علوم فيزيائية

سلاسل المنجد - دروس و تمارين

3AS

الشعب العلمية و الرياضية

السلسلة 3-06-1

التطورات المهتزة

عرض نظري و تمارين

يمكن تحميل نسخة من هذا الملف من الموقع :

www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل – تمارين – فيديوهات ......)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في الموقع الإلكتروني

لكي يصلك جديد الموقع تابع صفحة الفايسبوك التالية :

الأستاذ فرقاني فارس أستاذ العلوم الفيزيائية Fergani Fares

الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
fares_fergani@yahoo.fr

الإصدار : مارس/2021

العلوم الفيزيائية

سلاسل المنجد في العلوم الفيزيائية – ثالثة ثانوي – الوحدة 07

تطور جملة مهتزة

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

****

السلسلة 3 –06– 01

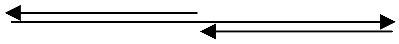
عرض نظري و تمارين

I– الإهتزازات الحرة لجملة ميكانيكية

1- مفاهيم أساسية عن الحركة الاهتزازية

• الجملة الميكانيكية المهتزة :

- الجملة الميكانيكية المهتزة هي كل جملة تقوم بحركة ذهابا و إيابا على جانبي وضع توازنها .
مثال : حركة نابض على جانبي وضع توازنه ، حركة أرجوحة على جانبي وضع توازنها .
- تكون الاهتزازات حرة إذا كانت لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي .
- نقول عن الجملة أنها قامت باهتزازة ، عندما تمر مرتين متتاليتين من نفس الموضع في نفس الاتجاه .



• سعة اهتزاز الجملة الميكانيكية المهتزة :

- سعة الاهتزاز هي القيمة الأعظمية لمقدار الإزاحة عن وضع توازن الجملة المهتزة .
- إذا حافظت الجملة المهتزة على قيمة سعتها بمرور الزمن ، نقول عن حركة الجملة المهتزة أنها غير متخامدة ، و أثناء ذلك تكون طاقتها محفوظة ، أي لا وجود ضياع في الطاقة أثناء الحركة المهتزة .
- إذا كانت سعة الحركة المهتزة متناقصة ، نقول عن هذه الحركة المهتزة أنها متخامدة ، و أثناء ذلك تكون طاقتها غير محفوظة ، أي يوجد ضياع في الطاقة أثناء الحركة المهتزة .
- لمنع التخامد أي لجعل سعة الاهتزاز ثابتة ، نقوم بما يسمى تغذية الحركة الاهتزازية ، و أثناء ذلك نقوم بتعويض الطاقة الضائعة باستمرار ، يتحقق ذلك بتجهيز يتناسب مع الجملة المهتزة ، مثل ساعة الحائط أو الأرجوعة عندما ندفعها في كل مرة .

• دور الجملة الميكانيكية المهتزة :

- الدور الذي يرمز له بـ T و وحدته الثانية هو الزمن اللازم لإنجاز اهتزازة واحدة ، في حالة الإهتزازات الحرة غير المتخامدة يقال عن الدور أنه ذاتي يرمز له بـ T_0 و يعبر عنه بالعلاقة :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

حيث : ω_0 يدعى النبض الذاتي للحركة الاهتزازية ، وحدته rad/s .

• التواتر الذاتي f_0 لحركة جملة ميكانيكية مهتزة :

- التواتر الذاتي f_0 لجملة ميكانيكية مهتزة ، هو عدد الاهتزازات المنجزة من طرف هذه الجملة في الثانية الواحدة ، يرمز له بـ f_0 و وحدته الهرتز Hz و يعبر عنه بالعلاقة :

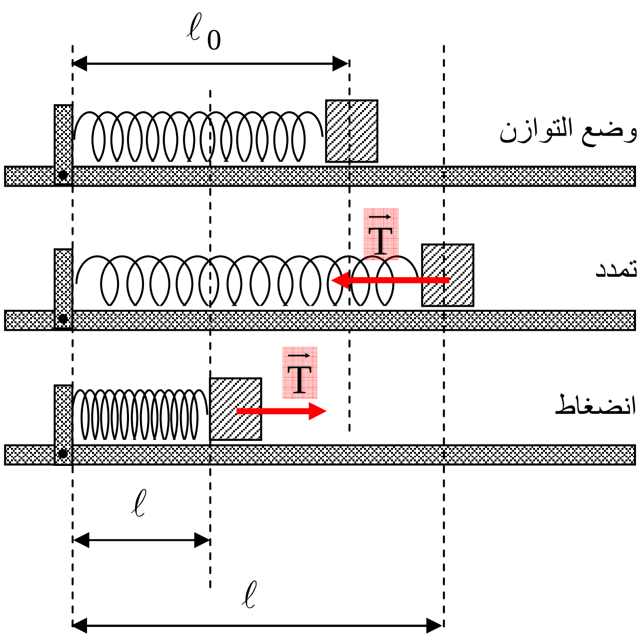
$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

