجد :

$$v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

$$10 = -g(0) + 10\sqrt{2} \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45°$$

<u>طريقة أخرى :</u>

$$(\tan\alpha)_{t=0} = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} = \frac{10}{10} = 1 \rightarrow \alpha = 45°$$

● <u>لحظة بلوغ الذروة :</u>
- عند بلوغ الذروة يكون $v_{ys} = 0$.
- من البيان $v_y(t)$ تنعدم v_y من أجل $t_S = 1$ و هي لحظة بلوغ الذروة .

● <u>الجاذبية الأرضية :</u>
لدينا :

$$t = t_S = 1\ s \ \rightarrow\ v_y = v_{yS} = 0$$

بالتعويض في $v_y(t)$ نجد :

$$v_{yS} = -\ g\ t_S + v_0 \sin\alpha \rightarrow 0 = -\ g\ (1) + 10\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \rightarrow\ g = 10\ m/s^2$$

● <u>أقصى ارتفاع تبلغ الجلة بالنسبة للأرض :</u>
إذا كان h_S هو أقصى ارتفاع تبلغه الجلة بالنسبة للأرض يكون :

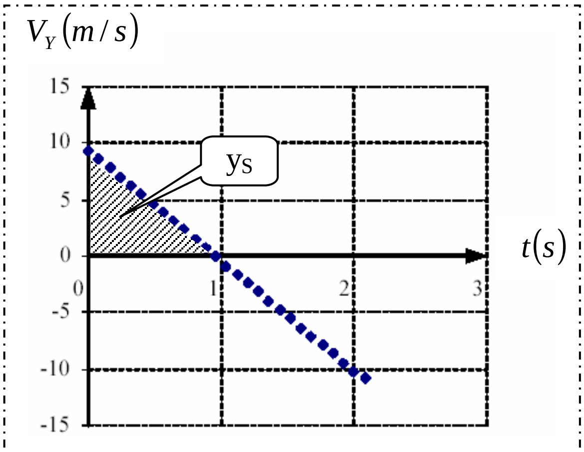
$$h_S = h_0 + y_S$$

نحسب y_S .
لدينا : $t_S = 1\ s$ بالتعويض في $y(t)$ نجد :

$$y_S = -\ \frac{1}{2}\ g\ t_S^2 + v_0 \sin\alpha\ t_S$$

$$y_S = -\ 0.5\ .\ 10\ (1)^2 + 10\ \sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\ m\ \rightarrow\ h_S = 2.5 + 5 = 7.5\ m$$

<u>طريقة أخرى لإيجاد y_S :</u>
يمثل y_S المسافة الشاقولية التي يقطعها مركز عطالة الجلة (S) بين اللحظتين $t = 0$ ، $t_S = 1s$ ، بالاعتماد على طريقة المساحة من المنحنى $v_y(t)$ نجد :



الشكل B

$$y_S = \frac{10\,.\,1}{2} = 5\,m\quad \rightarrow h_S = 2,5 + 5 = 7,5\ m$$

● <u>سرعة الكرية عند بلوغ المدى :</u>

لحظة بلوغ المدى هي $t_P = 2\ s$ بالاسقاط في البيانين $v_x(t)$ ، $v_y(t)$ نجد :

$$t_P = 2\ s \ \rightarrow \ \begin{cases} v_x = v_{0P} = 10\ m/s \\ v_y = v_{0P} = -10\ m/s \end{cases}$$

$$v_P = \left\| \overrightarrow{v_P} \right\| = \sqrt{(10)^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2}\ m/s$$

● <u>مدى الجلة :</u>

- إذا كان L هو مدى الجلة يكون : $L = x_P$.

- عند بلوغ المدى يكون : $y_P = 0$ بالتعويض في $y(t)$.

$$y_P = -\frac{1}{2} g\, t_P^2 + v_0 \sin\alpha\, t_P$$

$$0 = -0.5 \ .\ 10\, t_P^2 + 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\, t_P$$

$$5t_P^2 = 10\, t_P \ \rightarrow\ 5t_P = 10 \ \rightarrow\ t_P = 10\ s$$

بالتعويض في $x(t)$ نجد :

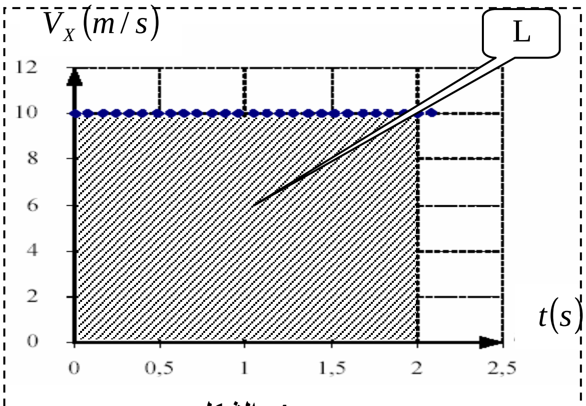
$$x_P = v_0 \sin\alpha\, t_P$$

$$x_P = 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\ .\ 2 = 20\ m$$

إذن المدى هو : $L = x_P = 20\ m$.

<u>طريقة ثانية للإيجاد المدى L :</u>

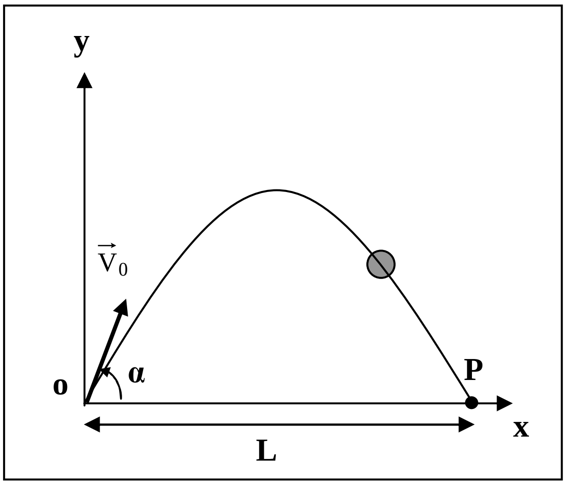
يمثل المدى L المسافة الأفقية التي يقطعها مركز عطالة الجلة (S) بين اللحظتين $t = 0$ ، $t_P = 2t_S = 2s$ ، بالاعتماد على طريقة المساحة من المنحنى $v_x(t)$ نجد :



الشكل A

$$L = (10\ .\ 2\ ) = 20\ m$$

التمرين (20) : (التمرين : 044 في بنك التمارين على الموقع) (*)



يراد لقذيفة مدفع إن تصل إلى هدف P يبعد عن نقطة القذف بمسافة $L = 3\ km$ ، و ذلك عند قذفها من نقطة (O) من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $v_0 = 200\ m/s$ يصنع شعاعها الزاوية α مع الأفق

إذا علمت أن معادلة مسار القذيفة في المعلم المبين في الشكل يعبر عنها بالعلاقة :

$$y = \frac{-g}{2\,{v_0}^2\cos\alpha^2}x^2 + \tan\alpha\, x$$

1- عبر عن زاوية الرمي α بدلالة g ، L ، v_0 .

2- عرف المدى .

3- بين أن مدى القذيفة يكون أعظمي من أجل $\alpha = 45°$ عندما تكون سرعة القذف ثابتة .

4- ما هي قيمتي الزاوية α التي يجب أن تصنعها ماسورة المدفع مع المستوي الأفقي حتى تسقط القذيفة في الموضع P .

يعطى : $g = 10\ m/s$ ، $\sin2\alpha = 2\cos\alpha.\sin\alpha$ ، $\sin50° = 0.75$.

الأجوبة :

1- عبارة α بدلالة g ، L ، v_ℓ :

عند الموضع P لدينا $x_P = L$ ، $y_P = 0$ ، بالتعويض في معادلة المسار :

$$0 = -\frac{g}{2\,{v_0}^2.\cos\alpha^2}L^2 + \tan\alpha.L \;\rightarrow\; \frac{g}{2\,{v_0}^2.\cos\alpha^2}L^2 = \tan\alpha.L$$

$$\frac{g}{2\,{v_0}^2.\cos\alpha^2}L = \tan\alpha \;\rightarrow\; g.L = 2\,{v_0}^2\cos\alpha^2.\tan\alpha$$

$$g.L = 2\,{v_0}^2\cos\alpha^2.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \;\rightarrow\; g.L = 2\,{v_0}^2\cos\alpha.\sin\alpha$$

$$g.L = {v_0}^2(2\cos\alpha.\sin\alpha)$$

نعلم أن : $\sin2\alpha = 2\cos\alpha.\sin\alpha$ ، و منه يصبح :

$$g.L = {v_0}^2\sin2\alpha \;\rightarrow\; \sin2\alpha = \frac{g.L}{{v_0}^2}$$

2- تعريف المدى :

هو المسافة الأفقية بين موضع القذف و موضع اصطدام القذيفة بالمستوي الأفقي المار من موضع القذف .

3- إثبات أن المدى يكون أعظمي من أجل $\alpha = 45°$ عندما تكون سرعة القذف ثابتة :

من العبارة السابقة يمكن كتابة :

$$L = \frac{{v_0}^2.\sin2\alpha}{g}$$

بالاعتماد على هذه العبارة ، يكون المدى أعظمي عندما يكون :

$$\sin2\alpha \rightarrow 2\alpha = 90° \rightarrow \alpha = 45°$$

4- قيمتي الزاوية α :

مما سبق وجدنا :

$$\sin 2\alpha = \frac{g.L}{v_0^2} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{10\ .\ 3000}{(200)^2} = 0.75$$

$$\sin 2\alpha = \sin 50° \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 50° \\ 2\alpha_2 = 180 - 50 = 130° \end{cases}$$

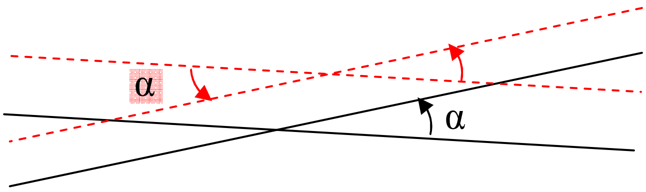
$$\begin{cases} \alpha_1 = 25° \\ \alpha_2 = 65° \end{cases}$$

نلاحظ : $\alpha_1 + \alpha_2 = 25° + 65° = 90°$

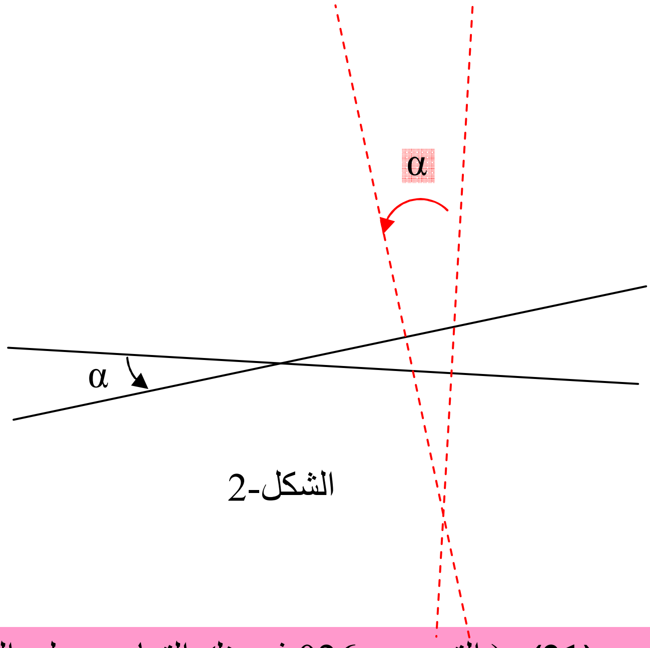
VII – حركة مركز عطالة جسم على مستوي

قاعدة :

- إذا كان لدينا مستقيمين الزاوية بينهما α (الزاوية الحادة) ، فإن المستقيمين الموازيين لهما كذلك الزاوية الحادة بينهما هي α (الشكل-1) .
- إذا كان لدينا مستقيمين الزاوية بينهما α (الزاوية الحادة) ، فإن المستقيمين العموديين عليهما كذلك الزاوية الحادة بينهما هي α (الشكل-2) .



الشكل-1

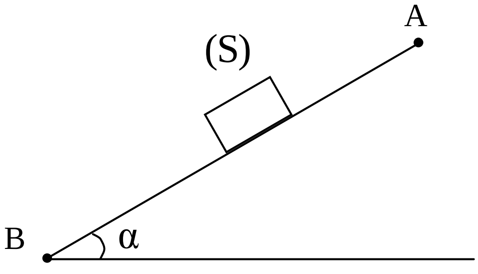


الشكل-2

التمرين (21) : (التمرين : 026 في بنك التمارين على الموقع) (*)

على مستوي مائل $AB = 2\ m$ يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ ، نترك (بدون سرعة ابتدائية) عند اللحظة $t = 0$ جسم صلب (S) كتلته $m = 1\ kg$ من موضع A نعتبره مبدأ الاحداثيات باتجاه موضع B أسفل المستوي المائل ، الجسم (S) يخضع إلى قوى إحتكاك تكافئ قوة ثابتة $\vec{f}$.

يعطى : $g = 10\ m/s^2$.



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد عبارة تسارع حركة مركز عطالة الجسم (S) أثناء حركته على المستوي المائل ثم استنتج طبيعة الحركة .

2- يصل الجسم (S) إلى الموضع B بسرعة $v_B = 4$ m/s ، أوجد :

أ- قيمة تسارع الحركة a .

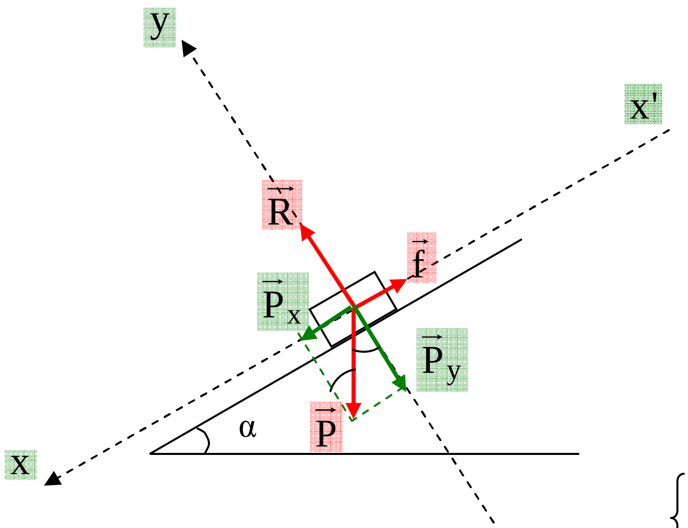
ب- المدة الزمنية المستغرقة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B .

جـ- أحسب شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

د- شدة قوة رد الفعل $\vec{R}$.

3- أكتب المعادلات الزمنية v(t) ، x(t) المميزة لحركة مركز عطالة (S) .

