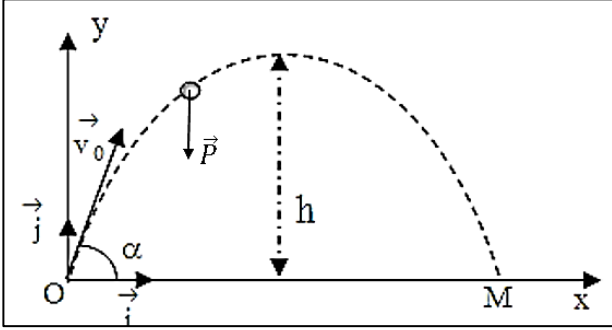


دراسة حركة القذائف الفذيفة



الشروط الابتدائية: تختلف الشروط الابتدائية حسب الحركة المدروسة.

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ \sin \alpha &= \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \sin \alpha \\ \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = -gt + v_{0y} \end{cases} \end{aligned}$$

عند قذبة كرة بسرعة ابتدائية غير شاقولية نحصل على حركة مسارها موضح في الشكل:

1- المعادلات التفاضلية:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases} \end{aligned}$$

• طبيعة الحركة على المحاور:

- الحركة على المحور (ox) حركة مستقيمة منتظمة لأن $a_x = 0$.
- الحركة على المحور (oy) حركة مستقيمة متغيرة بانتظام متباطئة في مرحلة الصعود ومتسارعة في النزول.

2- المعادلات الزمنية:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \end{aligned}$$

• معادلات السرعة: بالتكامل نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = at + v_{0y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

• معادلات الموضع: بالتكامل نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

3- معادلة المسار:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ \Rightarrow y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \\ \Rightarrow y &= -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha x \end{aligned}$$

4- نقاط خاصة في مسار القذيفة:

• الذروة: وهي أعلى موضع تصله الكرة.

$$v_y = 0 \quad \text{عند الذروة يكون}$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

نعوض في معادلات الموضع نحصل على احداثيات الذروة.

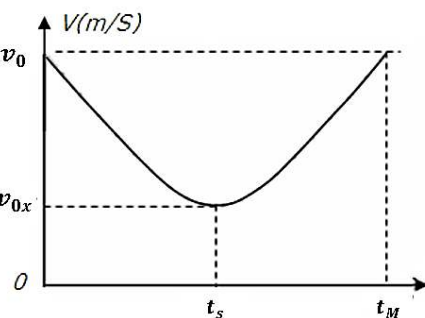
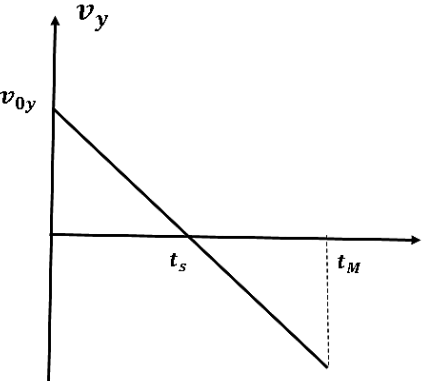
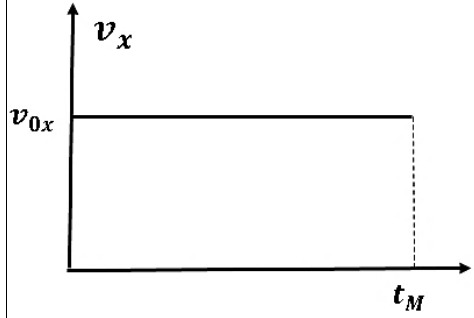
• المدى: هو أقصى مسافة تقطعها الكرة. حسب الشكل $x = d = OM$ أي أن $y = 0$.

$$y = -\frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha d = 0 \Rightarrow \frac{gd}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \Rightarrow d = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \times \tan \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \times \sin \alpha}{g} \Rightarrow d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

- مناقشة المدى: يكون المدى أعظميا عندما يكون $\sin 2\alpha = 1$ أي $2\alpha = 90^\circ$ ومنه $\alpha = 45^\circ$