2- الإهتزازت الحرة في النواس المرن

• تعريف النواس المرن :

- يتكون النواس المرن من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته k متصل من إحدى نهايته بحاجز و النهاية الثانية مرتبطة بجسم صلب (S) كتلة m .

- الشكل التالي يمثل خصائص شدة قوة التوتر $\vec{T}$ المؤثرة على الجسم (S) في الحالتين : النابض متمدد و النابض منضغط .



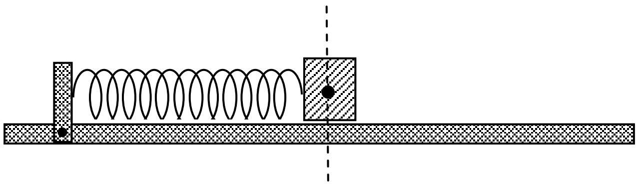
- شدة القوة المرونية (توتر النابض) تتعلق باستطالة النابض المساوية للفرق بين طوله الطبيعي ℓ_0 و طوله ℓ عندما يكون متمدد أو منضغط وفق العلاقة :

$$\boxed{T = k.\Delta\ell = k(\ell - \ell_0)}$$

حيث k هو ثابت مرونة النابض و هو ثابت خاص بالنابض .

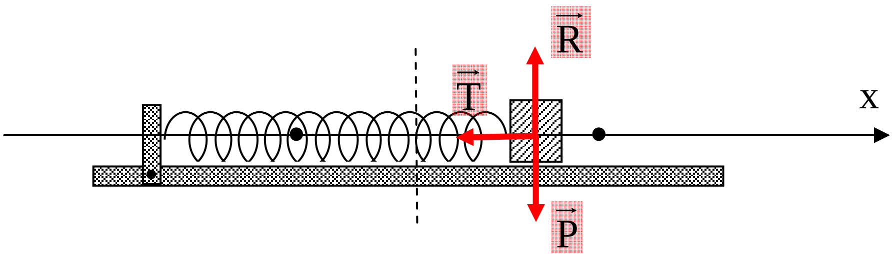
• دراسة حركة نـواس مرن أفقي – حالة اهتزازات حرة غير متخامدة :

لدراسة حركة نواس مرن أفقي دون تخامد ، نستعمل نواس مرن يتكون من نـابض مـرن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته k و جسم صلب (S) كتلته m ، يتحرك على طاولة هوائية (دون احتكاك) .



نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بسحبه أفقيا بمقدار X_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ حر دون سرعة ابتدائية ، نلاحظ أن الجسم (S) يقوم بحركة مهتزة على جانبي وضع توازنه ، و السبب في ذلك يعود إلى القوة $\vec{T}$ التي يطبقها النابض على الجسم (S) ، تحاول هذه القوة في كل لحظة إعادة الجسم إلى وضع توازنه ، فهي قوة أرجاع .

▪ المعادلة التفاضلية x(t) :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور ox :

$$- T = ma \rightarrow - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0$$

بقسمة الطرفين على m :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

هي من الشكل :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^{\,2}\ x = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^{\,2}\ x = 0$ ، تقبل حل جيبي من الشكل :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t+\varphi)$$

- x : مطال الحركة في اللحظة t (الفاصلة) .
- X_0 : المطال الأعظمي أو سعة الحركة و يكون مساوي لنصف طول القطعة المستقيمة التي يتحرك حولها الجسم المهتز .
- ω_0 : نبض الحركة المهتزة .
- φ : الصفحة الابتدائية و تتعلق قيمتها بالشروط الابتدائية .

- نقول عن حركة الجسم (S) أنها حركة اهتزازية جيبية غير متخامدة ، و أي حركة اهتزازية لها نفس شكل المعادلة هي حركة **اهتزازية جيبية غير متخامدة** .