الأجوبة :



1- عبارة التسارع و طبيعة الحركة :

- الجملة المدروسة : الجسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط وفق المحورين (x'x) ، (y'y) :

$$\begin{cases} P_x + R_x + f_x = m_1\, a_x \\ P_y + R_y + f_y = m_1\, a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\sin\alpha + 0 - f = m\,a \\ -P\cos\alpha + R + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\,g\sin\alpha - f = m\,a \quad \ldots\ldots\ldots (1) \\ -m\,g\cos\alpha + R = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من العلاقة (1) يكون :

$$\boxed{a = \frac{m\,g\sin\alpha - f}{m}}$$

f ، m ، α ، g ثوابت لذلك يكون a ثابت و كون أن مسار مركز عطالة الجسم (S) مستقيم تكون حركته على المستوي المائل مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- أ- تسارع الحركة :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2.a.AB \rightarrow a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2.AB} \rightarrow a = \frac{(4)^2 - (0)^2}{2.2} = 4\ m/s^2$$

ب- المدة الزمنية المستغرقة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B :

$$v_B - v_A = a\,\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v_B - v_A}{a} \rightarrow \Delta t = \frac{4-0}{4} = 1\,s$$

جـ- شدة قوة الاحتكاك f :

لدينا سابقا :

$$a = \frac{m\,g\sin\alpha - f}{m} \rightarrow m.a = m.g.\sin\alpha - f$$

$$f = m.g.\sin\alpha - m.a \rightarrow f = m(g.\sin\alpha - a) \rightarrow f = 1((10 . \sin 30) - 4) = 1\,N$$

د- شدة قوة رد الفعل :

من العلاقة (2) السابقة يكون :

$$- m.g.\cos\alpha + R = 0 \rightarrow R = m\,g\cos\alpha$$

$$R = 1 . 10 . \cos 30° = 8.6\ N$$

3- المعادلات الزمنية للحركة :

المعادلة v(t) :

$$v = a\,t + v_0$$

- $a = 4\ m/s^2$
- $t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow v_0 = 0 \rightarrow \mathbf{v = 4\,t}$

المعادلة x(t) :

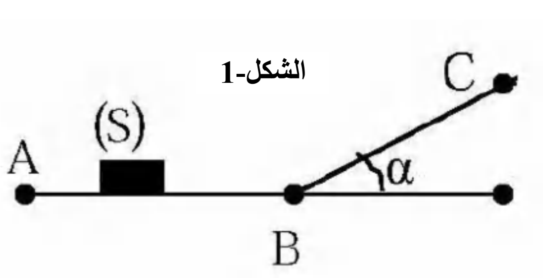
$$x = \frac{1}{2} a\,t^2 + x_0$$

$$x = \frac{1}{2} 4\,t^2 + x_0 \rightarrow x = 2\,t^2 + x_0$$

- $t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x_0 = 0 \rightarrow \mathbf{x = 2\,t^2}$

التمرين (22) : (التمرين : 035 في بنك التمارين على الموقع) (*)

تتحرك دراجة نارية و التي نعتبرها جسم نقطي (S) ، كتلتها مع الدراج $m = 160\ kg$ ، على المسار ABC (الشكل-1) . تمر الدراجة النارية عند اللحظة $t = 0$ من الموضع A الذي نعتبره مبدأ للفواصل بسرعة ابتدائية $v_A = 10\ m/s$ و في اللحظة $t_1 = 4\ s$ تمر من الموضع B لتواصل بعد ذلك حركتها بسرعة ثابتة على مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ ، حتى تبلغ الموضع C في اللحظة $t_2 = 8\ s$.



تخضع الدراجة النارية على طول المسار ABC لقوة احتكاك $\vec{f}$ ثابتة في الشدة و معاكسة لجهة الحركة ، كما تخضع على الجزء AB إلى قوة دفع المحرك $\vec{F}$ ثابتة و توازي المسار شدتها 1400 N و حتى تحافظ الدراجة النارية على سرعتها في الجزء من المسار BC ، يضغط الدرج على دواسة المحرك مما يكسب الدراجة قوة دفع $\vec{F'}$ أكبر .

1- بيان الشكل-2 يمثل تغيرات سرعة الدراجة أثناء انتقالها من الموضع A إلى الموضع C .

اعتماد على البيان جِد في كل طور :

أ- طبيعة حركة الدراجة و قيمة تسارعها .

ب- المسافة المقطوعة .

جـ- المعادلتين الزمنيتين v(t) ، x(t) .

2- أرسم مخطط التسارع a(t) .

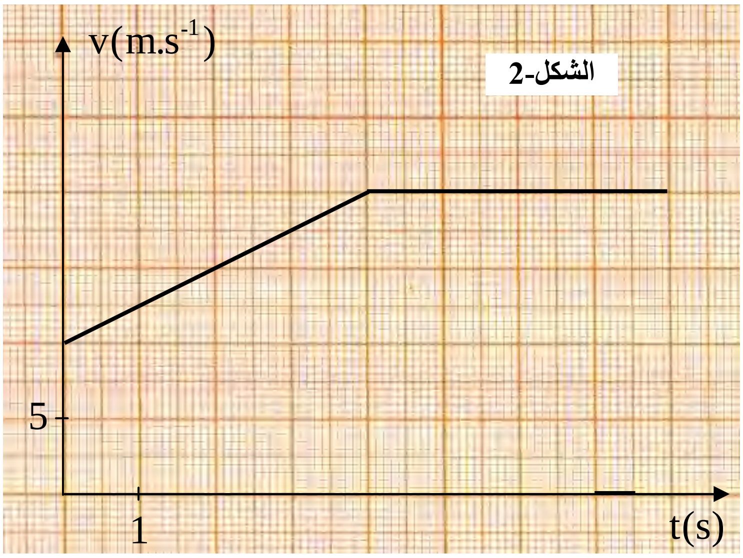
3- أكتب نص القانون الثاني لنيوتن .

4- بتطبيق القانون الثاني جِد ما يلي :

أ- شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

ب- شدة قوة دفع المحرك $\vec{F'}$ أثناء الانتقال على المستوي المائل BC .

يعطى : $g = 10\ m.s^{-2}$.



<u>الأجوبة :</u>

<u>1- طبيعة حركة الدراجة في كل طور :</u>

<u>الطور الأول :</u>

المنحنى v(t) هو مستقيم يشمل المبدأ معادلته من الشكل $v = at$ و كون أن $v > 0$ ، $a > 0$ يكون $a.v > 0$ ، و منه الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام .

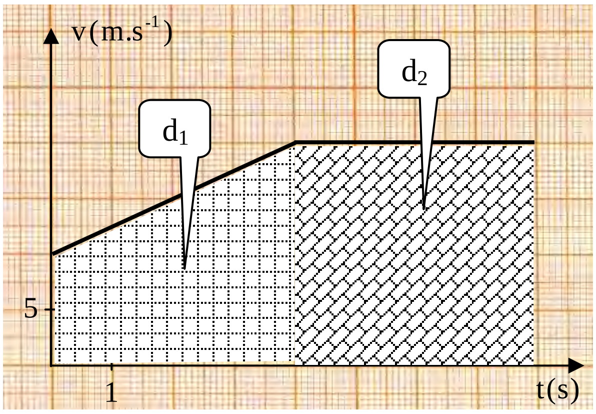
$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\ .\ 5}{4\ .\ 1} = 2{,}5\ m/s$$

<u>الطور الثاني :</u>

المنحنى v(t) هو مستقيم يوازي محور الأزمنة و منه الحركة مستقيمة منتظمة .

$a_2 = 0$

<u>ب- المسافة المقطوعة في كل طور :</u>



<u>الطور الأول :</u>

$$d_1 = \frac{10 + 20}{2}\ .\ 4 = 60\ m$$

<u>الطور الثاني :</u>

$d_2 = 20\ .\ 4 = 80\ m$

<u>جـ- المعادلة الزمنية x(t) :</u>

<u>الطور الأول :</u>

بما أن الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام يكون :

$$x = \frac{1}{2}\ a\ t^2 + v_0 t + x_0$$

- $a = 2{,}5\ m/s^2$.
- $t = 0 \rightarrow v = 10\ m/s \rightarrow v_0 = 10\ m/s$
- $t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x_0 = 0$

و منه :

$$\mathbf{x = 1{,}25\ t^2 + 10\ t}$$

<u>الطور الثاني :</u>

بما أن الحركة مستقيمة منتظمة يكون :

$x = v\ t + x_0$

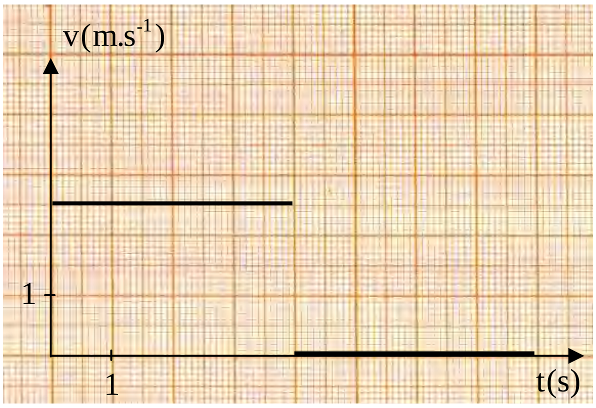
- $v = 20\ m/s$
- $t = 4\ s \rightarrow x = d_1 = 60\ m$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$60 = 20\,(4) + x_0 \rightarrow x_0 = 60 - (20\,.\,4) = -20\ m$$

و منه يكون :

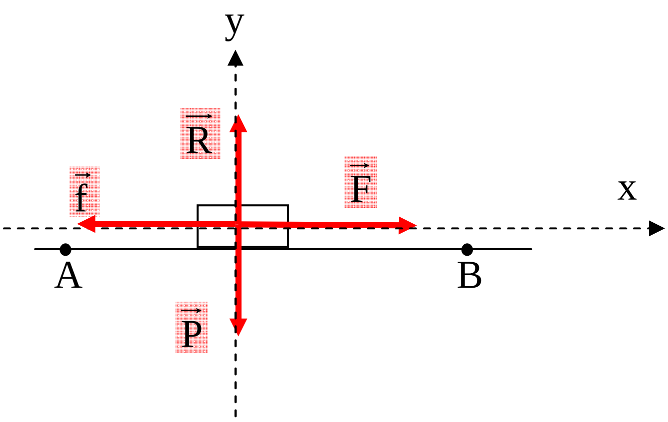
$$\mathbf{x = 20\,t - 20}$$



-2 مخطط التسارع a(t) :

-3 نص القانون الثاني لنيوتن :

في مرجع غاليلي ، المجموع الشعاع للقوى الخارجية المؤثرة على مركز عطالة جملة مادية ، يساوي في كل لحظة جداء كتلة هذه الجملة المادية في شعاع تسارع مركز عطالتها ، أي : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$.



-4 أ- شدة قوة الاحتكاك :

- الجملة المدروسة : (دراج + دراجته) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : قوة دفع المحرك $\vec{F}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

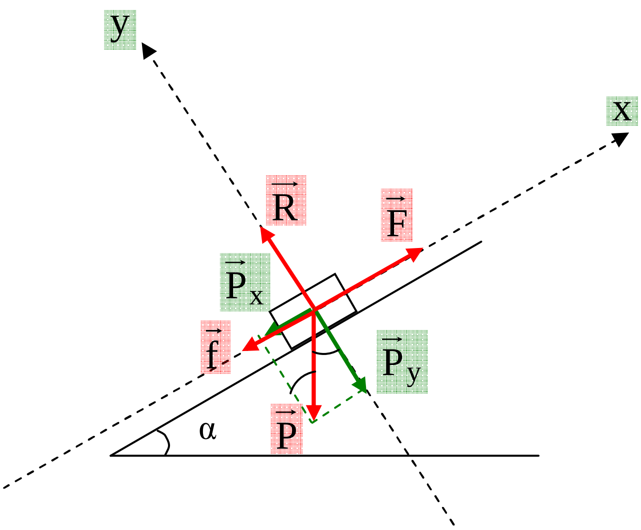
$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور 'xx :

$$F - f = ma_1$$

$$F - ma_1 = f \rightarrow f = F - ma_1$$

$$F = 1400 - (160\,.\,2{,}5) = 1000\ N$$



ب- شدة قوة الجر $\vec{F'}$:

- الجملة المدروسة : (دراج + دراجته) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : قوة دفع المحرك $\vec{F'}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{F'} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور 'xx :

$$F' - P.\sin\alpha - f = ma_2 = 0 \quad (a_2 = 0)$$

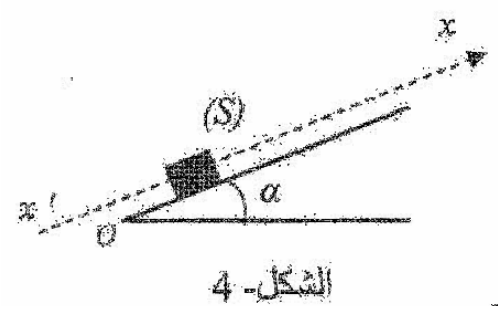
$$F' = P.\sin\alpha + f$$

$$F' = m.g.\sin\alpha + f$$

$$F' = 160\,.\,10\,.\,\sin 30 + 1000 = 1800\ N$$

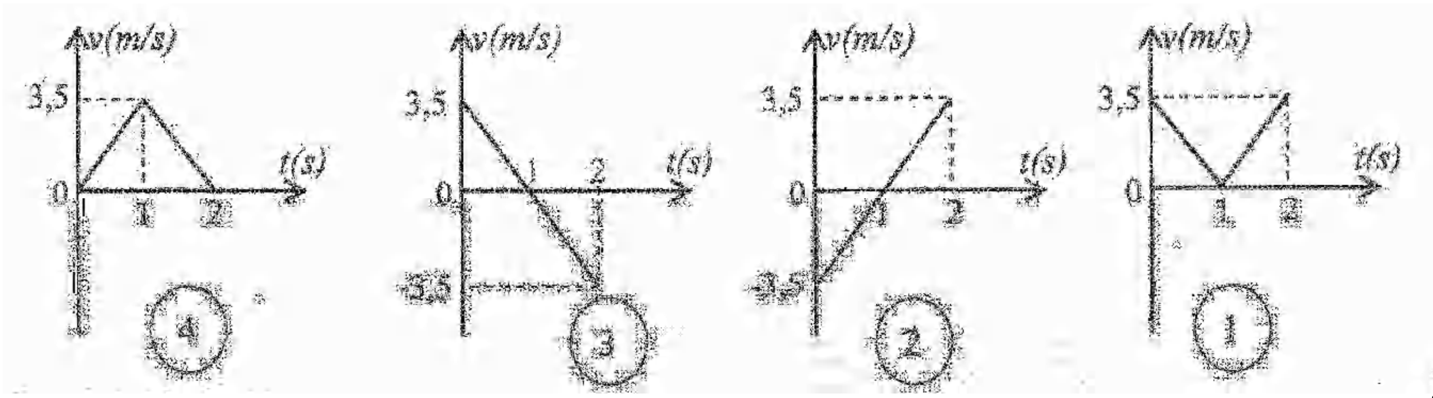
التمرين (23): (بكالوريا 2012 - رياضيات) (التمرين : 028 في بنك التمارين على الموقع) (*)

1- لغرض حساب زاوية الميل α لمستو يميل على الأفق . قام فوج من التلاميذ بقذف جسم صلب (S) كتلته $m = 1\ kg$ في اللحظة $t = 0$ من النقطة O بسرعة $\vec{v}_0$ نحو الأعلى وفق خط الميل الأعظم لمستو أملس (الشكل-4) .



الشكل-4

باستعمال تجهيز مناسب تمكن التلاميذ من دراسة حركة مركز عطالة (S) و الحصول على أحد مخططات السرعة $v = f(t)$ التالية :



أ- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، ادرس حركة الجسم (S) بعد لحظة قذفه من O .

ب- من بين المخططات الأربعة (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، ما هو المخطط الموافق لحركة الجسم (S) برر .

جـ- احسب قيمة الزاوية α .

د- احسب المسافة المقطوعة بين اللحظتين : $t = 0$ و $t = 2s$.