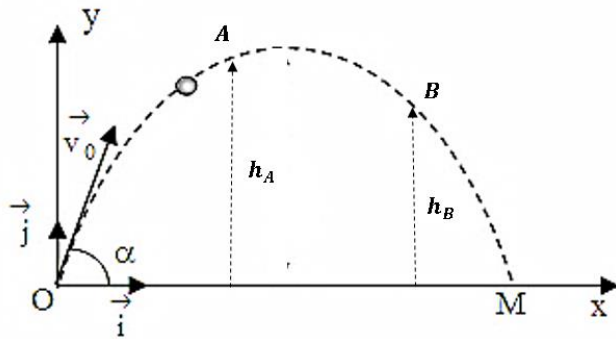
5- مخططات السرعة:

مخطط v	مخطط v_y	مخطط v_x
	 - الذروة تمثل المساحة المحصورة بين البيان ومحور الأزمنة في الطور الأول. - زمن الوصول للذروة هو t_s.	 - مساحة المستطيل تمثل قيمة المدى.
من المخططات يمكن استنتاج كلا من الزاوية α والسرعة الابتدائية v_0. $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$ $\sin \alpha = \frac{v_{0y}}{v_0}, \quad \cos \alpha = \frac{v_{0x}}{v_0}, \quad \tan \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$		

6- ملاحظات هامة:

• علاقة محذوفية الزمن: $v_B^2 - v_A^2 = 2gh_{AB}$

• استعمال مبدأ انحفاظ الطاقة للجملة (الكرة+ارض) بين الموضعين A و B.



$$\Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = 2g(h_A - h_B)$$

$$E_{CA} + E_{PPA} = E_{CB} + E_{PPB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

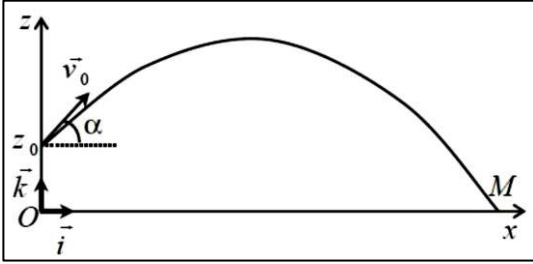
$$\Rightarrow mgh_A - mgh_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\Rightarrow gh_A - gh_B = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2$$

التمرين 1: بكالوريا رياضيات 2011-بتصرف

في لعبة رمي الجلة، يقذف اللاعب في اللحظة $t = 0$ الجلة من ارتفاع $oz_0 = h = 2.0m$ من سطح الارض، بسرعة ابتدائية: $v_0 = 13.7 m/s$ شعاعها يصنع زاوية $\alpha = 35^\circ$. نهمل تأثير الهواء (مقاومة الهواء ودافعة ارخميدس) ونأخذ $g = 9.8 m/s^2$.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المعلم المبين على الشكل استخرج:



أ- المعادلات التفاضلية للحركة.

ب- المعادلات الزمنية للحركة.

2- اكتب معادلة المسار $z = f(t)$.

3- أوجد احداثيات M نقطة سقوط القذيفة. وما هي سرعتها عندئذ؟

4- نريد ان يكون مدى أعظما، ما هي الزاوية التي يجب ان تقذف بها الجلة؟ ثم

حدد قيمة المدى حينئذ علما ان اللاعب يقذف الجلة بنفس السرعة v_0 .

التمرين 2: بكالوريا علوم تجريبية 2012

خلال منافسة رمي الجلة في الالعاب الاولمبية بكيين، حقق الرياضي الذي فاز بهذه المنافسة

النتيجة $d = 21.51m$. اعتمادا على الفلم المسجل لعملية الرمي ولأجل معرفة قيمة

السرعة v_0 التي قذفت بها الجلة، تم استخراج بعض المعطيات أثناء لحظة الرمي:

- قذفت الجلة من النقطة A الواقعة على ارتفاع $h_A = 2m$ بالنسبة لسطح الارض

وبالسرعة v_0 التي تصنع زاوية $\alpha = 45^\circ$ مع الخط الافقي.

ندرس حركة الجلة في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{k})$ ونختار اللحظة الابتدائية $t = 0$

هي اللحظة التي يتم فيها قذف الجلة من النقطة A. نهمل احتكاكات الجلة مع الهواء ودافعة

ارخميدس بالنسبة لقوة ثقل الجلة.

1- جد المعادلتين الزميتين $x = f(t)$ و $z = h(t)$ المميزتين لحركة الجلة في المعلم المختار.