<u>دور الحركة :</u>

بمطابقة المعادلة التفاضلية المتحصل عليها و المعادلة التفاضلية العامة $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^{\,2}\ x = 0$ يكون :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

و حيث أن : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ يكون : $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$ و منه :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

<u>• المعادلة الزمنية x(t) و مخطط الحركة الموافق :</u>

- المعادلة الزمنية للحركة هي من الشكل : $x = X_0 \cos(\omega_0 t+\varphi)$.
- من الشروط الإبتدائية :

$t = 0 \ \rightarrow\ x = +X_0$

بالتعويض في المعادلة الزمنية :

$+X_0 = X_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos\varphi = +1 \ \rightarrow\ \varphi = 0$

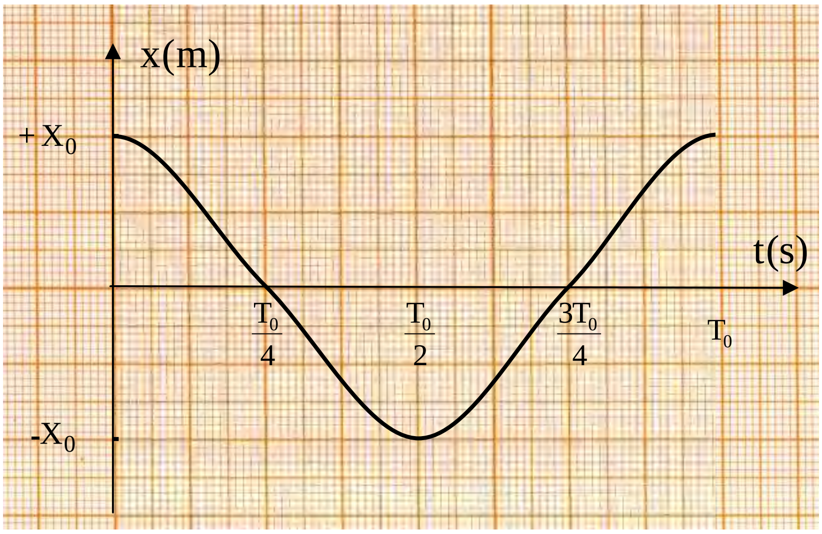
ومنه المعادلة الزمنية تصبح :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t)$$

لرسم المنحنى البياني $x(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة $x(t)$ السابقة قيم المطال x خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

t (s)	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0}t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x = X_0 \cos(\omega_0 t)$	$+X_0$	0	$-X_0$	0	$+X_0$

و منه يكون المنحنى $x(t)$ كما يلي :



• **<u>معادلة السرعة v(t) و مخطط السرعة الموافق :</u>**

لدينا :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

مما سبق : $x = X_0\cos(\omega t)$ و منه يكون :

$$\boxed{v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)}$$

$$\boxed{v = -v_0 \sin(\omega_0 t)}$$

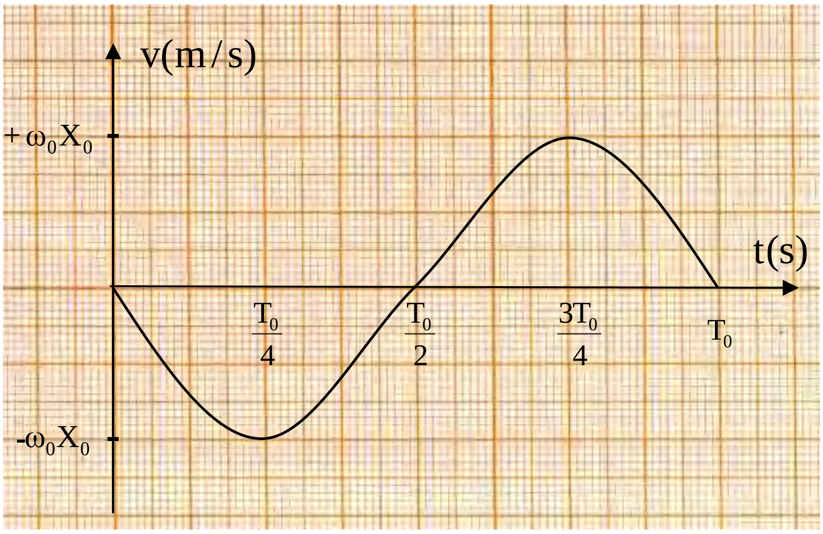
حيث : $v_0 = \omega_0 X_0$ هي السرعة الأعظمية .