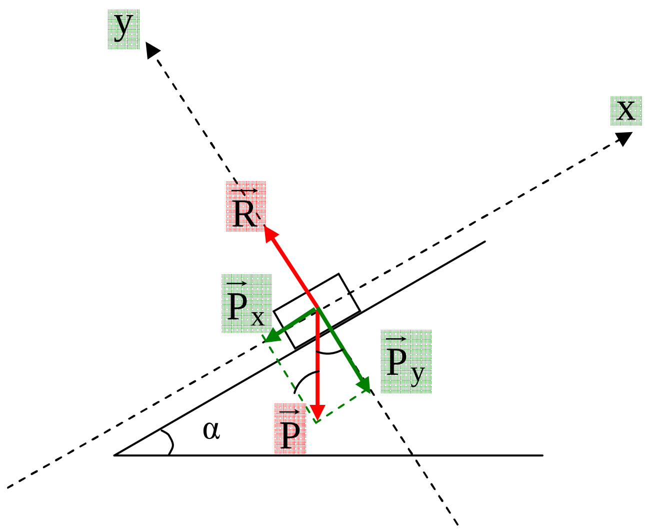
2- في الحقيقة يخضع الجسم أثناء انزلاقه على المستوي المائل إلى قوة احتكاك شدتها ثابتة f .

أ- أحص و مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم (S) .

ب- ادرس حركة مركز عطالة (S) ، ثم استنتج العبارة الحرفية لتسارع حركته .

جـ- احسب قيمة التسارع من أجل $f = 1.8\ N$.

تعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$.



الأجوبة :

1- أ- طبيعة حركة الجسم (S) :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (x'x) :

$$P_x = -m\,a_0$$
$$mg\sin\alpha = -m\,a_x \rightarrow a_x = -g\sin\alpha$$

نلاحظ أن التسارع ثابت و كذلك $a_x < 0$ ($g\sin\alpha < 0$) ، و كون أن $v_x > 0$ ($\vec{v}$ في جهة المحور ox) يكون : $a_x . v_x < 0$ ، و بما أن المسار مستقيم تكون حركة مركز عطالة الجسم (S) أثناء صعوده في المستوي المائل مستقيمة متباطئة بانتظام .

ب- المخطط الموافق للحركة :

- عند وصل الجسم (S) إلى أعلى المستوي المائل أين تنعدم سرعته يعود إلى أسفل المستوي المائل بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام (القوة المؤثرة ثابتة) ، يمكن القول أن حركة الجسم (S) على المستوي المائل لها طورين :

طور I (صعود) : تكون فيه الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام .

طور II (نزول) : تكون فيه الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام حيث $v < 0$ (الحركة عكس المحور) ، $a_G < 0$ ($\vec{P}_x$ جهتها معاكسة لجهة المحور) و إذا أخذنا بعين الاعتبار أن ميل المنحنى $v = f(t)$ يمثل ميل المماس فإن هذه المعلومات تطابق البيان (3) و لا تطابق البيانات الأخرى .

جـ- قيمة الزاوية α :

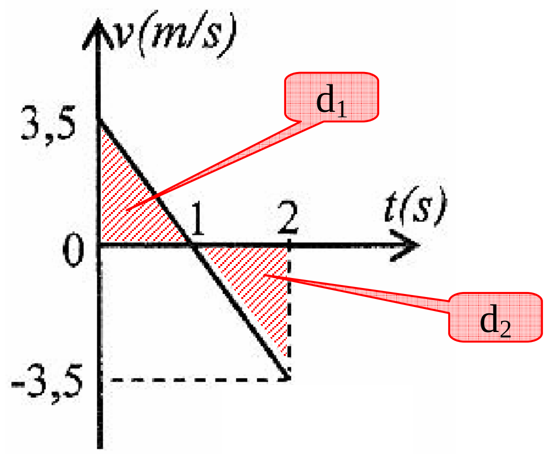
- من البيان (3) :

$$a = \tan\alpha = \frac{0 - 3.5}{1 - 0} = -3.5\ m/s^2$$

و لدينا سابقا من الدراسة النظرية :

$$a = -g\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = -\frac{a}{g} \rightarrow \sin\alpha = -\frac{(-3.5)}{9.8} = 0.36 \rightarrow \alpha \approx 21°$$

د- المسافة المقطوعة بين $t = 0$ و $t = 2s$:



$$d_1 = d_1 + d_2$$

- $$d_1 = \frac{1 \times 3.5}{2} = 1.75\ m$$
- $$d_2 = \frac{(2-1)\times(0-(-3.5))}{2} = 1.75\ m$$

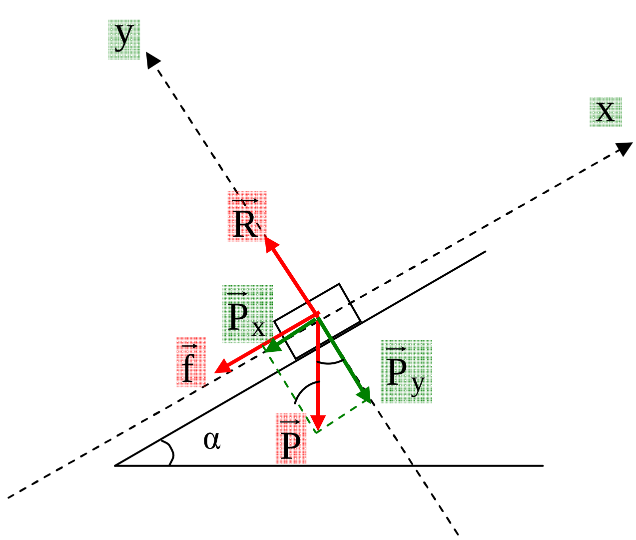
$$d_2 = 1.75 + 1.75 = 3.5\ m$$

2- أ- إحصاء و تمثيل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم (S) :

- يخضع الجسم (S) إلى القوى الخارجية التالية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

ب- دراسة حركة مركز عطالة (S) :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (جسم S) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي :



$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (x'x) :

$$-P\sin\alpha - f = m\,a$$

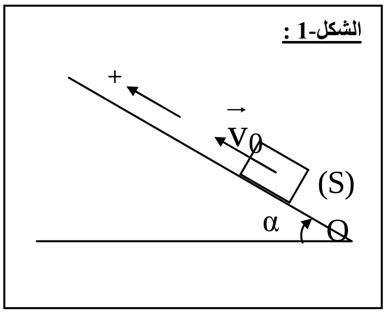
$$-mg\sin\alpha - f = m\,a \rightarrow a = -g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

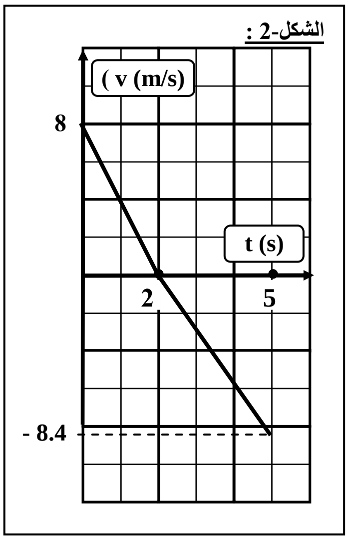
جـ- قيمة التتسارع من أجل $f = - 9.8\ N$:

$$a = (- 9.8 . \sin21°) - (\frac{1.8}{1}) = - 5.3\ m/s^2$$

التمرين (24) : (التمرين : 029 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يقذف جسم صلب (S) كتلته $m = 900\ g$ عند اللحظة $t = 0$ من النقطة (O) نعتبرها مبدأ الإحداثيات بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ وفق خط الميل الأعظم لمستوي يميل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 20°$ (الشكل-1) . يمثل البيان الموضح في (الشكل-2) مخطط السرعة لحركة الجسم (S) .





1- اعتمادا على البيان :

أ- حدد المجال الزمني لكل طور من طوري الحركة .

ب- حدد طبيعة الحركة في كل طور .

جـ- أحسب تسارع الحركة في كل طور .

د- جِد فاصلة الجسم (S) عند اللحظة $t = 2\ s$ نهاية الطور الأول .

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أنه توجد قوة احتكاك ثابتة $\vec{f}$ ، أحسب شدتها .

3- أكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة الجسم (S) في كل طور .

يعطى : $\sin20° = 0.34$ ، نعتبر $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

1- أ- المجال الزمني لكل طور :

- الطور I : $(t = 0 \rightarrow t = 2\ s)$.
- الطور II : $(t = 2\ s \rightarrow t = 5\ s)$.

ب- طبيعة الحركة في كل طور :

الطور I :

المنحنى $v(t)$ هو مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث ان $a < 0$ (الميل سالب) ، $v > 0$ يكون $a.v < 0$ أي جهة شعاع التسارع معاكسة لجهة شعاع السرعة و بالتالي معاكس لجهة الحركة . إذن الحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة بانتظام .

الطور II :

المنحنى $v(t)$ هو مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث ان $a < 0$ (الميل سالب) ، $v < 0$ يكون $a.v > 0$ ، أي جهة شعاع التسارع في جهة شعاع السرعة و بالتالي في جهة الحركة ، إذن الحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة بانتظام .

جـ- تسارع الحركة في كل طور :

الطور I :

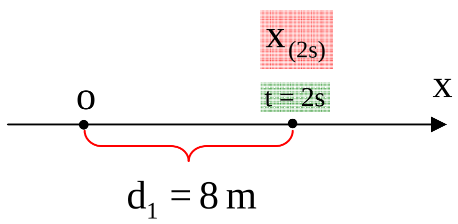
$$a_1 = \frac{0-8}{2-0} = -4\ m/s^2$$

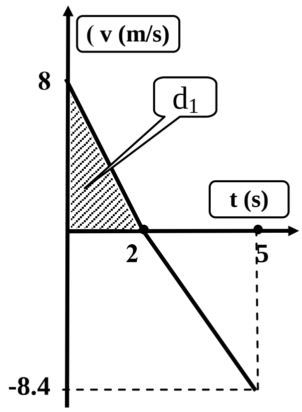
الطور II :

$$a_2 = \frac{-8.4-0}{5-2} = -2.8\ m/s^2$$

د- الفاصلة عند اللحظة $t = 2\ s$:

- من خلال الشكل التالي :





يكون :

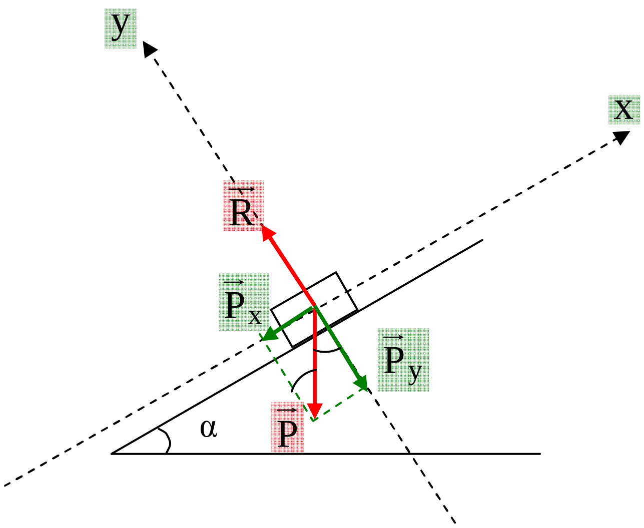
$$t = 2\ s \rightarrow x = d$$

حيث d هي المسافة المقطوعة في الطور الأول لأن مبدأ الفواصل عند بداية الطور الأول ، و لحساب المسافة نستعمل طريقة المساحة من المنحنى $v(t)$ كما يلي :

$$d = \frac{\text{ق} \times \text{إ}}{2} = \frac{8\ .\ 2}{2} = 8\ m$$

إذن :

$$t = 2\ s \rightarrow\ x = 8\ m$$



2- إثبات أنه توجد قوة احتكاك :

لإثبات أنه توجد قوة احتكاك نبحث عن قيمة التسارع النظرية باعتبار الاحتكاك مهمل ثم نقارنها بقيمة التسارع التجريبية (نعتبر الطور الأول) .

- الجملة المعتبرة : الجسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

• بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G$

$\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}$

بالإسقاط على محور الحركة (x'x) .

$- P \sin\alpha = m.a_1'$

$- m.g.\sin\alpha = m.a_1' \rightarrow a_1' = - g.\sin\alpha$

$a_1' = - 10.\sin 20 = - 3.4 \ m/s^2$

نلاحظ أن $a_1' \neq a_1$ ، إذن الإحتكاك موجود .

- شدة قوة الاحتكاك :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة جسم (S) مع الأخذ بعين الاعتبار شدة قوة الاحتكاك (نعتبر الطور I) :

$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m \vec{a}$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) .

$- P \sin\alpha - f = m.a_1$

$- m.g.\sin\alpha - f = m.a_1$

$- m.g.\sin\alpha - m.a_1 = f \rightarrow f = - m(g.\sin\alpha + a_1)$

$f = - 0.9(10.\sin 20 + (-4)) = 0.54 \ N$

3- المعادلات الزمنية x(t) في كل طور :

الطور I :

المعادلة v(t) :

$v = at + v_0$

▪ $a = - 4$

▪ $t = 0 \rightarrow v = 8 \ m/s \rightarrow v_0 = 8 \ m/s$ (من المنحنى)

إذن المعادلة v(t) تكون كما يلي :

$v = - 4 t + 8$

المعادلة x(t) :

$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$

$x = - 2 t^2 + 8 t + x_0$

▪ $t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x_0 = 0$

تصبح المعادلة x(t) كما يلي :

$x = - 2t^2 + 8t$

الطور II :

المعادلة v(t) :

$v = at + v_0$

▪ $a_2 = - 2.8$

▪ $t = 2 \rightarrow v = 0$ (من المنحنى)

بالتعويض نجد :

$0 = -2.8 (2) + v_0 \rightarrow v_0 = 5.6$

يمكن الحصول على قيمة v_0 بتمديد المنحنى v(t) في الطور الثاني حتى يقطع محور التراتيب (ov) .
إذن المعادلة v(t) تكون كما يلي :

$$v = -2.8\ t + 5.6$$

المعادلة x(t) :

$$x = \frac{1}{2} a\, t^2 + v_0 t + x_0 \quad \rightarrow\ x = -1.4\, t^2 + 5.6\ t + x_0$$

مما سبق : $t = 2 \rightarrow x = 8\ m$ بالتعويض في المعادلة x(t) نجد :

$$8 = -\ 1.4\ (2)^2 + 5.6\ (2) + C_2 \rightarrow C_2 = 8 + (1.4\ .\ 2^2) - (5.6\ .\ 2) = 2.4$$

إذن المعادلة x(t) تكون كما يلي :

$$x = -\ 1.4\ t^2 + 5.6\ t + 2.4$$

IIX– حدود ميكانيك نيوتن

1– بعض الظواهر التي عجز تفسيرها ميكانيك نيوتن :

- إن ميكانيك نيوتن عاجز على تفسير النظام المجهري الشبيه بالنظام الشمسي (ذرة - نواة) ، كما أنه عاجز تماما على تفسير بعض الظواهر الفيزيائية كإصدار المادة لضوء و امتصاصها لضوء ، أما فيما يخص الطاقة المكممة في الذرة و التي سنتطرق لها فيما بعد ، فهي لا يمكن أن تفسر في ميكانيك نيوتن ، و هنا يظهر ما يسمى بالميكانيك النسبي و ميكانيك الكم .

2– الطبيعة الموجية و الجسيمية للضوء :

- الضوء **ذو طبيعة موجية** ، أي عبارة عن أمواج مثله مثل الأمواج الميكانيكية و الأمواج الصوتية ، فهو إذن يمتاز بمقدار يدعى طول الموجة λ وحدته المتر (m) ، كما يمتاز أيضا بمقدار يدعى التواتر f الذي وحدته الهرتز (Hz) .
- طول الموجة λ يتعلق بالتواتر f وفق العلاقة :

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f} \Leftrightarrow f = \frac{c}{\lambda}}$$

حيث : c هي سرعة الضوء في الخلاء ($v = 3\ .\ 10^8\ m/s$) .

