اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية   المدة: 3 ساعات

التمرين الأول : (٤ نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 وأربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 3 وكريتان خضراوان تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكريات لانفرق بينها عند اللمس)
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس .

1. أحسب احتمالات الأحداث التالية :
   - A: " الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني الجزائري " .
   - C: " الحصول على الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها 4 "
   - D: " الحصول على كرية حمراء على الأقل من بين الكريات الثلاث المسحوبة "
2. بين أن : $P(A \cap C) = \dfrac{1}{12}$
3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة .
   - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثاني : (٥ نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 + 3^n.u_n}$

1. أحسب u_1 و u_2
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$
3. أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .
4. نعرّف على $\mathbb{N}$ المتتالية العددية (v_n) كما يلي : $v_n = exp\left(\dfrac{1}{3^n.u_n}\right)$
   (ا) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
   (ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{1}{(n+3)3^{n-1}}$
   (ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
5. نضع من أجل عدد طبيعي n : $S_n = u_0.\ln(v_0) + u_1.\ln(v_1) + \cdots + u_n.\ln(v_n)$
   – بين أنه من أجل عدد طبيعي n : $S_n = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

التمرين الثالث : (٣ نقاط)

نعتبر التكاملات التالية : $I=\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$ ، $J=\int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$ ، $K=\int_1^e \frac{(x^2+1)\ln x}{x(x+1)^2}dx$

1. أوجد العددان الحقيقيان a و b حيث : $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$ ، ثم استنتج قيمة I .
2. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $J=I-\frac{1}{e+1}$ ، ثم استنتج قيمة J.
3. بيّن أن : $K+2J=\frac{1}{2}$ ثم استنتج قيمة K .

التمرين الرابع : (٨ نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=-2+(2x-1)e^{2x}$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
2. بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.7<\alpha<0.8$.
3. استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=-2x+1+(x-1)e^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
2. (ا) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل $(\triangle)$ يطلب تعيين معادلة له .

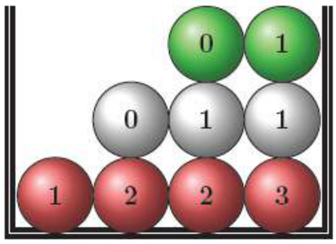
   (ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
3. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) في نقطة يطلب تعيينهما ، ثم أكتب معادلة له
6. بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .
7. أرسم كلا من : (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) .
8. m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=-2x+m$
9. (ا) بالمكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_0^\alpha (x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{4}\left[(2\alpha-3)e^{2\alpha}+3\right]$ (α المعرّف سابقا) .

   (ب) $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x=0$ و $x=\alpha$

   – بيّن أن : $A(\alpha)=\frac{9-10\alpha}{2\alpha-1}cm^2$

التصحيح المفصل لاختبار الثلاثي الثاني

حل التمرين 01



U

عدد الحالات الممكنة للسحب هو : $C_9^3 = 84$

1 حساب إحتمال الأحداث : A ، C و D

$$A : BVR \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{84} = \frac{2}{7}$$

$C : 112$ أو 013 أو 022

$$P(C) = \frac{C_4^2 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^2 + C_2^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{84} = \frac{11}{42}$$

$$P(D) = 1 - \frac{C_5^3}{84} = \frac{37}{42}$$

2 تبيان أن : $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$

$A \cap C : B_0R_3V_1, V_0R_3B_1; B_1R_2V_1$

$$P(A \cap C) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{84} + \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{84} = \frac{1}{12}$$

3 قانون احتمال المتغير العشوائي X

قيم المتغير العشوائي : $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{14}{84}$	$\frac{21}{84}$	$\frac{22}{84}$	$\frac{14}{84}$	$\frac{8}{84}$	$\frac{1}{84}$

الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X : $E(X) = \frac{11}{3}$

حل التمرين 02

المتتالية العددية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{3 + 3^n.U_n} \text{ و } U_0 = 1$$

1 حساب U_1 و U_2

$U_1 = \frac{1}{4}$ و $U_2 = \frac{1}{15}$

2 تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$

لدينا $U_0 = 1 > 0$ وهي محققة .