بيانيا :

لرسم المنحنى البياني $v(t)$ نحسب اعتمادا على معادلة السرعة $v(t)$ السابقة قيم السرعة v خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

$t\,(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0}t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$	0	$-\omega_0 X_0$	0	$+\omega_0 X_0$	0

و منه يكون المنحنى $v(t)$ كما يلي :



• معادلة التسارع $a(t)$ و مخطط التسارع الموافق :

لدينا :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

مما سبق : $v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$ و منه يكون :

$$\boxed{a = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t)}$$

$$\boxed{a = -a_0 \cos(\omega_0 t)}$$

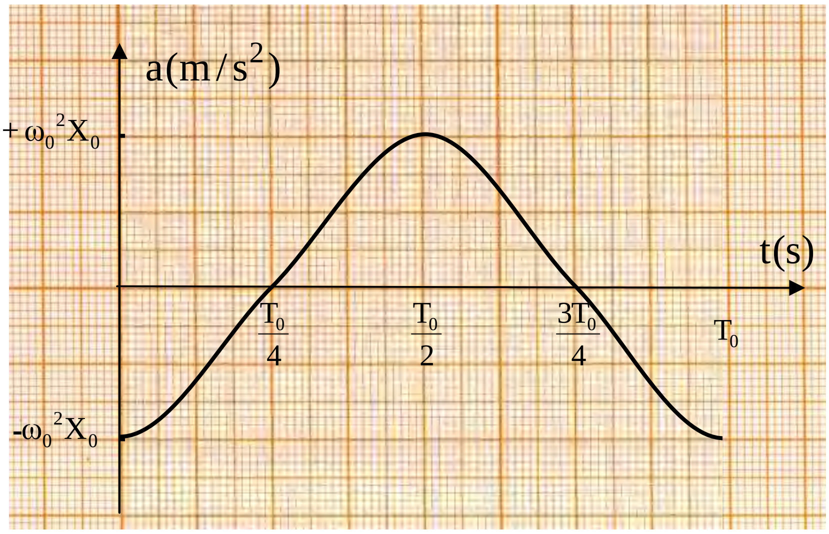
حيث : $a_0 = \omega_0^2 X_0$ هو التسارع الأعظمي .

بيانيا :

لرسم المنحنى البياني $v(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة $x(t)$ السابقة قيم التسارع a خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

t (s)	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0}t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$a = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t)$	$-\omega_0^2 X_0$	0	$+\omega_0^2 X_0$	0	$-\omega_0^2 X_0$

و منه يكون المنحنى $a(t)$ كما يلي :



• معادلة التسارع $a(x)$ و مخطط التسارع الموافق :

مما سبق لدينا :

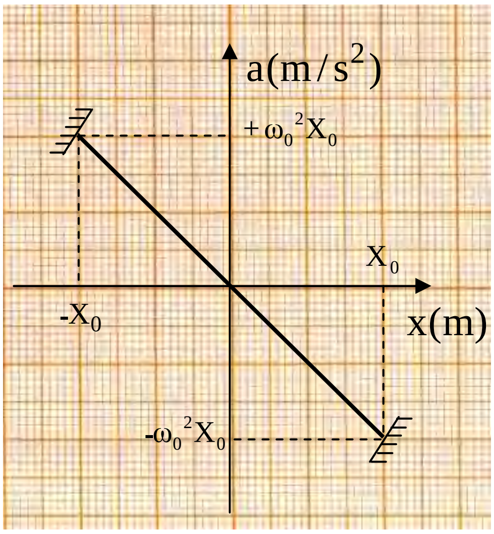
$$a = -\omega_0^2 \underbrace{X_0 \cos(\omega_0 t)}_{x}$$

و حيث أن : $x = X_0 \cos(\omega_0 t)$ يمكن كتابة :

$$\boxed{a = -\omega_0^2 x}$$

من هذه المعادلة يتضح ، أن التسارع a يتناسب طرديا مع المطال x ، هذا لا يحدث إلا في الحركة الإهتزازية الجيبية غير المتخامدة .

بيانيا :



• طاقة الجملة (جسم + نابض) :

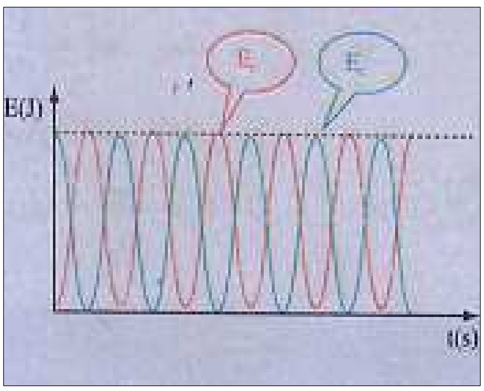
- نتيجة حركة الجسم (S) ، فإن الجملة (جسم + نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة حركية E_C عبارتها :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m v^2}$$