3– فرضية بلاك – أنشتاين :

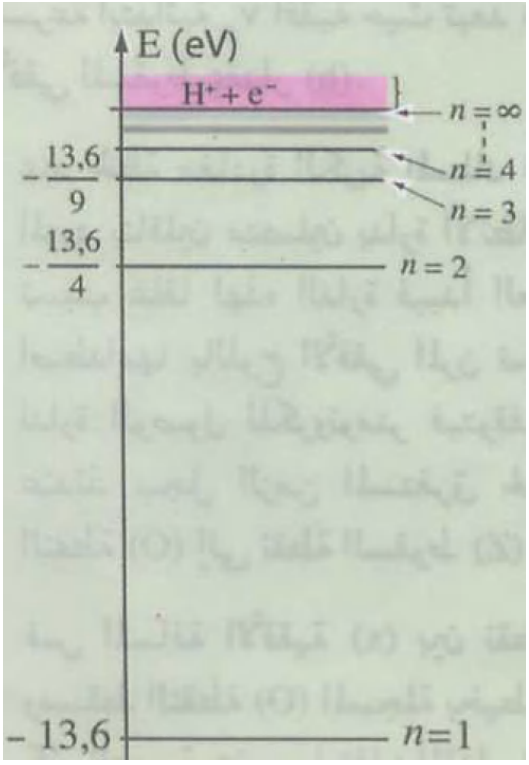
بالإضافة إلى أن الضوء ذو طبيعة موجية فقد افترض العالم انشتاين لتفسير بعض الضواهر الفيزيائية المستعصية آنذاك ، طبيعة أخرى للضوء و هي **الطبيعة الجسمية** ، حيث اعتبر أن الضوء يتكون من حبيبات دقيقة تدعى الفوتونات ، و الفوتون الواحد يحمل طاقة قدرها :

$$\boxed{E = h\,.\,f \ = \frac{h\,.\,c}{\lambda}}$$

h : ثابت بلانك حيث يساوي $h = 6.62\ .\ 10^{-34}\ J.s$.
f : تواتر الإشعاع و يقدر بالهرتز (Hz) .
λ : طول الموجة و يقدر بالمتر .

4- فرضيات بور – سويات الطاقة :

- بعد دراسات معمقة لأطياف الإنبعات من طرف العالم نيلز بوهر ، و ضع سنة 1913 المسلمات التالية :
- إن طاقة الذرة لا تأخذ إلا بعض القيم لذا يقال عنها **مكممة** و تسمى حالات الذرة الموافقة لهذه القيم المميزة من الطاقة ، **سويات الطاقة** .
- إن انتقال الإلكترون من سوية طاقة لأخرى يصاحبه امتصاص أو فقدان طاقة على شكل إشعاعات ضوئية وحيدة اللون أي على شكل فوتون .
- إلكترون الذرة يكون موجود على أحد سويات الطاقة للذرة ، أي موجود في مدار موافق لسوية من هذه السويات .
- لكل سوية طاقة رقم نرمز له بـ n ، هذه الأرقام مرتبة من $n = 1$ إلى $n = \infty$ و الشكل التالي يمثل سويات الطاقة في ذرة الهيدروجين :



- عند السوية الموافقة لـ $n = 1$ تكون عندها الذرة في حالتها الأساسية (غير مثارة) .
- عند السوية $n > 1$ تكون الذرة في حالة مثارها و للعودة إلى حالتها الأساسية تصدر الفائض في الطاقة عن طريق بعث فوتون (مثل النواة المثارة عندما تصدر إشعاع γ) ، أي بعث ضوء ، و هذا ما يفسر إصدار الذرات لضوء مثل الضوء الذي يصدره سلك حديدي عندما يسخن بشدة أو مصباح طيفي عندما يتعرض لشرارة كهربائية ، و عندها ينتقل الإلكترون من السوية التي كان عليها إلى سوية أقل ، و بالمثل عندما تمتص الذرة فوتون و هي في الحالة الأساسية تصبح في حالة مثارة ، و عندها تنتقل إلى سوية أعلى .
- عند السوية الموافقة لـ $n = \infty$ يكون الإلكترون بعيد كل البعد عن النواة و في هذه الحالة نقول عن الذرة أنها تشردت .
- عندما ينتقل الإلكترون من سوية n_1 (E_1) إلى سوية أخرى n_2 (E_2) فإن الذرة تمتص أو تصدر فوتون طاقته مساوية للفرق بين هاتين السويتين ($|E_2 - E_1|$) و كون أن طاقة الفوتون هي $E = h.f$ يمكن كتابة :

$$\boxed{E = |E_2 - E_1| = h.f}$$

ملاحظة :

عندما نقول طول موجة و تواتر الفوتون نقصد به طول موجة و تواتر الإشعاع المتكون من هذا الفوتون .

التمرين (25) : (التمرين : 027 في بنك التمارين على الموقع) (*)

تعطى طاقات مختلف سويات ذرة الهيدروجين بالعبارة :

$$E = \frac{-13.6}{n^2} (eV)$$

حيث n العدد الكمي الرئيسي .

1- ما هي أدنى طاقة لازمة لتشرد ذرة الهيدروجين و هي في الحالة الأساسية ؟

2- أحسب الطاقة التي تمتصها ذرة الهيدروجين ، ليقفز الإلكترون :

أ- من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 2$.

ب- من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 3$.

3- لتكن الفوتونات ذات الطاقات التالية على الترتيب :

$E_3 = 10.20$ eV ، $E_2 = 15.90$ eV ، $E_1 = 04.50$ eV
$E_6 = 15.00$ eV ، $E_5 = 12.08$ eV ، $E_4 = 11.00$ eV

حدد من بين الفوتونات السابقة من هي القادرة على إثارة ذرة الهيدروجين و هي في الحالة الأساسية مبررا إجابتك .

4- أحسب تواتر الإشعاع الصادر عندما يقفز الإلكترون في ذرة الهيدروجين من السوية $n = 3$ إلى السوية $n = 2$.

يعطى :

ثابت بلانك : $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ J.s ، $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19}$ J

الأجوبة :

1- أدنى طاقة لازمة للتشرد :

التشرد يكون من أجل انتقال سوية الطاقة من الحالة الأساسية $n = 1$ إلى الحالة $n = \infty$ و علية تكون قيمة طاقة التشرد كما يلي :

$$E = E_{(n=\infty)} - E_{(n=0)}$$

$$E = \frac{-13.6}{(\infty)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = 0 + 13.6 = 13.6\ eV$$

2- الطاقة التي تمتصها ذرة الهيدروجين عندما يقفز الإلكترون من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 2$:

$$E = E_{(n=2)} - E_{(n=1)}$$

$$E = \frac{-13.6}{(2)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = -3.4 - (-13.6) = 10.2\ eV$$

- الطاقة التي تمتصها ذرة الهيدروجين عندما يقفز الإلكترون من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 3$:

$$E = E_{(n=3)} - E_{(n=1)}$$

$$E = \frac{-13.6}{(3)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = -1.51 - (-13.6) = 12.09\ eV$$

3- الفوتونات القادرة على إثارة ذرة الهيدروجين :

الفوتون الذي يمكنه إثارة ذرة الهيدروجين هو الفوتون الذي يجعل الإلكترون ينتقل من سوية $n_1 = 1$ (الأساسية) إلى سوية n (حيث n عدد طبيعي) و تكون طاقته مساوية عندئذ لـ :

$$E = E_{(n)} - E_{(n=1)}$$

$$E = \frac{-13.6}{(n)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = \frac{-13.6}{n^2} + 13.6$$

$$\frac{13.6}{n^2} = 13.6 - E \rightarrow n^2 = \frac{13.6}{13.6 - E} \rightarrow \frac{13.6}{n^2} = 13.6 - E \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - E}}$$

- $E_1 = 04.50 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 4.50}} = 1.22$
- $E_2 = 15.90 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 15.9}} = ?$
- $E_3 = 10.20 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 10.20}} = 2$
- $E_4 = 11.00 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 11.00}} = 3.31$

- $E_5 = 12.08 \rightarrow n = \sqrt{\dfrac{13.6}{13.6 - 12.08}} \approx 3$
- $E_6 = 15.00 \rightarrow n = \sqrt{\dfrac{13.6}{13.6 - 15.00}} \approx ?$

إذن الفوتونات القادرة على إثارة ذرة الهيدروجين هي الفوتونات ذات الطاقات :

- $E_3 = 10.20\ eV$ هو يجعل الإلكترون يقفز من السوية الأساسية إلى السوية $n = 2$.
- $E_5 = 12.08\ eV$ هو يجعل الإلكترون يقفز من السوية الأساسية إلى السوية $n = 3$.

4- تواتر الإشعاع الصادر :

عندما يقفز الإلكترون من السوية $n = 3$ إلى السوية $n = 2$ تصدر ذرة الهيدروجين فوتون طاقته :

$$E = E_{(n=3)} - E_{(n=2)}$$

$$E = \frac{-13.6}{(3)^2} - \frac{-13.6}{(2)^2} = -1.51 - (-\ 3.40) = \ \ 1.51 + 3.40 = 1.89\ eV$$

و هذا الفوتون يوافق إشعاع تواتره ν حيث :

$$E = h\nu \rightarrow \nu = \frac{E}{h}$$

$$\nu = \frac{1.89 . 1.6 . 10^{-19}}{6.62 . 10^{-34}} = 4.57 . 10^{14}\ Hz$$

IX- تمارين متنوعة

التمرين (26) : (بكالوريا 2017 – علوم تجريبية) (التمرين : 103 في بنك التمارين على الموقع) (**)

خلال حصة الأعمال المخبرية كلف الأستاذ ثلاث مجموعات من التلاميذ بدراسة حركة سقوط كرية في الهواء كتلتها m و حجمها V انطلاقا من السكون في اللحظة $t = 0$ حيث طلب منهم تمثيل القوى المؤثرة على الكرية في لحظة t حيث $t > 0$ ، عرضت كل مجموعة عملها فكانت النتائج كالتالي :

المجموعة	1	2	3
التمثيل المتجه			

حيث $\vec{\Pi}$ دافعة أرخميدس و $\vec{f}$ قوة الاحتكاك مع الهواء .

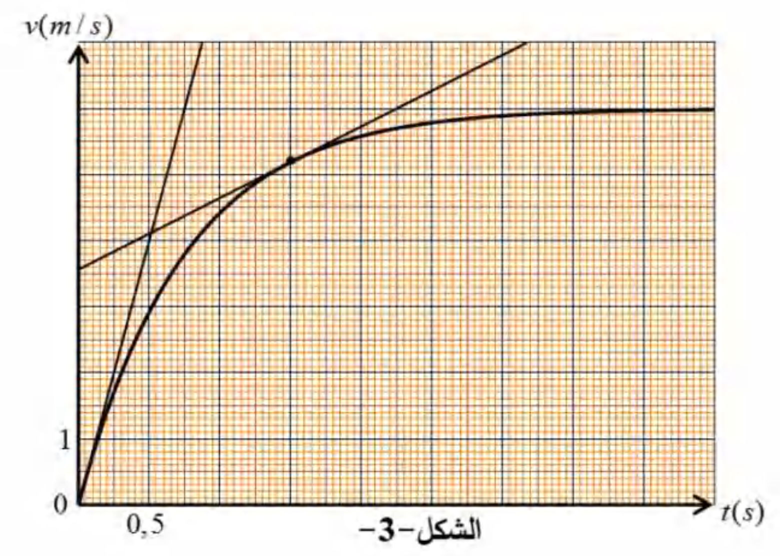
1) بعد المناقشة تم رفض تمثيل إحدى المجموعات الثلاث .

أ) حدد التمثيل المرفوض مع التعليل .

ب) اكتب المعادلة التفاضلية للسرعة لكلا الحالتين المتبقيتين .

جـ) أعط عبارة a_0 تسارع الكرية في اللحظة $t = 0$ لكل من الحالتين المتبقيتين .

2) لتحديد التمثيل المناسب أُجريت تجربة لقياس قيم السرعة في لحظات مختلفة ، النتائج المتحصل عليها سمحت برسم المنحنى الموضح في (الشكل-3-) .



الشكل-3-

مستعينا بالمنحنى حدد قيمة التسارع الابتدائي a_0 في اللحظة $t = 0$ ثم استنتج التمثيل الصحيح مع التعليل .

3) عين قيمة السرعة الحدية v_{lim} .

4) جد عبارة السرعة الحدية v_{lim} بدلالة : m ، k ، g و V حجم الكرية ، ثم احسب قيمة الثابت k .

5) احسب شدة محصلة القوى المطبقة على الكرية في اللحظة $t = 1,5\ s$ بطريقتين مختلفتين .

المعطيات : عبارة قوة الاحتكاك من الشكل $f = kv$ ، $g = 9,80\ m.s^{-2}$ ، كتلة الكرية $m = 2,6\ g$.

الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air} = 1,3\ kg.m^{-3}$ ، حجم الكرية : $V = 3,6 . 10^{-4}\ m^3$.

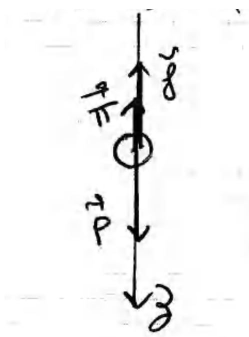
<u>الأجوبة :</u>

<u>1- أ- التمثيل المرفوض :</u>

جهة دافعة أرخميدس تكون دوما معاكسة لجهة قوة الثقل ($\vec{\Pi} = -\rho V\vec{g}$) و بالتالي التمثيل (3) هو المرفوض .

<u>ب- المعادلة التفاضلية :</u>

<u>الحالة (1) :</u>



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

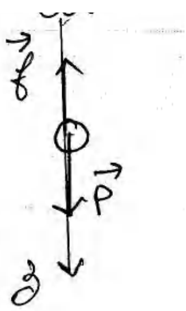
بالإسقاط على المحور oz .

$$P - \Pi - f = m.a$$

$$mg - \rho Vg - kv = m\frac{dv}{dt} \rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv = m.g - \rho Vg$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \frac{\rho Vg}{m} \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g\,(1 - \frac{\rho V}{m})$$

<u>الحالة (2) :</u>



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

$$mg - - kv = m\frac{dv}{dt} \rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv = m.g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

جـ- عبارة a_0 :

الحالة (1) :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow (\frac{dv}{dt})_{t=0} = a_0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية للحالة (1) :

$$a_0 = g\,(1 - \frac{\rho V}{m})$$

الحالة (2) :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \;,\; (\frac{dv}{dt})_{t=0} = a_0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية للحالة (2) :

$$a_0 = g$$

2- قيمة a_0 :

تساوي قيمة a_0 ميل مماس المنحنى $v(t)$ عند اللحظة $t = 0$ و منه :

$$a_0 = (\frac{dv}{dt})_{t=0} = \frac{4}{0,5} = 8\ m/s^2$$

التمثيل الصحيح :

نلاحظ $a_0 \neq 0$ ، نستنتج أن دافعة أرخميدس غير مهملة و بالتالي التمثيل الصحيح هو (1) .

3- قيمة v_{lim} :

من المنحنى : $v_{lim} = 6\ m/s$.