- استنتج معادلة مسار الجلة $z = g(t)$ بدلالة المقادير h_A, α, g و v_0 .

2- جد عبارة السرعة الابتدائية v_0 بدلالة h_A, α, g و d ثم احسب قيمتها.

3- جد المدة الزمنية التي تستغرقها الجلة في الهواء.

التمرين 3: بكالوريا رياضيات 2012

في فبراير 2012 هبت عاصفة ثلجية على شمال شرق الجزائر، فاستعملت الطائرات المروحية للجيش الوطني الشعبي لإيصال المساعدات

للمتضررين خاصة في المناطق الجبلية.

أولاً: تطير المروحية ثابت h من سطح الارض بسرعة أفقية ثابتة قيمتها $v_0 = 50 m/s$

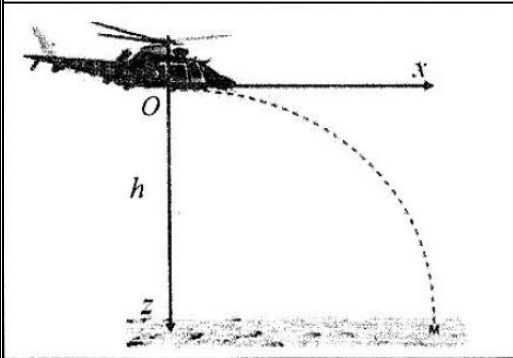
يترك صندوق من مواد غذائية مركز عطالتها G يسقط في اللحظة $t = 0$ انطلاقا من نقطة

O مبدأ الاحداثيات وبالسرعة الابتدائية الافقية $\vec{v}_0$ ليرتطم بسطح الارض في النقطة M.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جد:

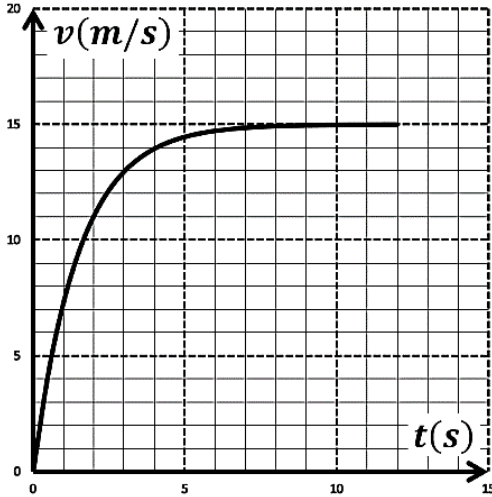
أ- المعادلتين الزميتين $x(t)$ و $z(t)$.

ب- معادلة المسار $z(x)$.



ج- احداثيات نقطة السقوط M .

د - الزمن اللازم لوصول الصندوق للأرض.



ثانياً: لكي لا تتلف المواد الغذائية عند الارتطام بسطح الأرض، تم ربط الصندوق بمظلة تمكنه من النزول شاقولياً ببطء. تبقى المروحية على نفس الارتفاع h السابق في النقطة M ، ليترك الصندوق يسقط شاقولياً دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$. يخضع الصندوق لقوة احتكاك الهواء نعتبر عنها بالعلاقة $\vec{f} = -100 \times \vec{v}$ حيث: $\vec{v}$ يمثل شعاع سرعة الصندوق في اللحظة t مع إهمال دافعة أرخميدس خلال السقوط.

1- جد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عتالة الصندوق.

2- يمثل الشكل تطور سرعة مركز عتالة الصندوق بدلالة الزمن t .

أ- جد السرعة الحدية v_l .

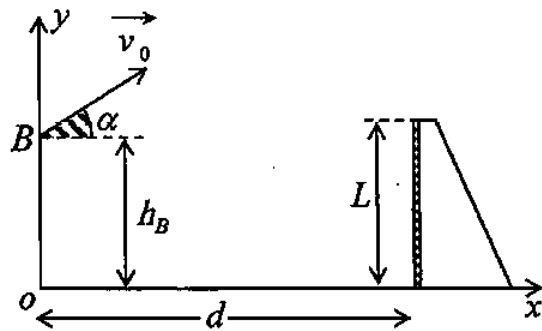
ب- حدد قيمتي السرعة والتسارع في اللحظتين: $t = 0$ و $t = 10s$.