و نتيجة تشوه النابض ، الجملة (جسم نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة كامنة مرونية E_{Pe} عبارتها :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} k x^2}$$

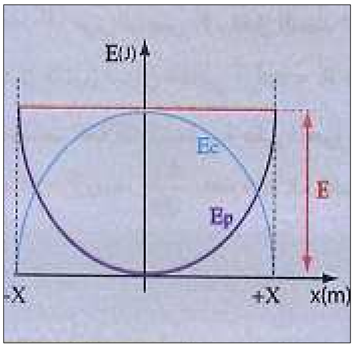
- يمثل الشكل التالي كيفية تطور الطاقة الحركية في الحركة الاهتزازية غير المتخامدة (حركة اهتزازية جيبية) .



- تمتلك الجملة (جسم + نابض) في اللحظة t من الحركة الاهتزازية طاقة مساوية لمجموع طاقتها الحركية و الكامنة المرونية ، و نكتب :

$$\boxed{E = E_C + E_{Pe}}$$

- الشكل التالي يمثل تطور الطاقتين الحركية و الكامنة المرونية أثناء الحركة الاهتزازية ، كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



- إذا كانت حركة الجملة غير متخامدة ، نتيجة تغذيها أو عدم وجود سبب لتناقص الطاقة ، تكون طاقة الجملة ثابتة أثناء الحركة الاهتزازية ، و حيث أن هذه الطاقة التي اكتسبتها عند اللحظة $t = 0$ كانت نتيجة الإستطالة الأعظمية X_0 ، أين تكون الطاقة الكامنة أعظمية و الطاقة الحركية معدومة يمكن كتابة :

$$\boxed{E = E_{Pe0} = \frac{1}{2}kX_0^{\,2}}$$

- عند مرور الجسم بوضع التوازن يكون النابض في وضع الراحة ، تكون الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم+نابض) عندئذ معدومة ، كما تكون السرعة أعظمية و عليه فالطاقة الحركية عندئذ أعظمية أيضا ، نكتب إذن :

$$\boxed{E = E_{C0} = \frac{1}{2}mv_0^{\,2}}$$

• إثبات أن طاقة الجملة (جسم + أرض) ثابتة عندما تهتز دون تخامد:

كما ذكرنا سابقا طاقة الجملة مساوية لمجموع طاقتيها الحركية E_C و الكامنة المرونية E_{Pe} أي :

$$E = E_C + E_{Pe}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

وجدنا سابقا :

- $x = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$
- $v = -\omega_0 X_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$

ومنه :

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^{\,2}X_0^{\,2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}k\,X_0^{\,2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m\omega_0^2$$

و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 \underbrace{(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))}_{1}$$

لدينا : $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ و منه يصبح لدينا :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{C0}}$$

إذن طاقة الجملة (جسم + أرض) أثناء حركة مهتزة غير متخامدة ثابتة و مساوية للطاقة الحركية الأعظمية .

- يمكن إثبات بنفس الطريقة و بأخذ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ، أن طاقة الجملة (جسم + أرض) أثناء حركة مهتزة غير متخامدة ثابتة و مساوية للطاقة الكامنة الأعظمية ، حيث نجد في النهاية :

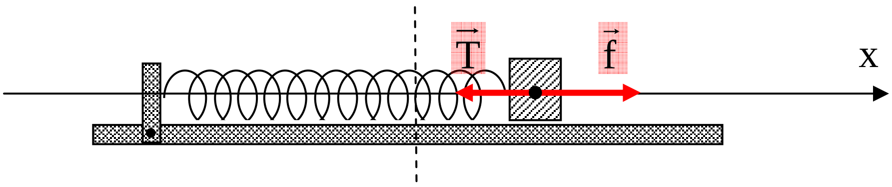
$$\boxed{E = \frac{1}{2}k X_0^2 = E_{Pe0}}$$

• دراسة حركة نواس مرن أفقي – حالة اهتزازات حرة متخامدة :

- لدراسة حركة نواس مرن أفقي في حالة ، نستعمل نواس مرن يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته k و جسم صلب (S) كتلته m ، يتحرك على طاولة في وجود قوة احتكاك ثابتة $\vec{f}$.

- نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بسحبه أفقيا بمقدار X_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ حر دون سرعة ابتدائية .