4- عبارة v_{lim} بدلالة m ، k ، g ، v :

من المعادلة التفاضلية الموافقة للتمثيل الصحيح (الحالة 1) و في النظام الدائم أين يكون : $v = v_{lim}$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ نجد :

$$\frac{k}{m} v_{lim} = g\,(1 - \frac{\rho V}{m})$$

$$v_{lim} = \frac{mg}{k}(1 - \frac{\rho V}{m}) \;\rightarrow\; v_{lim} = \frac{g}{k}(m - \rho V)$$

قيمة k :

بالاعتماد على عبارة v_{lim} السابقة :

$$v_{lim} = \frac{g}{k}(m - \rho V) \;\rightarrow\; k = \frac{g}{v_{lim}}(m - \rho V)$$

$$k = \frac{9,8}{6}(2,6.10^{-3} - (1,3.3,6.10^{-4})) = 3,48.10^{-3}\ kg/s$$

5- شدة محصلة القوى عند $t = 0$:

الطريقة (1) :

حسب القانون الثاني لنيوتن :

$$F = ma$$

من البيان و عند $t = 1,5\ s$ يكون :

$$(a)_{t = 1,5\ s} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=1,5s} = \frac{1,6}{1,5} = 1,07\ m/s^2$$

إذن عند $t = 1,5\ s$:

$$F = 2,6 \,.\, 10^{-3} \,.\, 1,07 = 2,78 \,.\, 10^{-3}\ N$$

الطريقة (2) :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$$

بالإسقاط على المحور oz :

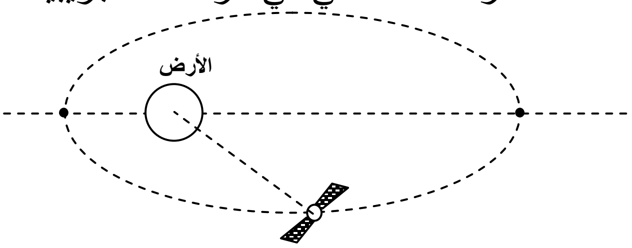
$$F = P - \Pi - f$$
$$F = m.g - \rho Vg - kv$$
$$F = (2,6 \,.\, 10^{-3} \,.\, 9,8) - (1,3 \,.\, 3,6 \,.\, 10^{-4} \,.\, 9,8) - (3,48 \,.\, 10^{-3} \,.\, 5,2) = 2,79 \,.\, 10^{-3}\ N$$

التمرين (27) : (التمرين : 030 في بنك التمارين على الموقع) (**)

تم إطلاق القمر الإصطناعي للجزائري AlcomSat 1 و ذلك يوم 10 ديسمبر 2017 على الساعة 17:40 من قاعدة Xichang الصينية و بعد 26 دقيقة من الإطلاق وصل القمر الاصطناعي إلى نقطة **الأوج** (نقطة الرأس الأبعد) على علو $h_1 = 41991\ km$ من سطح الأرض ، ليسلك بعد ذلك مسارا اهليليجيا له نقطة الحضيض (نقطة الرأس الأقرب) على ارتفاع $h_2 = 200\ km$ من سطح الأرض و ذلك في مرحلة التجريب التي دامت ستة أيام ، بعدها دخل القمر الاصطناعي في مداره الجيومستقر Géostationnair حيث أخذ الموقع الفلكي 24,8° .

1-أ- اشرح المصطلحين الواردين في النص : (اهليليجي ، جيو مستقر) .

ب- الشكل التالي يمثل رسما تخطيطيا للمسار الاهليليجي الذي اتخذه القمر الاصطناعي في مرحلته التجريبية ، وضح على هذا الشكل النقاط التالية : الأرض ، نقطة الأوج ، نقطة الحضيض ، ثم مثل شعاع السرعة بعناية في النقطتين الأخيرتين (نقطة الأوج ، نقطة الحضيض) .



2- بعدما يأخذ القمر الاصطناعي وضعه الدائم (مداره الجيو مستقر) :

أ- أثبت أن الجاذبية g على الارتفاع h يعبر عنها بالعلاقة :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

حيث g_0 هي قيمة الجاذبية على سطح الأرض .

ب- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أثبت أن السرعة المدارية للقمر الإصطناعي يعبر عنها بالعلاقة :

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{(R+h)}}$$

جـ- أثبت أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الإصطناعية .

د- جد ارتفاع القمر الإصطناعي h عن سطح الأرض .

يعطى :

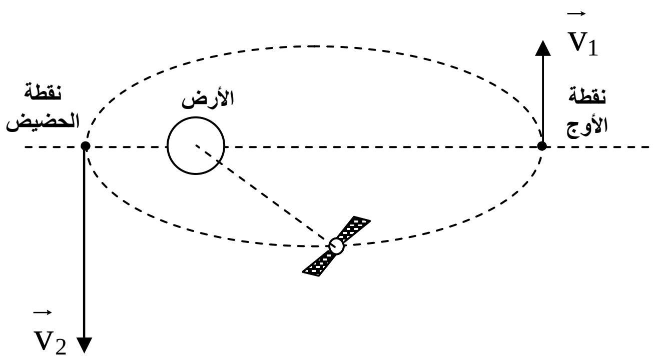
- قيمة الجاذبية الأرضية على سطح الأرض : $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$.
- نصف قطر الأرض : $R_T = 6,38 \,.\, 10^3\ km$.
- دور حركة الأرض حول نفسها : $T = 24\ h$.

الأجوبة :

1- أ- شرح المصطلحين :

- اهليليجي : هو مدار متناظر يحتوي أحد محرقيه الكوكب المركزي (الأرض) .
- جيومستقر ، هو خاصية جسم يدور حول الأرض في مستوي خط الإستواء في نفس جهة دوران الأرض حول نفسها .

ب- الرسم التخطيطي للمسار :



2-أ- إثبات $g = g_0 \dfrac{R^2}{(R+h)^2}$:

من جهة :

- $F = G\dfrac{mM}{r^2}$ .... (1)

و من جهة أخرى

- $F = P = m.g$ .... (2)

من (1) ، (2) :

$$m\,g = G\frac{m.M}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

و هي عبارة الجاذبية على الارتفاع h من سطح الأرض .

على سطح الأرض أين : $h = 0$ ، $g = g_0$ نكتب :

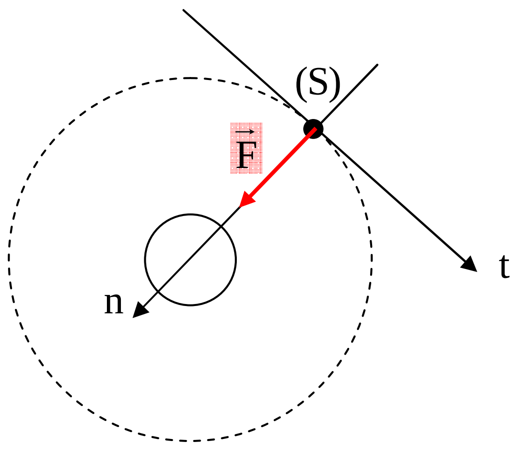
$$g_0 = \frac{G.M}{R^2}$$

- بقسمة عبارة g على g_0 طرف إلى طرف نجد :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\dfrac{G.M}{(R+h)^2}}{\dfrac{G.M}{R^2}} = \frac{G.M}{(R+h)^2}\cdot\frac{R^2}{G.M} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \rightarrow g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

ب- إثبات أن $v = \sqrt{\dfrac{g_0 R^2}{(R+h)}}$:

- الجملة المدروسة : قمر اصطناعي (S) .
- مرجع الدراسة : مركزي أرضي نعتبره غاليلي (جيومركزي) .
- القوة الخارجية المؤثرة على الجملة : قوة الجذب العام ($\vec{F}$) .
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

بإسقاط العلاقة الشعاعية على المحور الناظمي (on) .

$$F = m\,a_n$$

$$m.g = m.a_n$$

$$m.g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{(R+h)}$$

$$g_0 \frac{R^2}{(R+h)} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{(R+h)}}$$

جـ التحقق من قانون كبلر :

$$T = \frac{2\pi\, r}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi\,(R+h)}{\sqrt{\dfrac{g_0.R^2}{R+h}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\,(R+h)^2}{\dfrac{g_0.R^2}{R+h}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2\,(R+h)^3}{g_0.R^2} \rightarrow \frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

π ، G ، M ثوابت و منه النسبة $\dfrac{T^2}{(R+h)^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الإصطناعية .

هـ- ارتفاع القمر الاصطناعي عن سطح الأرض :

مما سبق :

$$T^2 = \frac{4\pi^2\,(R+h)^3}{g_0.R^2} \rightarrow (R+h)^3 = \frac{T^2.g.R^2}{4\pi^2}$$

$$R+h = \sqrt[3]{\frac{T^2.g.R^2}{4\pi^2}} \rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T^2.g.R^2}{4\pi^2}} - R$$

- $T = 24\text{ h} = 24\,.\,3600 = 86400\text{ s}$
- $h = \sqrt[3]{\dfrac{(86400)^2.9{,}8.(6{,}38.10^6)^2}{4\pi^2}} - 6{,}38.10^6 = 3{,}59.10^7\text{ m} \approx 36000\text{ km}$

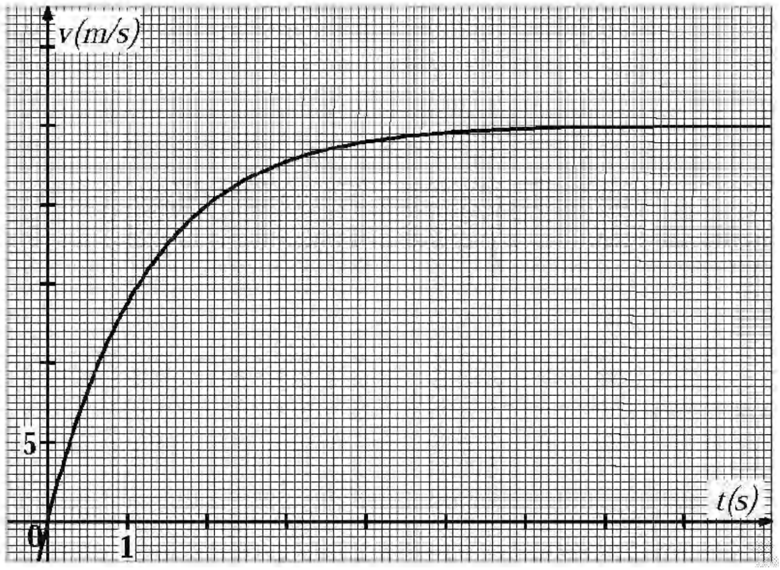
التمرين (28) : (بكالوريا 2013 - علوم تجريبية) (التمرين : 033 في بنك التمارين على الموقع) (**)

تسقط حبة برد كروية الشكل ، قطرها $D = 3\ cm$ ، كتلتها $m = 13\ g$ ، دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ من النقطة O ترتفع بـ $1500\ m$ عن سطح الأرض نعتبرها كمبدأ للمحور الشاقولي (Oz) .

أولا : نفرض حبة البرد تسقط سقوطا حرا .

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، جد المعادلتين الزمنيتين لسرعة و موضع G مركز عطالتيهما .

2- احسب قيمة السرعة لحظة وصولها إلى سطح الأرض .



ثانيا : في الواقع تخضع حبة البرد بالإضافة لقوة ثقلها $\vec{P}$ إلى دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة احتكاك $\vec{f}$ المتناسبة طردا مع مربع السرعة حيث $f = kv^2$.

1- بالتحليل البعدي حدد وحدة المعامل k في النظام الدولي للوحدات .

2- اكتب عبارة قوة دافعة أرخميدس ، ثم احسب شدتها و قارنها مع شدة قوة الثقل . ماذا تستنتج ؟

3- بإهمال قوة دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$:

أ- جد المعادلة التفاضلية للحركة ، ثم بين أنه يمكن كتابتها على الشكل : $\frac{dv}{dt} = A - Bv^2$.

ب- استنتج العبارة الحرفية للسرعة الحدية v_ℓ التي تبلغها حبة البرد .

جـ- جد بيانيا قيمة السرعة الحدية v_ℓ ، ثم استنتج قيمة k .

د- قارن بين السرعتين التي تم حسابهما في السؤالين (أولا-2) و (ثانيا-3-جـ) . ماذا تستنتج ؟

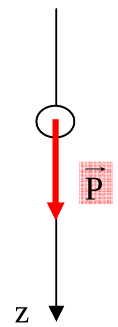
المعطيات : حجم الكرة : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، الكتلة الحجمية للهواء : $\rho = 1.3\ kg.m^{-3}$ ، $g = 9.8\ \ m.s^{-2}$.

الأجوبة :

أولا :

1- المعادلتين الزمنيتين للسرعة و الموضع :

- الجملة المدروسة حبة برد .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$\vec{P} = m\ \ \vec{a}$

بالإسقاط على المحور Oz :

$P = ma$

$m.g = ma \ \rightarrow\ a = g$

g ثابت و منه a ثابت ، و كون أن المسار مستقيم فالحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، لذلك تكون معادلة السرعة من الشكل :

$v = at + v_0$

▪ $a = g = 9,8\ m/s$

▪ $t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow v_0 = 0$

و منه تكون معادلة السرعة كما يلي :

$v = 9{,}8\ t$

كما تكون معادلة المسافة كما يلي :

$$z = \frac{1}{2}\ a\ t^2 + v_0\ t + z_0$$

بالاعتماد على النتائج السابقة :

$z = 4{,}9\ t^2 + z_0$

▪ $t = 0 \rightarrow z = 0 \rightarrow z_0 = 0$

و منه تكون معادلة السرعة كما يلي :

$z = 4{,}9\ t^2$

2- قيمة السرعة لحظة وصول حبة البرد إلى الأرض :

إذا اعتبرنا الموضع M هو موضع سقوط حبة البرد على الأرض عندها يكون : $z_M = 1500\ m$ ، بالتعويض في المعادلة $z(t)$:

$$z_M = \frac{1}{2} g.t_M{}^2 \rightarrow t_M = \sqrt{\frac{2.z_M}{g}} \rightarrow t_M = \sqrt{\frac{2\ .\ 1500}{9.8}} = 17{,}50\,s$$

بالتعويض في المعادلة $v(t)$:

$v_M = g.t_M = 9{,}8\ .\ 17.50 = 171.5\ m/s$

ثانيا :

1- وحدة k بالتحليل البعدي :

$$f = k\ v^2 \rightarrow k = \frac{f}{v^2} \rightarrow [k] = \frac{[F]}{[v]^2}$$

حسب قانون نيوتن الثاني :

$$F = m.a \rightarrow [F] = [m]\ [a]$$

و منه :

$$[k] = \frac{[m][a]}{[v]^2} = \frac{kg\,.\,\frac{m}{s^2}}{\frac{m^2}{s^2}} \rightarrow [k] = kg/m$$

2- عبارة قوة دافعة أرخميدس :

$$\Pi = \rho V g = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)g = \frac{4}{3}\rho\pi(\frac{D}{2})^3.g = \frac{4}{3}\rho\pi\frac{D^3}{8}.g \rightarrow \Pi = \frac{\rho\pi D^3 g}{6}$$

$$\Pi = \frac{1{,}3\ .\ 3{,}14\ (0.03)^3\ .9{,}8}{6} = 1{,}8\ .\ 10^{-4}\ N$$

- مقارنة دافعة أرخميدس بقوة الثقل :

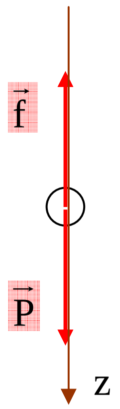
▪ $P = m.g = 13\ .\ 10^{-3}\ .\ 9.8 = 0.1274\ N$

▪ $\frac{P}{\Pi} = \frac{0.1274}{1.8\ .\ 10^{-4}} = 708 \rightarrow P = 708\ \Pi$

نلاحظ أن Π أكبر بكثير من P ، نستنتج أنه يمكن إهمال دافعة أرخميدس أمام قوة الثقل .

3- أ- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : كرة برد
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oz) :

$$P - f = m\,a$$
$$m\,g - kv^2 = ma \rightarrow m\,g - k\,v^2 = m\frac{dv}{dt}$$
$$m\frac{dv}{dt} = m.g - k\,v^2 \quad \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$$

هي من الشكل : $\frac{dv}{dt} = A - B\,v^2$ حيث : $A = g$ ، $B = \frac{k}{m}$.