يعطى: $g = 9.8m \times s^{-2}$, $h = 405m$, كتلة الصندوق والمظلة $m = 150kg$.

التمرين 4: بكالوريا علوم تجريبية 2016

المعطيات: $g = 10m/s^2$, $v_0 = 10m/s$.

بإحدى الحصص التدريبية لكرة القدم استقبل اللاعب كرة زميله فقفزها برأسه نحو المرمى بغية تسجيل هدف. غادرت الكرة رأسه في لحظة $t = 0$ من النقطة B في اتجاه المرمى بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ واقعة على المستوي الشاقولي المتعامد مع مستوي المرمى ويصنع حاملها زاوية $\alpha = 30^\circ$ مع الأفق. تقع النقطة B على الارتفاع $h_B = 2m$ من سطح الأرض كما هو موضح بالشكل المقابل .



1- بإهمال أبعاد الكرة وتأثير الهواء عليها، وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن على

الكرة في المعلم السطحي الأرضي (Ox, Oy) أوجد ما يلي:

أ- المعادلتين الزميتين $x(t)$ و $y(t)$.

ب- معادلة المسار $y = f(x)$.

ج- قيمة سرعة مركز عتالة الكرة عند الذروة.

2- يبعد خط التهديد عن اللاعب بالمسافة $d = 10m$ وارتفاع المرمى $L = 2,44m$.

أ- اكتب الشرط الذي يجب ان يحققه كل من x و y لكي يسجل الهدف مباشرة إثر هذه الرمية الرأسية؟

ب- هل سجل اللاعب الهدف بهذه الرأسية؟ برر جوابك.

التمرين 5: بكالوريا علوم تجريبية 2010

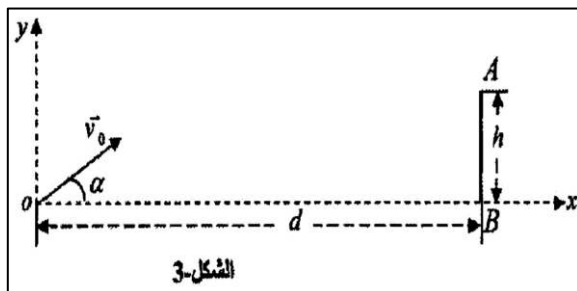
تؤخذ $g = 10m \times s^{-2}$, مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس مهملتان.

لتنفيذ مخالفة خلال مباراة كرة القدم ، وضع اللاعب الكرة في النقطة O مكان وقوع

الخطأ على بعد $d = 25m$ من خط المرمى ، حيث ارتفاع العارضة الأفقية

$h = AB = 2.44m$. يقذف اللاعب الكرة بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ يصنع حاملها مع

الأفق زاوية $\alpha = 30^\circ$.



الشكل-3

1- ادرس طبيعة حركة الكرة في المعلم $(\vec{ox}, \vec{oy})$.

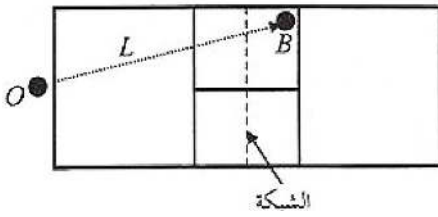
- بأخذ مبدأ الأزمنة لحظة القذف استنتج معادلة المسار.

2- كم يجب أن تكون v_0 حتى يسجل الهدف مماسيا للعارضة الأفقية (النقطة A) ؟ - ما هي المدة الزمنية المستغرقة؟ وما هي قيمة سرعتها عندئذ (النقطة A) ؟

3- كم يجب أن تكون v'_0 حتى يسجل الهدف مماسا لخط المرمى (النقطة B) ؟

التمرين 6: بكالوريا رياضيات 2015:

ملعب التنس عبارة عن مستطيل طوله 23.8 m وعرضه 8.23 m . وضعت في منتصفه شبكة ارتفاعها 0.92 m . عندما يرسل اللاعب الكرة يجب أن تسقط في منطقة محصورة بين الشبكة وخط يوجد على مسافة 6.4 m من الشبكة كما هو موضح بالشكل. في دورة رولان قاروس الدولية يريد اللاعب نبال إسقاط الكرة في النقطة B حيث $OB = L = 18.7\text{ m}$. يرسل اللاعب الكرة نحو الأعلى ثم يضربها بمضربه من نقطة D توجد على ارتفاع $h = 2.2\text{ m}$ من النقطة O. تنطلق الكرة



من النقطة D بسرعة أفقية $v_0 = 126\text{ km/h}$ كما هو موضح بالشكل التالي.