▪ المعادلة التفاضلية $x(t)$:



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور ox :

$$- T + f = ma \rightarrow - kx + f = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x + f = 0$$

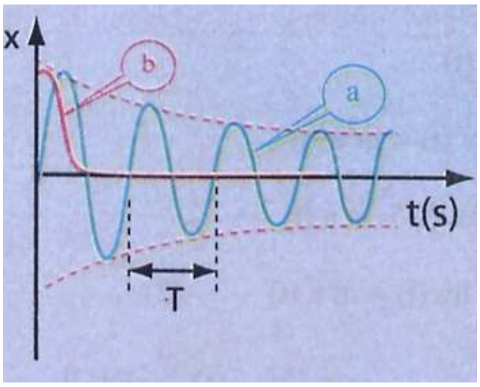
بقسمة الطرفين على m :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x \quad \frac{f}{m} = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ، حلها خارج البرنامج .

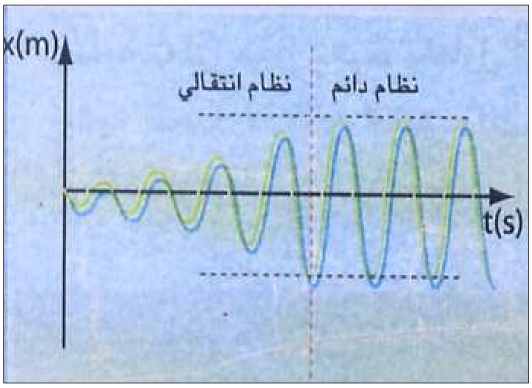
▪ تاثير الاحتكاكات في سعة الإهتزاز:

- يزداد تخامد الاهتزازات كلما تزايدت فعالية الاحتكاكات .
- إذا كانت الاحتكاكات ضعيفة فإن تناقص سعة الاهتزازات تكون تدريجية خلال الزمن حتى تنعدم ، و يكون التخامد شبه دوري و قيمة شبه دوره هو T (المنحنى a) .
- إذا كانت الاحتكاكات فعالة جدا ، الجملة لا تهتز و نقول عن النظام إنه لا دوري حرج (المنحنى b) .



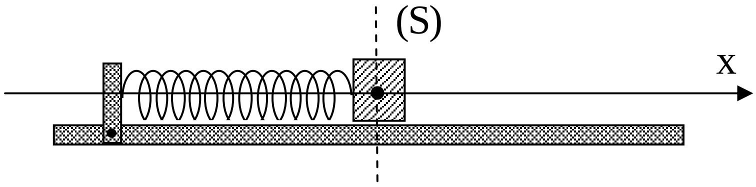
• تغذية الإهتزازات الميكانيكية :

- لا تخلو حركة أي مهتز ميكانيكي حقيقي من تخامد يؤدي إلى تناقص في سعة الاهتزازات ، و للحفاظ على سعة ثابتة للاهتزازات يجب أن نعوض باستمرار الطاقة الضائعة بفعل الاحتكاك ، يتم ذلك بواسطة أجهزة خاصة ، مثل إضافة ثقل موازن لساعة الحائط ، أو نابض حلزوني كما في ساعات اليد الكلاسيكية .
- إن تغذية الاهتزازات الميكانيكية تتم بتطبيق قوة على الجسم المهتز (S) لا تؤثر على سعة الاهتزازات و إنما تعوض بشكل مستمر كل الطاقة الضائعة بفعل الاحتكاكات ، بحيث تصبح سعة الاهتزاز ثابتة ، ففي النواس المرن الأفقي تصبح المعادلة التفاضلية من الشكل التالي :



التمرين (1) : (التمرين : 001 في بنك التمارين على الموقع) (*)

لدينا نابض مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و ثابت مرونته $k = 10\ N/m$ ، يثبت أحد طرفيه إلى نقطة في جدار شاقولي ، و بطرفه الآخر يثبت جسم صلب (S) كتلته 1 kg يستطيع أن يتحرك دون احتكاك على مستوي أفقي مزود بمحور xx' مبدأه (O) ينطبق على وضع توازن (S) . نزيح الجسم (S) أفقيا بمقدار 2 cm ثم نتركه لحاله عند اللحظة $t = 0$ دون سرعة ابتدائية.



1- مثل القوى المؤثرة على الجسم (S) عند اللحظة $t = 0$.

2- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة المطال $x(t)$ ، استنتج طبيعة حركة الجسم (S) مبينا عبارة دورها الذاتي T_0 ، بين بالتحليل البعدي أن الدور يقدر بالثانية .