ب- عبارة السرعة الحدية :

في النظام الدائم يكون : $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، بالتعويض المعادلة التفاضلية :

$$0 = g - \frac{k}{m}v_\ell^{\,2} \quad \rightarrow g = \frac{k}{m}v_\ell^{\,2} \quad \rightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{m.g}{k}}$$

جـ- قيمة v_ℓ بيانيا :

من البيان و عند النظام الدائم يكون :

$$v_\ell = 5\,.\,5 = 25\text{ m/s}$$

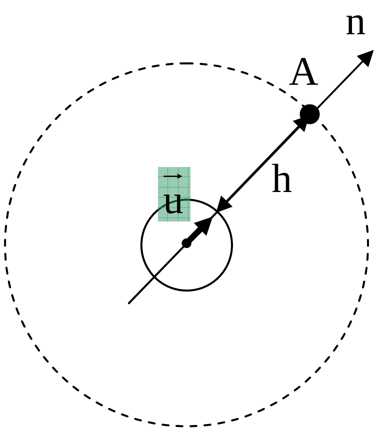
- قيمة k :

مما سبق :

$$v_\ell^{\,2} = \frac{m.g}{k} \rightarrow k = \frac{m.g}{v_\ell^{\,2}} \rightarrow k = \frac{13.\,10^{-3}\,.\,9{,}8}{(25)^2} = 2{,}04\,.\,10^{-4}\text{ kg/m}$$

المقارنة : $v_\ell < v_M$ نستنتج أن تأثير الهواء يخفف من سرعة بلوغ الأرض .

التمرين (29): (التمرين : 031 في بنك التمارين على الموقع) (**)



قمر اصطناعي (S) كتلته m يدور حول الأرض وفق مسار نعتبره دائري (الشكل) على ارتفاع h عن سطحها حيث ينجز 10 دورات خلال 16,5 h . نفرض أن المرجع الأرضي المركزي مرجع غاليلي .

1- حدد المرجع الذي تتم فيه دراسة حركة هذا القمر الاصطناعي . عرفه و ما هي الفرضية المتعلقة بهذا المرجع و التي تسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ؟

2- أعد رسم (الشكل) و مثل عليه شعاع القوة الجاذبة المركزية $\vec{F}$ المطبقة من طرف الأرض على القمر الاصطناعي (S) .

3- عبر عن شعاع القوة $\vec{F}$ بدلالة G ، M ، m ، r ، $\vec{u}$ (شعاع الوحدة) .

4- باهمال تأثير القوى الأخرى على القمر الاصطناعي أمام القوة $\vec{F}$ و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

أ- أوجد عبارة شعاع تسارع القمر الاصطناعي في الموضع A بدلالة G ، M ، r ، $\vec{u}$ ثم استنتج طبيعة حركة القمر الاصطناعي حول الأرض .

ب- أوجد عبارة سرعة القمر الاصطناعي بدلالة M ، G ، r .

جـ- أثبت أن : $\frac{4\pi^2}{G.M_T} = \frac{T^2}{r^3}$.

5- بين أن : $\frac{T^2_s}{r^3} = 9.86 . 10^{-14}\ s^2.m^{-3}$.

6- استنتج M كتلة الأرض .

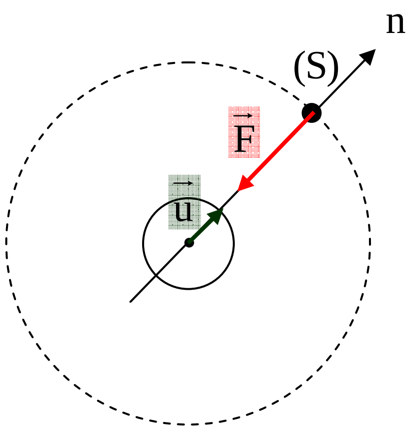
يعطى :

- نصف قطر الأرض : R = 6380 km .
- ثابت الجذب العام : $G = 6,67 . 10^{-11}$ SI .

الأجوبة :

1- المرجع الذي تتم فيه دراسة حركة القمر الإصطناعي هو المرجع المركزي الأرضي (جيو مركزي) .
- الفرضية المتعلقة بهذا المرجع و التي تسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن هو أنه يكون غاليلي .

2- تمثيل القوة $\vec{F}$:



3- عبارة $\vec{F}$ بدلالة G ، M ، m ، r ، $\vec{u}$:

$$\vec{F} = -\frac{G.m.M}{r^2}\vec{u}$$

4-أ- عبارة شعاع التسارع $\vec{a}$ بدلالة G ، M ، m ، r ، $\vec{u}$:

الجملة المدروسة : قمر اصطناعي (S) .
- مرجع الدراسة : مركزي أرضي (جيومركزي) نعتبره غاليلي.
- القوة الخارجية المؤثرة على الجملة : قوة الجذب العام ($\vec{F}$) .
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$-\frac{G.m.M}{r^2}\vec{u} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = -\frac{G.M}{r^2}\vec{u}$$

طبيعة الحركة :

من عبارة التسارع $\vec{a}$ السابقة ، G ، M ، r ثوابت و منه شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت في الطويلة ، كما أنه متجه دوما نحو المركز كون أنه له نفس حامل شعاع الوحدة $\vec{u}$ الذي مبدأه مركز الأرض . إذن حركة القمر الإصطناعي دائرية منتظمة .

ب- عبارة سرعة القمر الإصطناعي بدلالة M ، G ، r :

من عبارة $\vec{a}$ السابقة :

$$a_n = \frac{G.M}{r^2}$$

و لدينا $a_n = \frac{v^2}{r}$ و منه :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G.M}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

جـ- إثبات أن $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\, r}{\sqrt{\frac{G.M}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\, r^2}{\frac{G.M}{r^2}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\, r^3}{G.M} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

5- إثبات أن : $\frac{T^2{}_s}{r^3} = 9.86\,.10^{-14}\ s^2.m^{-3}$:

- نحسب أولا دور الحركة T .
- حسب تعريف الدور :

$$\begin{cases} 10 \text{ دورة} \rightarrow 16{,}5\ .\ 3600\ s \\ 1 \text{ دورة} \rightarrow T \end{cases}$$

و منه :

$$T = \frac{16{,}5\ .\ 3600}{10} = 5940\, s$$

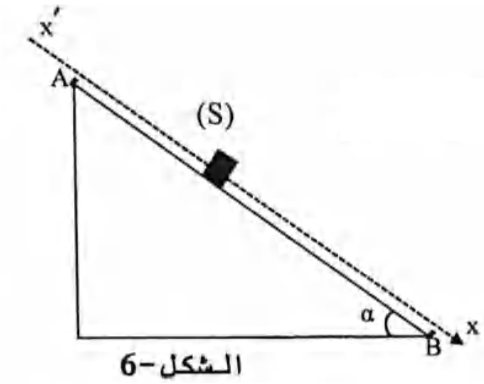
و منه :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{(5940)^2}{(6400\ .\ 10^3 + 700.10^3)^3} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = 9{,}86\,.10^{-14}\ s^2.m^{-3}$$

6- كتلة الأرض M :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M} \rightarrow M = \frac{4\pi^2}{G.\frac{T^2}{r^3}} \rightarrow M = \frac{4\pi^2}{6{,}67\,.10^{-11}\ .\ 9{,}86\,.10^{-14}} \approx 6\,.10^{24}\ kg$$

التمرين (30) : (بكالوريا 2016 – علوم تجريبية)(التمرين : 086 في بنك التمارين على الموقع) (**)



نعتبر $g = 10\ m/s^2$

يتحرك جسم (S) نعتبره نقطيا كتلته $m = 900\ g$ على مسار مستقيم AB مائل عن الأفق بزاوية $\alpha = 34°$ كما هو موضح بالشكل-6 .

ينطلق الجسم من النقطة A دون سرعة ابتدائية . باستعمال تجهيز مناسب ننجز التصوير المتعاقب لمواضع الجسم أثناء حركته على المسار AB فنحصل على النتائج المدونة في الجدول الآتي :

الموضع	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
اللحظة t(s)	0,00	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64
الفاصلة x(cm)	0,0	1,5	6,0	13,5	24,0	37,5	54,0	73,5	96,0

ينطبق الموضع G_0 على النقطة A و ينطبق الموضع G_8 على النقطة B ، و المدة التي تفصل بين تسجيلين متتاليين هي $\tau = 80\ ms$.

1- أ- احسب السرعة اللحظية للجسم عند المواضع G_2 ، G_3 ، G_4 ، G_5 ، G_6 .

ب- اوجد قيمة تسارعه عند المواضع G_3 ، G_4 ، G_5 .

جـ- استنتج طبيعة حركته .

2- باهمال قوى الاحتكاك المؤثرة على الجسم (S) :

أ- مثل القوى المطبقة على الجسم (S) .

ب- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المعلم السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا ، أوجد عبارة التسارع (a) لمركز عطالة الجسم ثم أحسب قيمته .

جـ- قارن بين هذه القيمة النظرية للتسارع و قيمته التجريبية الموجودة سابقا ، ماذا تستنتج ؟

3- باعتبار قوى الاحتكاك تكافئ قوة وحيدة $\vec{f}$ ثابتة في الشدة و معاكسة لجهة الحركة .

أ- احسب شدة القوة $\vec{f}$.

ب- باستخدام مبدا إنحفاظ الطاقة أوجد قيمة سرعة الجسم عند النقطة B .

جـ- قارن بين هذه القيمة النظرية للتسارع و قيمته التجريبية الموجودة سابقا ، ماذا تستنتج ؟

3- باعتبار قوى الاحتكاك تكافيء قوة وحيدة $\vec{f}$ ثابتة في الشدة و معاكسة لجهة الحركة .

أ- احسب شدة القوة $\vec{f}$.

ب- باستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة أوجد قيمة سرعة الجسم عند النقطة B .

الأجوبة :

1- أ- السرعة اللحظية عند المواضع G_2 ، G_3 ، G_4 ، G_5 ، G_6 :

$$v_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{1+1} - t_{i-1}}$$

و بالتالي :

- $$v_2 = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{(13,5 - 1,5).10^{-2}}{0,24 - 0,08} = 0,75\ m/s$$

- $v_3 = \dfrac{x_4 - x_2}{t_4 - t_2} \quad \dfrac{(24-6).10^{-2}}{0{,}32-0{,}16} = 1{,}125\ m/s$
- $v_4 = \dfrac{x_5 - x_3}{t_5 - t_3} = \dfrac{(37{,}5-13{,}5).10^{-2}}{0{,}4-0{,}24} = 1{,}5\ m/s$
- $v_5 = \dfrac{x_6 - x_4}{t_6 - t_4} = \dfrac{(54-24).10^{-2}}{0{,}48-0{,}32} = 1.875\ m/s$
- $v_6 = \dfrac{x_7 - x_5}{t_7 - t_5} = \dfrac{(73{,}5-37{,}5).10^{-2}}{0{,}5-0{,}4} = 2{,}25\ m/s$

ب- التسارع :

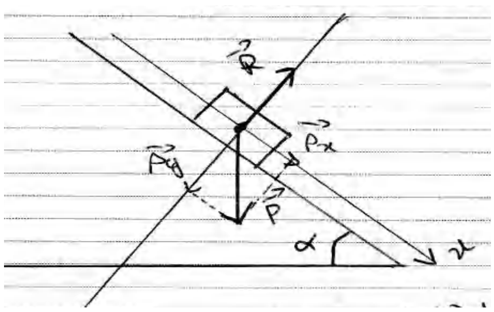
$$a_i = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{t_{1+1} - t_{i-1}}$$

و بالتالي :

- $a_3 = \dfrac{v_4 - v_2}{t_4 - t_2} = \dfrac{1{,}5-0{,}75}{0{,}32-0{,}16} = 4{,}7\ m/s^2$
- $a_4 = \dfrac{v_5 - v_3}{t_5 - t_3} = \dfrac{1{,}875-1{,}125}{37{,}7-16{,}5} = 4{,}7\ m/s^2$
- $a_5 = \dfrac{v_6 - v_4}{t_6 - t_4} = \dfrac{2{,}25-1{,}5}{0{,}48-0{,}32} = 4{,}7\ m/s^2$

جـ- نلاحظ : $a_3 = a_4 = a_5$.
هذا يعني أن قيمة التسارع ثابتة اثناء الحركة ، و كون أن المسار مستقيم ، نستنتج أن حركة G على المستوي المائل مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- أ- تمثيل القوى المطبقة :



ب- عبارة التسارع :
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة جسم (S) في مرجع غاليلي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

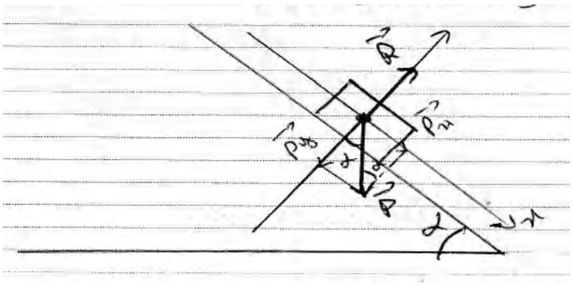
بالإسقاط على ox :

$P\sin\alpha = ma_0$
$m.g.\sin\alpha = ma_0 \rightarrow a_0 = g.\sin\alpha$
$a_0 = 10 . \sin(35°) = 5{,}74\ m/s^2$

جـ- المقارنة بين القيمة التجريبية للتسارع و القيمة النظرية :

نلاحظ أن $a \neq a_0$ ، نستنتج أنه يوجد احتكاك .

3- أ- شدة قوة الاحتكاك :



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة جسم (S) في مرجع غاليلي :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

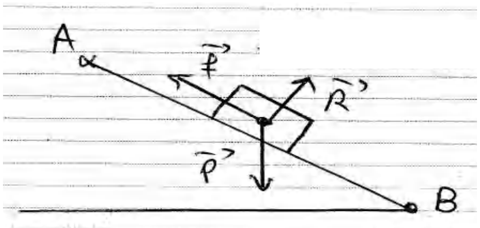
بالإسقاط على المحور 'xx :

$$P.\sin\alpha - f = ma$$

$$m.g.\sin\alpha - m.a \rightarrow f = m(g.\sin\alpha - a)$$

$$f = 0,9\ (\ 10 \sin(35) - 4,7) = 0,93\ N$$

ب- قيمة السرعة عند B :



- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و B على الجملة جسم (S) في مرجع غاليلي :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{A\text{-}B}(\vec{P}) - \left|W_{A\text{-}B}(\vec{f})\right| = E_{CB}$$

$$0 + m.g.AB.\sin\alpha\ -\ |-f\ .\ AB| = \frac{1}{2}m.v_B{}^2$$

$$0 + m.g.AB.\sin\alpha\ -\ |-f\ .\ AB| = \frac{1}{2}m.v_B{}^2 \rightarrow m.g.AB.\sin\alpha\ -\ f.AB\ = \frac{1}{2}m.v_B{}^2$$

$$2(m.g.AB.\sin\alpha\ -\ f.AB)\ = m.v_B{}^2\ \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2(m.g.AB.\sin\alpha\ -\ f.AB)}{m}}$$

من الجدول :

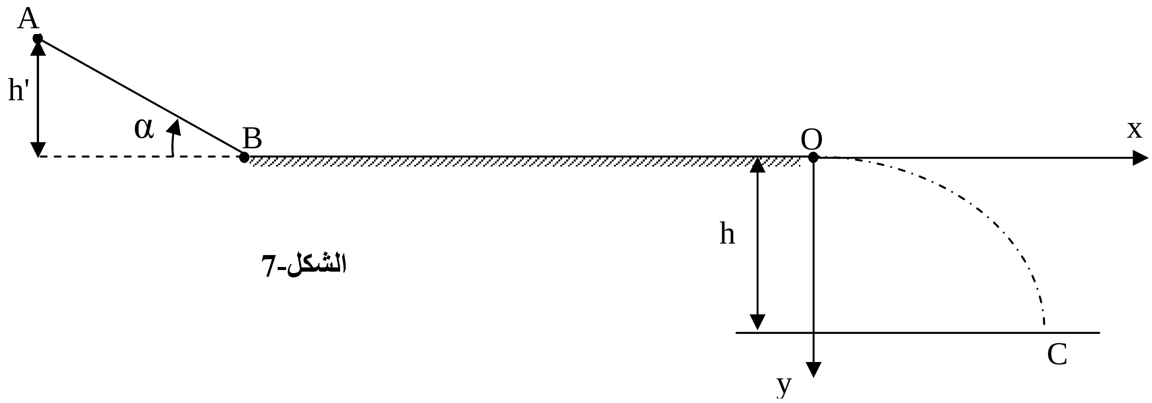
$$AB = x_8 - x_0 = 96\ cm = 0,96\ m$$

و منه :

$$v_B = \sqrt{\frac{2(\ 0,9\,.\,10\,.\,0,96\sin(35)\ -\ (0,93\,.\,0,96)\ )}{0,9}} = 3\,m/s$$

التمرين (31): (التمرين : 108 في بنك التمارين على الموقع) (**)

من النقطة (A) أعلى مستوي مائل طوله $AB = 0,5\ m$ ، نقذف كريـة (S) كتلتها $m = 1\ kg$ بسرعة ابتدائية $v_A = 2\ m/s$ لتلاقي بعد ذلك مستويا أفقيا طوله $BO = 2\ m$ ، ثم تغادر المستوي (BO) عند النقطة (O) بسرعة ابتدائية أفقية v_0 لتسقط في الفضاء فتلاقي المستوي الأفقي الذي يقع أسفل المستوي الأول بمسافة h في النقطة (C) (الشكل-7) .