نهمل تأثير الهواء ونأخذ $g = 9.8\text{ m/s}^2$. نعتبر أن الحركة تتم في معلم سطحي أرضي يعتبر غاليليا.

1- مثل القوى المؤثرة على الكرة خلال حركتها بين B و D .

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد المعادلتين الزميتين للحركة $x(t)$ و $y(t)$.

3- استنتج معادلة المسار.

4- هل تمر الكرة فوق الشبكة؟ علما أن $OF = 12.2\text{ m}$.

5- هل نجح نادال في الإرسال؟

التمرين 7: بكالوريا رياضيات 2009

قام لاعب كرة السلة بتسديد الكرة نحو السلة من نقطة A منطبقة على مركز الكرة الموجودة على ارتفاع $h_0 = 2.10\text{ m}$ من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $v_0 = 8\text{ m/s}$ يصنع حاملها زاوية 37° مع الأفق. ليمر مركز الكرة G بمركز السلة C الذي إحداثياته $(x_c = 4.5\text{ m}, z_c)$ في المعلم الأرضي $(\vec{ox}, \vec{oy})$ الذي نعتبره غاليليا.

1- ادرس حركة مركز عطالة الكرة في المعلم $(\vec{ox}, \vec{oy})$ معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة تسديد

الكرة وإهمال تأثير الهواء.

2- احسب z_c .

3- يعبر مركز عطالة الكرة مركز السلة بسرعة $\vec{v}_c$ التي يصنع حاملها مع الأفق زاوية β .

استنتج قيمتي v_c و β . $g = 9.8\text{ m/s}^2$.

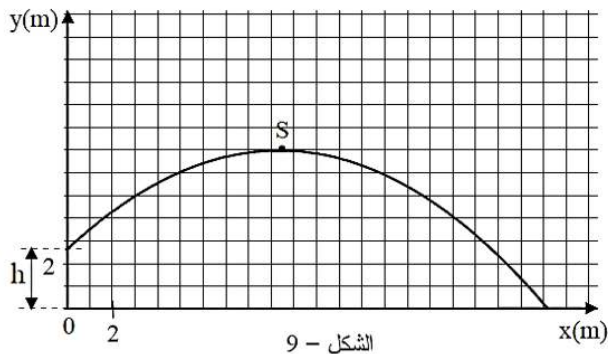
التمرين 8: بكالوريا رياضيات 2014:

أثناء دراسة تأثير القوى الخارجية على حركة جسم، كلف الأستاذ تلميذين بمناقشة الحركة الناتجة عن رمي جلة، فأجاب الأول أن حركة الجلة لا تتأثر إلا بتقلها، بينما اجاب الثاني أن حركتها تتعلق بدافعة أرخميدس.

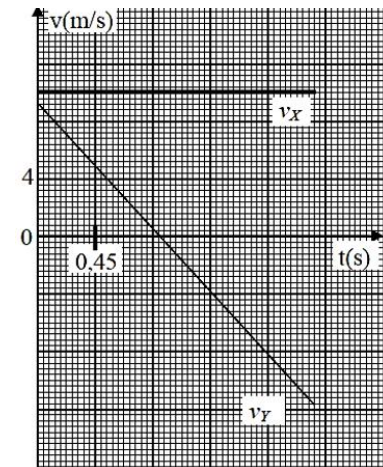
من أجل التصديق على الجواب الصحيح، اعتمد التلميذان على دراسة الرمية التي حقق بها رياضي رقما قياسيا عالميا مداها 21.69 m .

عند محاولتهما محاكاة هذه الرمية بواسطة برنامج خاص، تم قذف الكرة التي نعتبرها جسما نقطيا من ارتفاع $h = 2.62 \text{ m}$ بسرعة ابتدائية

$v_0 = 13.7 \text{ m} \times \text{s}^{-1}$ يصنع شعاعها مع الأفق زاوية $\alpha = 43^\circ$ فتحصلا على رسم لمسار مركز عطالة الكرة كما في الشكل 9-



الشكل - 9



الشكل - 10

والمنحنيين $v_x(t)$ و $v_y(t)$ كما في الشكل 10 .

i. دراسة نتائج المحاكات:

1- ما هي طبيعة حركة مركز عطالة الكرة على المحور ox ؟ برر اجابتك.