3- بين أن قيمة الدور الذاتي للحركة الاهتزازية هي $T_0 = 2s$ ، ثم أحسب قيمة النبض الذاتي ω_0 للحركة ، و تواترها الذاتي f_0 .

4- أثبت أن حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

5- أكتب المعادلات الزمنية للحركة $x(t)$ ، $v(t)$ ، $a(t)$ ثم أرسم بشكل كيفي المنحنى $x(t)$.

6- أحسب سرعة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن .

7- أحسب قيمة توتر النابض عند اللحظة $t = 0$.

8- بين أن طاقة الجملة (جسم + نابض) محفوظة و احسب قيمتها .

9- في الحقيقة الاحتكاكات غير مهملة ، حيث الجسم (S) يخضع أثناء حركته لقوة احتكاك فتصبح المعادلة التفاضلية للحركة من الشكل :

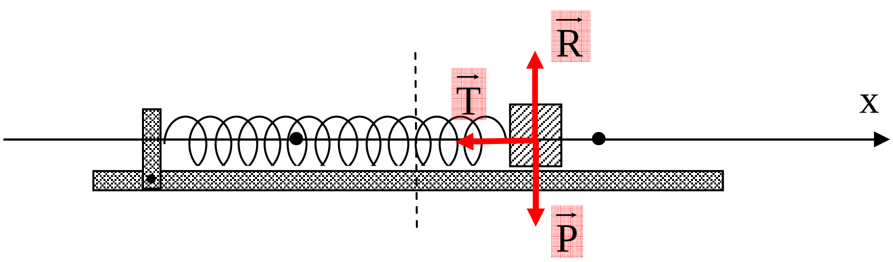
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \lambda x = 0$$

ناقش حسب قيم قوة الاحتكاك النظام الذي تكون عليه حركة (S) ، ثم مثل عندئذ تغيرات المطال x بدلالة الزمن الموافق لكل حالة .

نعتبر $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

1- تمثيل القوى المؤثرة :



2- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور ox :

$$- T = ma \rightarrow - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- طبيعة الحركة :

المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل $x = X_0 \cos(\omega_0 t+\varphi)$ ، إذن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .

- عبارة الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

لدينا $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ و منه :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m}{k}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

• إثبات أن الدور يقدر بالثانية بالتحليل البعدي :

مما سابق :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T_0^{\,2} = \frac{4\pi^2.m}{k}$$

بالتحليل البعدي يكون :

$$[T_0]^2 = \frac{[m]}{[k]}$$

▪ $P = mg \rightarrow [F] = [m][g] \rightarrow [m] = \frac{[F]}{[g]}$

▪ $t = k\,x \rightarrow [F] = [k][X] \rightarrow [k] = \frac{[F]}{[X]}$

يصبح لدينا :

$$[T_0]^2 = \frac{\frac{[F]}{[g]}}{\frac{[F]}{[X]}} \rightarrow [T_0]^2 = \frac{[F]}{[g]}\frac{[X]}{[F]} \rightarrow [T_0]^2 = \frac{[X]}{[g]}$$

$$[T_0]^2 = \frac{m}{\frac{m}{s^2}} = m\frac{s^2}{m} \rightarrow [T_0]^2 = s^2 \rightarrow [T_0] = s$$

إذن دور الحركة الاهتزازية يقدر بالثانية .

3- قيمة T_0 ، ω_0 ، f_0 :

- $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} \approx 2\,s$
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$
- $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5\,Hz$

4- أثبات أن حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $x = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$:

- وجدنا سابقا المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

لدينا :

- $x = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$
- $\frac{dx}{dt} = -\,\omega_0 X_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$
- $\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^{\,2}.X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\,\omega_0^{\,2}.X_0\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m}X_0\cos(\omega_0 + \varphi) = 0$$

و حيث أن : $\omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}$ يصبح :

$$-\frac{k}{m}.X_0\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m}.X_0\cos(\omega_0 + \varphi) = 0 \rightarrow 0 = 0$$

إذن الحل المعطى هو فعلا حل للمعادلة التفاضلية .