الشكل-7

بتغيير الارتفاع h ثم قياس قيمة فاصلة موقع السقوط (C) تحصلنا على النتائج المدونة في الجدول التالي :

y (m)	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
x (m)	0.40	0,57	0,69	0,80	0.89
x^2 (m)					

1- اكمل الجدول السابق ، ثم ارسم البيان $y = f(x^2)$ باستعمال سلم رسم مناسب ، ماذا تستنتج ؟

2- ادرس طبيعة حركة مركز عطالة الكرية في المعلم السابق مع تحديد المرجع المختار معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة مغادرة الكرية النقطة (O) . نهمل مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس .

- استنتج معادلة المسار $y = f(x)$.

3- استنتج مما سبق قيمة v_0 ، يؤخذ $g = 10\ m/s^2$.

4- أنجز مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة (كرية) بين الموضعين O و C ثم اكتب معادلة انحفاظ الطاقة الموافقة ثم استنتج سرعة مركز عطالة الكرية لحظة بلوغها الموضع C من أجل $h = 0,8\ m$.

5- حدد خصائص شعاع سرعة مركز عطالة الكرية $\vec{v}_C$ لحظة بلوغها الموضع C .

6- جد عبارة الطاقة الكلية للجملة (كرية + أرض) عند الموضعين O و C بدلالة v_0 ، h ، g و m كتلة الكرية . ماذا تستنتج ؟ (نعتبر المستوي الأفقي المار من C مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية)

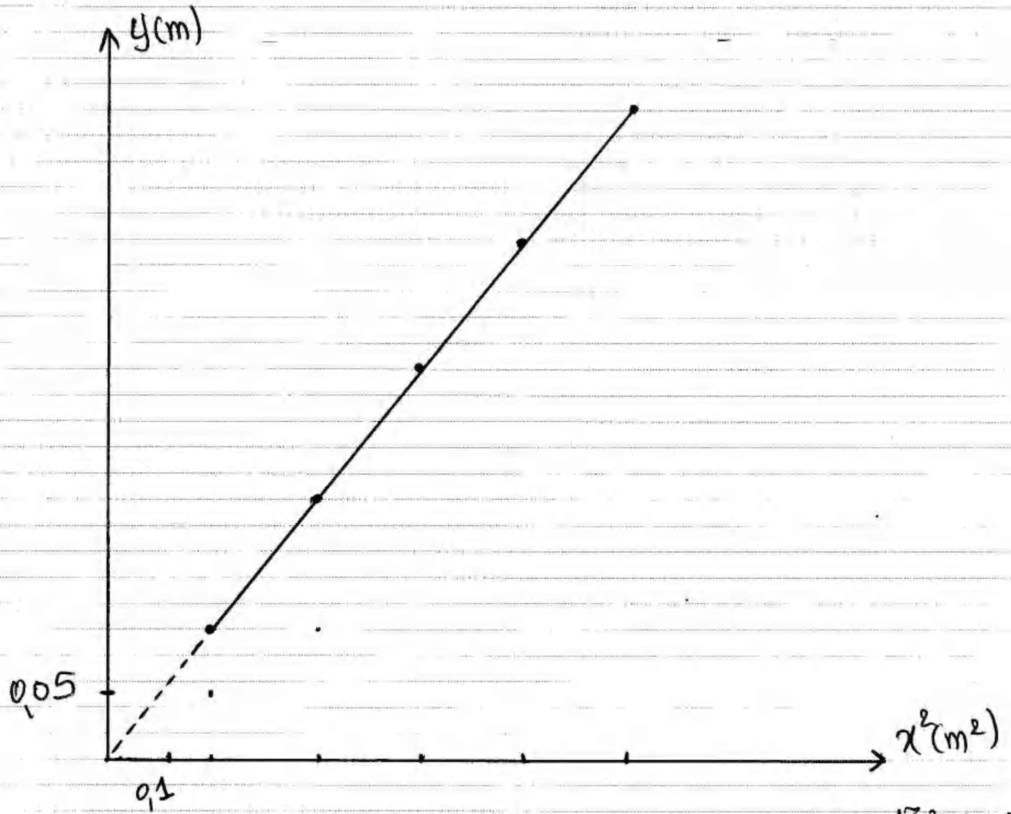
7- تتناقص سرعة الكرية أثناء انتقالها من الموضع B إلى الموضع O ، بسبب وجود قوة احتكاك حاملها يوازي المستوي (BO) ، جهتها معاكسة لجهة الحركة و قيمتها ثابتة . أحسب شدة قوة الاحتكاك f ، إذا علمت أن الكرية تبلغ الموضع B بسرعة $v_B = 3\ m/s$.

8- أدرس طبيعة حركة الكرية (S) على المستوي AB ، ثم احسب تسارع الحركة a و قيمة الزاوية α .

الأجوبة :

1- إكمال الجدول ورسم البيان $y=f(x^2)$:

$y(m)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x(m)$	0,40	0,57	0,69	0,80	0,89
$x^2(m^2)$	0,16	0,32	0,48	0,64	0,79



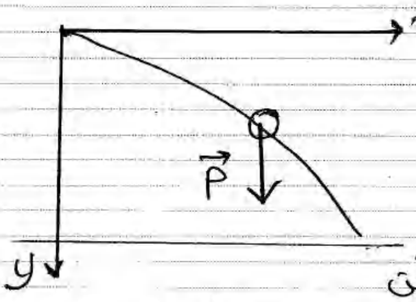
الاستنتاج :

المنحنى $y(x)$ هو مستقيم معادلته من الشكل $y= x^2$

حيث هو معامل التوجيه ، نستنتج أن y يتناسب

طرديا مع x^2 .

2- طبيعة حركة الكرة :



- الجملة المدروسة : كرة (ك)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي
- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

بالاسقاط على المحورين ox ، oy :

$$\begin{cases} 0 = m a_x \\ P = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m a_x \\ mg = m a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

- مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة.
- مسقط حركة الكرة على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام (متسارعة).

*معادلة المسار :

وجدنا سابقا :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

اعتمادا على ما سبق :

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = a_y\, t + v_{0y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = g\, t + v_{0y} \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 = v_{0x} \rightarrow v_{0x} = v_0 \\ 0 = g\,(0) + v_{0y} \rightarrow v_{0y} = 0 \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = g\,t \end{cases}$$

و يكون أيضا :

$$\begin{cases} x = v_{0x}\,t + x_0 \\ y = a_y\,t^2 + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0\,t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} g\,t^2 + y_0 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0\,(0) + x_0 \rightarrow x_0 = 0 \\ 0 = \frac{1}{2} g\,(0)^2 + y_0 \rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0\,t \\ y = \frac{1}{2} g\,t^2 \end{cases}$$

- من المعادلة $x(t)$: $t = \frac{x}{v_0}$ بالتعويض في المعادلة $y(t)$:

$$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \rightarrow \boxed{y = \frac{g}{2v_0^2} x^2}$$

3- قيمة v_0 :

- بيانيا :

$$y = K x^2 \text{------} (1)$$

- نظريا ومن معادلة المسار

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \text{-----} (2)$$

بمطابقة العلاقتين (1) ، (2) :

$$\frac{g}{2v_0^2} = K \longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g}{2K}}$$

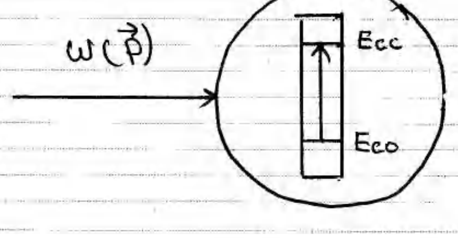
من البيان :

$$K = \frac{0{,}1}{0{,}16} = 0{,}625$$

اذن :

$$v_0 = \sqrt{\frac{10}{2 \times 2 \times 0{,}625}} = 2\,m/s$$

4- مخطط الحصيلة الطاقوية بين O و C :



4- معادلة انحفاظ الطاقة :

$$E_{CO} + W_{O-C}(\vec{P}) = E_{CC}$$

- سرعة مركز عطالة الكرية عند الموضع C :

من معادلة انحفاظ الطاقة السابقة :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + gh = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$v_0^2 + 2gh = v_C^2 \rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$v_C = \sqrt{(2)^2 + (2 \times 10 \times 0{,}8)} = 4{,}47\,m/s$$

5- خصائص شعاع السرعة عند الموضع C :

- المبدأ : الموضع C .

- الحامل : يصنع الزاوية α حيث :

$$\cos\alpha = \frac{v_{xC}}{v_C}$$

- $v_{xC} = v_0 = 2\,m/s$ (الحركة مستقيمة منتظمة على ox)
- $v_C = 4{,}47\,m/s$ (حسبت سابقا)

- الجهة : نحو الاسفل

- الطويلة : $v_C = 4\,m/s$.

6- عبارة الطاقة الكلية للجملة (كرية + أرض) عند O و C :

$$E = E_C + E_{PP}$$

عند الموضع (O) :

$$E_{(O)} = E_{CO} + E_{PPO}$$

$$E_{(O)} = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$$

عند الموضع (c) :

$$E_{(c)} = \frac{1}{2} m v_c^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_c^2$$

لدينا سابقا :

$$v_c^2 = v_0^2 + 2gh$$

ومنه :

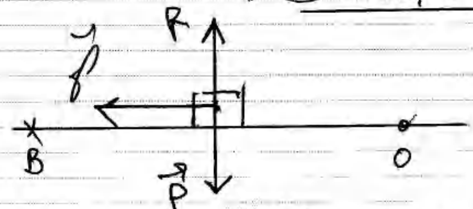
$$E_{(c)} = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + 2gh \right)$$

$$E_{(c)} = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$$

الاستنتاج :

نلاحظ $E_{(c)} = E_{(0)}$ ، نستنتج أن طاقة الجملة (كرية + أرض محفوظة) .

7- شدة قوة الاحتكاك :



بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة كرية (s) بين الموضعين B و O :

$$E_B + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_0$$

$$E_{CB} - |W(f)| = E_{C0}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - |-f \cdot BO| = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - f \cdot BO = \frac{1}{2} m v_0^2$$

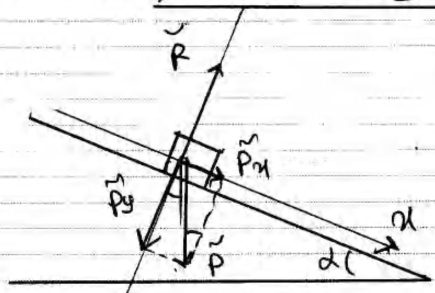
$$m v_B^2 - 2 \cdot f \cdot BO = m v_0^2$$

$$m v_B^2 - m v_0^2 = 2 f \cdot BO$$

$$m(v_B^2 - v_0^2) = 2 f \cdot BO \rightarrow f = \frac{m(v_B^2 - v_0^2)}{2 \cdot BO}$$

$$f = \frac{1\left((3)^2 - (2)^2\right)}{2 \times 0.5} = 5N$$

8- دراسة طبيعة الحركة على AB :



نطبق القانون الثاني على الجملة كرة (s) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور ox :

$$P\sin\alpha = ma$$

$$mg\sin\alpha = ma \rightarrow a = g \cdot \sin\alpha$$

• m ، g ، α ثوابت ومنه a ثابت وكون أن مسار مركز عطالة (s) مستقيم فالحركة اذن مستقيمة متغيرة بانتظام (متسارعة).

- التسارع a :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a \cdot AB$$

$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2 \cdot AB} =$$

$$a = \frac{(3)^2 - (2)^2}{2 \times 0,5} = 5\ m/s^2$$

- الزاوية α :

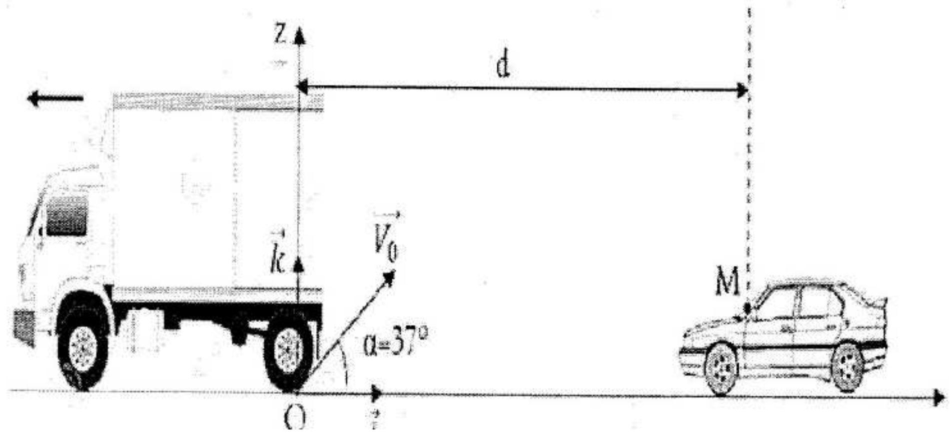
لدينا :

$$a = g\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{g}$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{10} = 0,5 \rightarrow \alpha = 30^\circ .$$

التمرين (32) : (بكالوريا 2016 – علوم تجريبية) (التمرين : 046 في بنك التمارين على الموقع) (**)

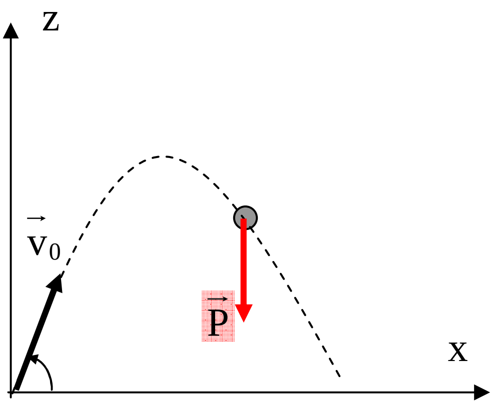
نهمل تاثير الهواء و تأخذ $g = 9.8\ m.s^{-2}$.
شاحنة تسير على طريق مستقيم أفقي ، في لحظة نعتبرها مبدا لقياس الأزمنة $t = 0$ تقذف العجلة الخلفية للشاحنة نحو الوراء من نقطة O من سطح الأرض حجرا نعتبره نقطيا بسرعة ابتدائية $v_0 = 12\ m.s^{-1}$ يصنع حاملها زاوية $\alpha = 37°$ مع الأفق فيرتطم بالنقطة M من الزجاج الأمامي لسيارة تسير خلف الشاحنة و في نفس جهة حركتها بسرعة ثابتة قدرها $90\ km.h^{-1}$. في اللحظة $t = 0$ كانت المسافة الأفقية بين النقطة O و النقطة M : $d = 44\ m$.
انظر الشكل



1- ادرس حركة الحجر في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ثم استخرج العبارتين الحرفيتين للمعادلتين الزمنيتين للحركة $x(t)$ ، $z(t)$.
2- اكتب معادلة مسار الحجر $z = f(x)$.
3- اكتب المعادلة الزمنية x_M لحركة النقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
4- احسب قيمة t_M لحظة ارتطام الحجر بالزجاج الأمامي للسيارة و استنتج الارتفاع h للنقطة M عن سطح الأرض .
5- باستعمال معادلة انحفاظ الطاقة احسب قيمة سرعة ارتطام الحجر بزجاج السيارة .