نفرض أنّه من أجل عدد طبيعي n : $U_n > 0$ ونبرهن أن $U_{n+1} > 0$.

لدينا فرضا : $U_n > 0$ و $3 + 3^n.U_n > 0$ ومنه $U_{n+1} > 0$

اذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

3 دراسة رتابة المتتالية (U_n)

لدينا : $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n(2 + 3^nU_n)}{3 + 3^n.U_n} < 0$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

الاستنتاج :

بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة .

4 المتتالية العددية (V_n) كما يلي : $V_n = exp\left(\frac{1}{3^n.U_n}\right)$

(ا) تبيان أن (V_n) متتالية هندسية

$$V_{n+1} = exp\left(\frac{1}{3^{n+1}.U_{n+1}}\right) = exp\left(\frac{3 + 3^n.U_n}{3^{n+1}.U_n}\right)$$

ومنه : $V_{n+1} = exp\left(\frac{1}{3^n.U_n} + \frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}}.V_n$

ومنه (V_n) هندسية أساسها $e^{\frac{1}{3}}$ وحدها الأول $V_0 = e$

(ب) كتابة V_n بدلالة n : $V_n = e^{\frac{1}{3}n+1}$

استنتاج أن : $U_n = \frac{1}{(n+3)3^{n-1}}$

لدينا : $V_n = exp\left(\frac{1}{3^n.U_n}\right)$ معناه :

$\ln V_n = \frac{1}{3^n.U_n}$ أي أنّ : $U_n = \frac{1}{3^n \ln V_n}$

أي أنّ : $U_n = \frac{1}{(n+3)3^{n-1}}$

(ج) حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+3)3^{n-1}} = 0$$

5 تبيان أنه من أجل عدد طبيعي n :

$$S_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

لدينا :

$$S_n=U_0.\ln(V_0)+U_1.\ln(V_1)+\cdots+U_n.\ln(V_n)$$

و $U_n.\ln V_n=\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

أي أنّ : $S_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

حل التمرين 03

نعتبر التكاملات التالية : $I=\int_1^e\frac{1}{x(x+1)}dx$

$K=\int_1^e\frac{(x^2+1)\ln x}{x(x+1)^2}dx$ و $J=\int_1^e\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

1 إيجاد العددين الحقيقيين a و b حيث :

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$$

لدينا : $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}=\frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$

بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-1$

استنتاج قيمة I .

$$I=\int_1^e\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_1^e\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^e=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

2 بالمكاملة بالتجزئة تبيان أن : $J=I-\frac{1}{e+1}$

نضع : $u'(x)=\frac{1}{x}$ ، $u(x)=\ln x$

$v(x)=\frac{-1}{x+1}$ ، $v'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

ومنه :

$$J=\int_1^e\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=\left[\frac{-\ln(x)}{x+1}\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{x(x+1)}dx$$

أي أن : $J=I-\frac{1}{e+1}$

ومنه : $J=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\frac{1}{e+1}$.

3 تبيان أن : $K+2J=\frac{1}{2}$

$$K+2J=\int_1^e\frac{(x^2+1)\ln x}{x(x+1)^2}dx+2\int_1^e\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int_1^e\frac{(x^2+1)\ln x+2x\ln x}{x(x+1)^2}dx=\int_1^e\frac{(x+1)^2\ln x}{x(x+1)^2}dx$$

$$=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$$

أيّ أنّ : $K=\frac{1}{2}-2J$

حل التمرين 04

I) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=-2+(2x-1)e^{2x}$

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g

$$g'(x)=(2+2(2x-1))e^{2x}=4xe^{2x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

وعليه : g متناقصة على $]-\infty;0]$ ومتزايدة على $[0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-2 ↘	-3	↗ $+\infty$

2 تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فهي كذلك على المجال $]0.7;0.8[$ ولدينا : $g(0.7)=-0.37$ و $g(0.8)=0.97$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$

3 استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = -2x+1+(x-1)e^{2x}$

1 حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-2x+1+(x-1)e^{2x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(-2+\frac{1}{x}+(1-\frac{1}{x})e^{2x}\right) = +\infty$$