2- عين القيمة v_{0y} للمركبة الشاقولية لشعاع السرعة الابتدائية انطلاقا من

الشكل 10 ثم عين قيمة v_0 للسرعة الابتدائية للقذيفة، وهل تتوافق مع

المعطيات السابقة : $v_0 = 13.7 \text{ m} \times \text{s}^{-1}$ و $\alpha = 43^\circ$.

3- عين خصائص شعاع السرعة $\vec{v}_s$ عند الذروة S .

ii. الدراسة التحليلية لحركة مركز عطالة الكرة:

المعطيات : الكرة عبارة على كرة حجمها V وكتلتها الحجمية $\rho = 7.1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. الكتلة

الحجمية للهواء: $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$.

1- بين ان دافعة أرخميدس مهمة أمام ثقل الكرة . أي التلميذين على صواب؟

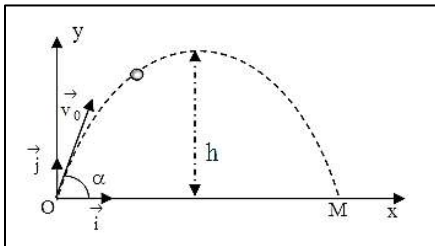
2- بتطبيق القانون الثاني لنيتون جد عبارة تسارع مركز عطالة الكرة. نهمل مقاومة الهواء.

3- جد معادلة المسار لمركز عطالة الكرة .

التمرين 9:

نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة كتلتها m ، بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ من نقطة O كما هو مبين على الشكل المقابل. نعتبر أن حركة الجسم تتم في

المستوي $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وتدرس بالنسبة للمرجع الأرضي الذي نعتبر مرجعا غاليليا. نهمل كل من مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس.



يمثل البيان الموالي تغيرات قيمة سرعة القذيفة بدلالة الزمن بين الوضعين O و M .

1-مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب.

2-بتطبيق القانون الثاني لنيتون بين طبيعة الحركة.

3-أوجد المعادلات الزمنية لكل من السرعة والموضع.

4 - أوجد من البيان :

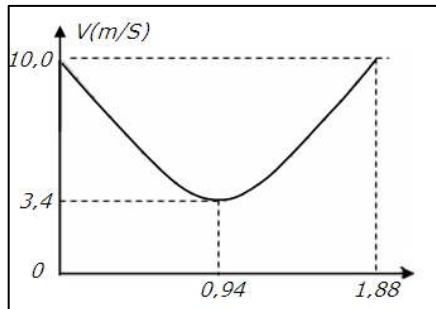
- القيمة v_0 لشعاع السرعة $\vec{v}_0$.

- قيمة المركبة v_{0x} لشعاع السرعة $\vec{v}_0$.

5 - استنتج قيمة كل من الزاوية α التي قذف بها الجسم و قيمة v_{0y} .

6- مثل كل من $v_x(t)$ و $v_y(t)$ في المجال الزمني s ($0 \leq t \leq 1.88$) .

7- استنتج من المنحنيين كل من المسافة الأفقية OM و الذروة h



التمرين 10 :

يقذف اللاعب كرة التنس $m = 58g$ لإنجاز الإرسال شاقوليا نحوى الأعلى لتصل إلى ارتفاع Z_0 فيضربها بمضربه فتكتسب سرعة $v_0 = 28 m/s$ يكون منحاهم أفقي. على الكرة اجتياز شبك موضوع على بعد $12m$ من اللاعب علوه $Z_0 = 0.9m$. ندرس حركة الكرة في المعلم $(ox; oz)$ الذي نعتبره عطاليا. تؤخذ $g = 9.8m \times s^{-2}$.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد:

أ/ المعادلتين التفاضليتين للحركة و المعادلتين الزميتين للحركة.

ب/ استنتج معادلة المسار $z = f(x)$.

ج/ ماهي قيمة Z_0 حتى تمر الكرة على ارتفاع $10cm$ من الشبكة.