الأجوبة :

1- دراسة الحركة و المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ ، $z(t)$:



- الجملة المدروسة : حجر .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المحورين المحورين (ox) ، (oz) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_z \end{cases} \Longrightarrow \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

إذن : ▪ مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .
▪ مسقط حركة الكرة على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

<u>المعادلات الزمنية :</u>

لدينا

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_z = a_y\,t + v_{0y} \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases} x = v_{0x}\,t + x_0 \\ z = a_z\,t^2 + v_{0z}\,t + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\,t + x_0 \\ z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\,t + z_0 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\,t \\ z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\,t \end{cases}$$

2- معادلة المسار :

من المعادلة $x = f(t)$ لدينا $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ و بالتعويض في $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha \, x$$

3- المعادلة الزمنية للنقطة M :

- حركة النقطة M من السيارة مستقيمة منتظمة في الإتجاه السالب للمحور ox و عليه :

$x = v_x + x_0$

- $v_x = - 90 \text{ km/h} = - 25 \text{ m/s}$
- $t = 0 \rightarrow x = d \rightarrow x_0 = d = 44 \text{ m}$

إذن :

$x = - 25 t + 44$

4- قيمة t_M :

- على المحور ox يتحرك الحجر بحركة مستقيمة منتظمة (مسقط الحركة) وفق المعادلة :

$x = v_0 \cos\alpha \, t$

$x = 12 . \cos37 \, t \rightarrow x = 9.58 \, t$

- على نفس المحور و في الإتجاه المعاكس تتحرك النقطة M وفق المعادلة :

$x = - 25 t + 44$

- عند التلاقي (الإرتطام) في النقطة M تكون للنقطة M و مركز عطالة الحجر نفس الفاصلة و بالتالي يكون :

$9.58 \, t_M = - 25 \, t_M + 44$

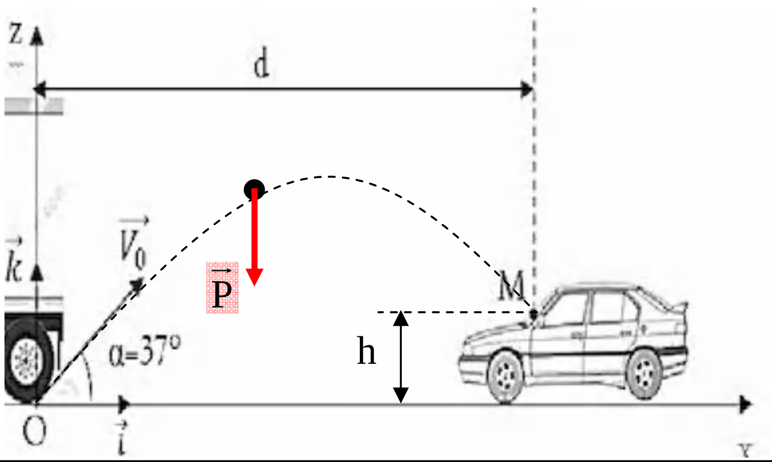
$34.58 \, t_M = 44 \rightarrow t_M = \dfrac{44}{34.58} = 1.27 \text{ s}$

قيمة h :

لدينا : $h = Z_M$ ، بتعويض $t_M = 1.27 \text{ s}$ في العبارة $z(t)$ نجد :

$h = z_M = - \dfrac{1}{2} .9.8 \, (1.27)^2 + (12 .\sin37°.1.27) \rightarrow h = 1.27 \text{ m}$

قيمة v_M :



- الجملة المدروسة : حجر .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين O و M :

$$E_O + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_M$$

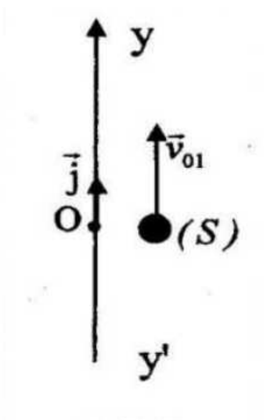
$$E_{CO} - \left| W_{AB}(\vec{P}) \right| = E_{CM}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \left| -m.g.h \right| = \frac{1}{2}mv_M^2 \quad \rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 - g.h = \frac{1}{2}v_M^2$$

$$v_0^2 - 2g.h = v_M^2 \quad \rightarrow \quad v_M = \sqrt{v_0^2 - 2g.h}$$

$$v_M = \sqrt{(12)^2 - 2\,.\,10\,.1,27} = 10.89\ m/s$$

التمرين (33) : (بكالوريا المغرب 2015) (التمرين : 102 في بنك التمارين على الموقع) (**)



الشكل 1

يشكل السقوط الحر للأجسام الصلبة في الهواء من الحركات التي تتعلق طبيعتها و مساراتها بالشروط الابتدائية . تمكن دراسة هذه الحركات من تحديد بعض المقادير المميزة لها و ربطها بتطبيقات من المحيط .

يهدف هذا التمرين إلى دراسة حركة السقوط الحر لكرية (S) بالنسبة لاتجاهات مختلفة لجهة شعاع السرعة الابتدائية .

- جميع الاحتكاكات مهملة .
- $g = 10\ m/s^2$.

I- حركة السقوط الحر الشاقولي لكرية :

ندرس حركة مركز العطالة G للكرية (S) ذات الكتلة m في معلم $(O, \vec{j})$ مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا .

من الموضع O مبدأ الفواصل نقذف شاقوليا نحو الأعلى عند اللحظة $t = 0$ الكرية (S) بسرعة ابتدائية قيمتها $v_{01} = 5\ m.s^{-1}$ (الشكل-1) .

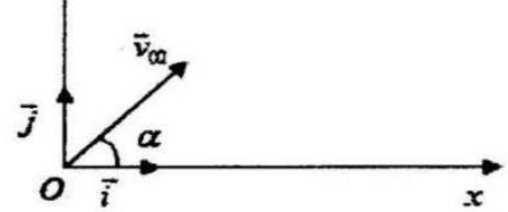
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أثبت أن المعادلة التفاضلية التي يحققها y(t) هي : $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$.

2- أوجد معادلة السرعة v (t) .

3- قيمة y عند أعلى موضع يبلغه G .

II- حركة السقوط الحر في مستوي :

نقذف من جديد ، من الموضع O ، الكرية (S) السابقة بسرعة ابتدائية v_{02} يصنع شعاعها زاوية α من الخط الأفقي . ندرس حركة مركز العطالة G للكرية (S) في المعلم $(O, \vec{j}, \vec{k})$ مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا (الشكل-2) .

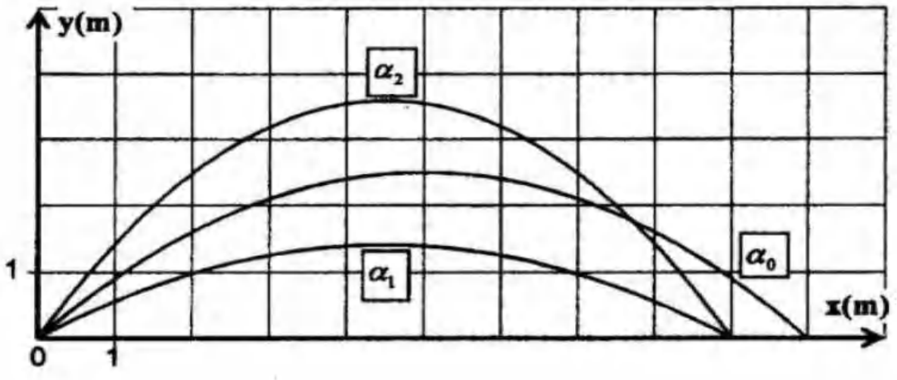


الشكل 2

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أكتب المعادلات الزمنية للحركة و كذا معادلة المسار .

2- بين أن المدى يعبر عنه بالعلاقة : $x_p = \frac{v_{02}^2.\sin(2\alpha)}{g}$.

3- باستعمال برمجيات مناسبة ، ثم الحصول على وثيقة (الشكل-3) الممثلة لمسارات حركة مركز العطالة G بالنسبة لنفس قيمة السرعة الابتدائية v_{02} و لزوايا القذف α حيث $\alpha_0 = 45°$.



الشكل 3

أ- استنتج قيمة v_{02} .

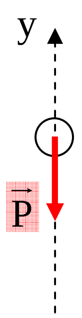
ب- حدد قيمة الزاوية α_1 . استنتج قيمة الزاوية α_2 علما أن : $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$ و $\alpha_2 > \alpha_1$.

جـ- عند الذروة تكون سرعة G القيمة v_1 بالنسبة لزاوية القذف α_1 و القيمة v_2 بالنسبة لزاوية القذف α_2 . اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة التالية : $v_1 = 0.4\ v_2$ ، $v_1 = 0.8\ v_2$ ، $v_1 = 1.6\ v_2$ ، $v_1 = 3.2\ v_2$.

الأجوبة :

I- 1- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : كرية (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور oy :

$$- P = m.a$$

$$- m.g = m.\frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = - g$$

2- معادلة السرعة :

$$\frac{d^2y}{dt} = - g \rightarrow a = - g$$

التسارع ثابت و منه الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، لذلك يكون :

$$v = at + v_0$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v_0 = v_{01}$$

و منه :

$$v = - gt + v_{01}$$

3- الفاصلة عند أعلى موضع يبلغه مركز عطالة (S) :

الطريقة الأولى :

$$v^2 - v_{01}^2 = 2a\,(y - y_0)$$

$$v^2 - (0)^2 = 2a\,(y - (0)) \rightarrow \quad y = \frac{-\,v_{01}^{\;2}}{2.a}$$

▪ $a = -\,g = -\,10\ m/s^2$

▪ $y = \dfrac{-\,(5)^2}{2(-10)} = 1.25\ m$

الطريقة الثانية :

نكتب المعادلة الزمنية :

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$$

$$y = \frac{1}{2}(-10)\,t^2 + 5\,t \quad \rightarrow \quad y = -5\,t^2 + 5\,t$$

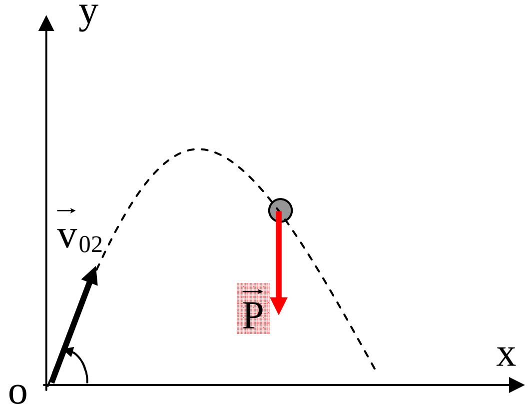
عند بلوغ أقصى ارتفاع يكون $v = 0$ بالتعويض في $v(t)$:

$$0 = -5\,t^2 + 5\,t \quad \rightarrow \quad t^2 = 5\,t \quad \rightarrow \quad t = 5\ s$$

بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\,5(0.5)^2 + (\,5\,.\,0{,}5) = 1.25\ m$$

II- 1- المعادلات الزمنية و معادلة المسار :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المحورين المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -\,P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -\,m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = a_y\, t + v_{0y} \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\, t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

و لدينا أيضا :

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t + x_0 \\ y = a_y\, t^2 + v_{0y}\, t + y_0 \end{cases}$$

و مما سبق :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + x_0 \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

- من المعادلة $x = f(t)$ لدينا $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ و بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x$$

<u>2- إثبات $x_p = \dfrac{v_{02}^2 . \sin(2\alpha)}{g}$:</u>

عند بلوغ المدى يكون $(y = 0 , x = x_P)$ ، بالتعويض في معادلة المسار :

$$0 = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos\alpha^2} x_P^2 + \tan\alpha\, x_P$$

$$\frac{g}{2v_0^2\cos\alpha^2}x_P^2 = \tan\alpha\, x_P \quad \rightarrow \quad \frac{g}{2v_0^2\cos\alpha^2}x_P = \tan\alpha$$

$$g\,x_P = 2.v_{02}^2\cos\alpha^2 \,.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$g\,x_P = v_{02}^2\,\underbrace{(2\cos\alpha\,.\sin\alpha)}_{\sin2\alpha}$$

و منه يصبح :

$$g\,x_P = v_{02}^2\sin2\alpha \quad \rightarrow \quad x_P = \frac{v_{02}^2\sin2\alpha}{g}$$

3- أ- قيمة v_{02} :

اعتمادا على عبارة x_P السابقة :

$$g\,x_P = v_{02}^2\,(2\cos\alpha\,.\sin\alpha) \quad \rightarrow v_{02} = \sqrt{\frac{g\,x_P}{\sin2\alpha}}$$

اعتمادا على الوثيقة من أجل $\alpha_0 = 45°$ يكون $x_P = 10\text{ m}$ ، بالتعويض :

$$v_{02} = \sqrt{\frac{10.\,10}{\sin(2.45)}} = 10\text{ m/s}$$

ب- تحديد قيمة الزاوية α_1 :

بالاعتماد على عبارة x_P السابقة :

$$x_P.g = v_{02}^2.\sin(2\alpha) \;\rightarrow\; \sin(2\alpha) = \frac{x_P.g}{v_{02}^2}$$

لدينا من أجل α_1 ، α_2 يكون : $x_P = 9\text{ m}$ ، بالتعويض :

$$\sin(2\alpha) = \frac{9\;.\;10}{(10)^2} = 0.9$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 64° \\ 2\alpha_1 = 180° - 64° \;= 116° \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 32° \\ \alpha_2 = 116° \end{cases}$$

جـ- الجواب الصحيح :

لدينا سابقا :

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -\,gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

و لدينا :

$$v = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{2y}^2}$$

عند الذروة (S) : $v_{1y} = 0$ و منه :

$$v_S = \sqrt{v_{1x}^2 + (0)^2} \quad \rightarrow \; v_S = |v_{1x}|$$

- $\alpha_1 \;\rightarrow\; v_1 = v_{02}\cos\alpha_1$
- $\alpha_2 \;\rightarrow\; v_2 = v_{02}\cos\alpha_2$

بقسمة v_1 على v_2 :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_{02}\cos\alpha_1}{v_{02}\cos\alpha_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \rightarrow v_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} v_2$$

$$v_1 = \frac{\cos 32}{\cos 58} v_2 \rightarrow v_1 = 1.6\ v_2$$

** الأستاذ : فرقاني فارس **
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم
الخروب - قسنطينة
Fares_Fergani@yahoo.Fr

نرجو إبلاغنا عن طريق البريد الإلكتروني بأي خلل في الدروس أو التمارين و حلولها .
وشكرا مسبقا

لتحميل نسخة من هذا الملف و للمزيد . أدخل موقع الأستاذ :

www.sites.google.com/site/faresfergani