2 تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x} = 0$ ومنه نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = -2x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

3 دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-2x+1)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$f(x)-(-2x+1) = (x-1)e^{2x}$

$(x-1)e^{2x} = 0$ معناه : $x-1 = 0$ معناه : $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-1)$	(C_f) فوق (Δ)

4 التحقق أن : $f'(x) = g(x)$. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f'(x) = -2+(1+2(x-1))e^{2x} = g(x)$$

5 دراسة اتجاه تغير الدالة f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

و منه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$

6 تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ)

نحل المعادلة : $f'(x) = -2$

$f'(x) = -2$ معناه $(2x-1)e^{2x} = 0$ معناه $x = \frac{1}{2}$

اذن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$ معادلته : $(T): y = -2x+1-\frac{1}{2}e$

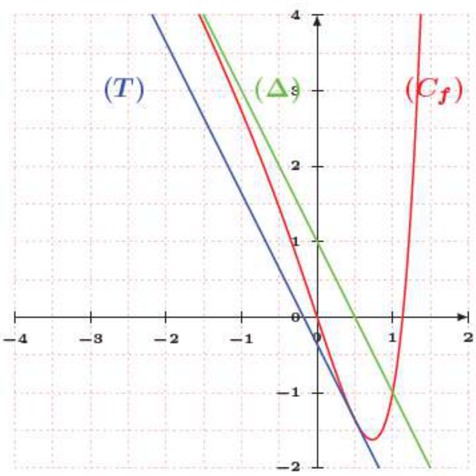
7 تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف

لدينا : $f''(x) = g'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

وبالتالي المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند النقطة O .

8 رسم كلا من : (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) .



9 مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -2x + m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -2x + m$.

لما $m \in \left] -\infty; 1 - \frac{1}{2}e \right[$ لاتوجد حلول .

لما $m = 1 - \frac{1}{2}e$ للمعادلة حل وحيد موجب .

لما $m \in \left] 1 - \frac{1}{2}e; 0 \right[$ للمعادلة حلين موجبين

لما $m = 0$ للمعادلة حلين أحدهما معدوم والاخر موجب

لما $m \in \left] 0; 1 \right[$ للمعادلة حلين مختلفين في الاشارة

لما $m \in \left[1; +\infty \right[$ للمعادلة حل وحيد موجب

10 تبيان أن : $\int_0^{\alpha} (x-1)e^{2x}dx = \frac{1}{4}\left[(2\alpha-3)e^{2\alpha}+3\right]$

نضع : $u'(x) = 1$ ، $u(x) = x - 1$

$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ ، $v'(x) = e^{2x}$

$$\int_0^{\alpha} (x-1)e^{2x}dx = \left[2(x-1)e^{2x}\right]_0^{\alpha} - \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2x-3)e^{2x}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{4}\left[(2\alpha-3)e^{2\alpha}+3\right]$$

تبيان أن : $A(\alpha) = \dfrac{9-10\alpha}{2\alpha-1}\ cm^2$

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} y - f(x)dx = -\int_0^{\alpha} (x-1)e^{2x}dx$$

ومنه حسب ماسبق :

$$A(\alpha) = -\frac{1}{4}\left[(2\alpha-3)e^{2\alpha}+3\right]U.a \cdots (1)$$

وكذلك مماسبق : $g(\alpha) = 0$ معناه $-2 + (2\alpha-1)e^{2\alpha} = 0$

أي أن : $e^{2\alpha} = \dfrac{2}{2\alpha-1}$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد :

$$A(\alpha) = -\frac{1}{4}\left[(2\alpha-3)\frac{2}{2\alpha-1}+3\right] = \frac{-1}{4}\left[\frac{10\alpha-9}{2\alpha-1}\right]U.a$$

أي أنّ : $A(\alpha) = \dfrac{9-10\alpha}{2\alpha-1}\ cm^2$

النجاح المتميز هو أن تسمع نداء الروح، ثم تستجيب للخطة الفريدة التي يرسمها لك قلبك وتمشي على خطوات هُداه لتصل إلى قمة النجاح.

بالتوفيق والنجاح في امتحان شهادة بكالوريا - 2024 -