د/ إذا كان طول الملعب $24m$ ، هل تصطدم الكرة بالأرض قبل خروجها من الملعب؟ برر إجابتك.

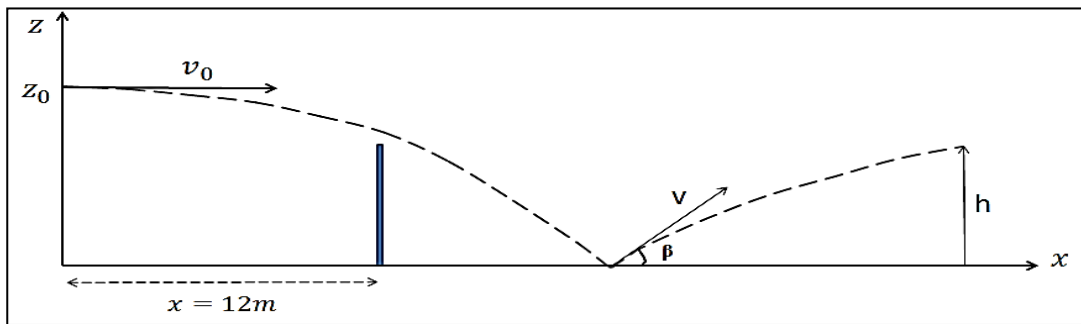
هـ/ احسب سرعة الكرة v لحظة اصطدامها بالأرض.

2- نفرض ان الكرة تتطلق من جديد بعد اصطدامها بالأرض بنفس السرعة السابقة v وبزاوية عن الأفق $\beta = 15^\circ$ في اتجاه اللاعب

الثاني الموجود في خط نهاية الملعب أي على بعد $24m$ من اللاعب الاول، باعتبار نقطة الاصطدام بالأرض هي مبدأ الفواصل.

أ/ اكتب معادلة المسار الجديد دون اثبات.

ب/ ما هي قيمة الارتفاع h لكرة عند وصولها الى اللاعب الثاني؟



تمرين 11: بكالوريا علوم تجريبية 2016

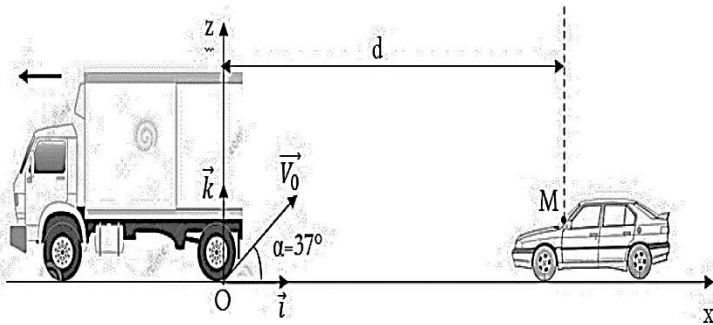
نهمل تأثير الهواء ونأخذ $g = 9.8m/s^2$.

شاحنة تسير على طريق مستقيم أفقي، في لحظة نعتبرها مبدأ لقياس الأزمنة $t = 0$ تقذف العجلة الخلفية للشاحنة نحو الورا من نقطة O من

سطح الأرض حجرا نعتبره نقطيا بسرعة ابتدائية $v_0 = 12m/s$ يصنع حاملها زاوية $\alpha = 37^\circ$ مع الأفق فيرنطم بالنقطة M من الزجاج

الامامي لسيارة تسير خلف الشاحنة وفي نفس جهة حركتها بسرعة ثابتة قدرها $90km/h$. في اللحظة $t = 0$ كانت المسافة الأفقية بين

النقطة O والنقطة M : $d = 44m$ انظر الشكل.



1- ادرس حركة الحجر في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ثم استخرج العبارتين

الحرفيتين للمعادلتين الزميتين للحركة $x(t)$ و $z(t)$.

2- اكتب معادلة مسار الحجر $z = f(x)$.

3- اكتب المعادلة الزمنية $x_M(t)$ لحركة النقطة M في المعلم

$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4- احسب قيمة t_M لحظة ارتطام الحجر بالزجاج الامامي للسيارة واستنتج الارتفاع h للنقطة M عن سطح الأرض.

5- باستعمال معادلة انحفاظ الطاقة احسب سرعة ارتطام الحجر بزجاج السيارة.