5- المعادلات الزمنية :

• المعادلة $x(t)$:

$x = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

- $X_0 = 2\ .\ 10^{-2}\ m$
- $\omega_0 = \pi\ rad/s$

من الشروط الابتدائية :

$t = 0 \rightarrow x = X_0$

بالتعويض :

$X_0 = X_0\cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$

إذن المعادلة الزمنية للحركة تكون كما يلي :

$x = 2 \,.\, 10^{-2} \cos(\pi\, t)$

• المعادلتين $v(t)$ ، $a(t)$:

• $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2 .10^{-2} \cos(\pi t)) \rightarrow v = -2\pi .10^{-2} \sin(\pi t)$

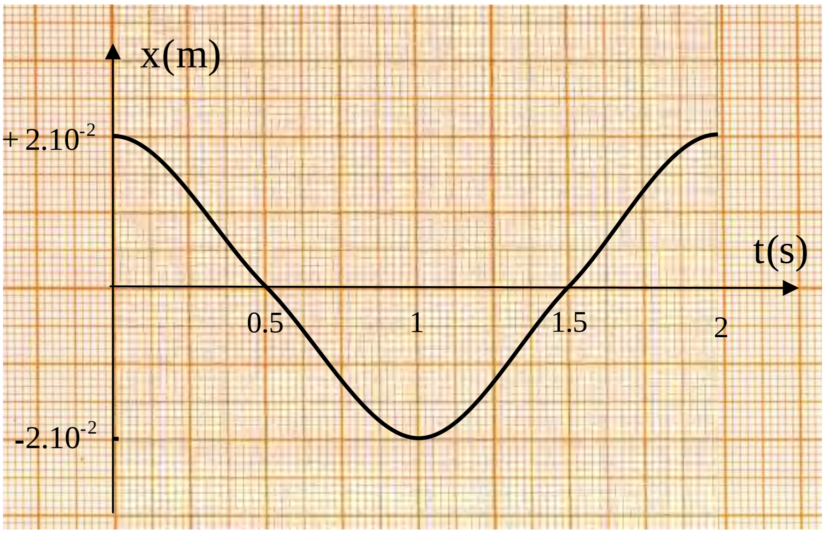
• $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi .10^{-2} \cos(\pi t)) \rightarrow a = -2\pi^2 .10^{-2} \cos(\pi t)$

- مخطط الحركة :

لرسم المنحنى البياني $x(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة $x(t)$ السابقة قيم المطال x خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T}{4} = 0.5\,s$ ، $t = \frac{T}{2} = 1\,s$ ، $t = \frac{3T}{4} = 1.5\,s$ ، $t = T = 2\,s$ ، كما مبين في الجدول التالي :

t (s)	0	0.5	4	1.5	2
$x = 2 \,.\, 10^{-2} \cos(\pi t)$	$+ 2 \,.\, 10^{-2}$	0	$- 2 \,.\, 10^{-2}$	0	$+ 2 \,.\, 10^{-2}$

و منه يكون المنحنى $x(t)$ كما يلي :



6- سرعة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن :

عند المرور بوضع التوازن تكون سرعة مركز عطالة (S) أعظمية :

$v = v_0 = \omega_0 X_0$

$v = \pi \,.\, 2 .10^{-2} = 6.28 \,.\, 10^{-2}$ ms

7- توتر النابض عند اللحظة $t = 0$:

في هذه اللحظة يكون (S) في المطال الأعظمي و عليه :

$T = k\, X_0$

$T = 10 \,.\, 2 \,.\, 10^{-2} = 0.2$ N

8- اثبات أن طاقة الجملة (جسم (S) + نابض) محفوظة :

$E = E_C + E_{Pe}$

$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$

وجدنا سابقا :

- $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- $v = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

ومنه :

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k\, X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m\omega_0^2$$

و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m\omega_0^2\, X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_0^2 \underbrace{(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}_{1})$$

لدينا : $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ و منه يصبح لدينا :

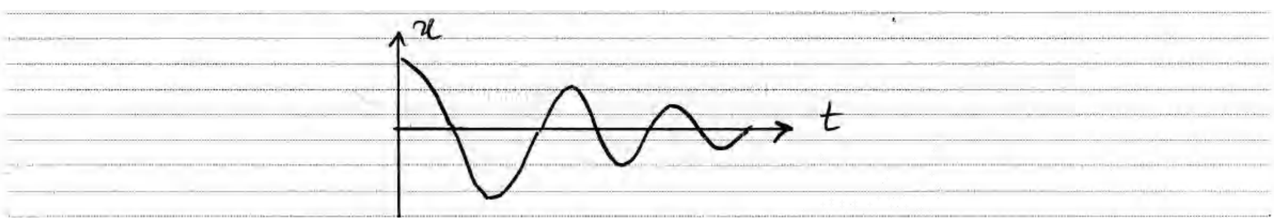
$$\boxed{E = \frac{1}{2} m\omega_0^2\, X_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 = E_{C0}}$$

- قيمة طاقة الجملة :

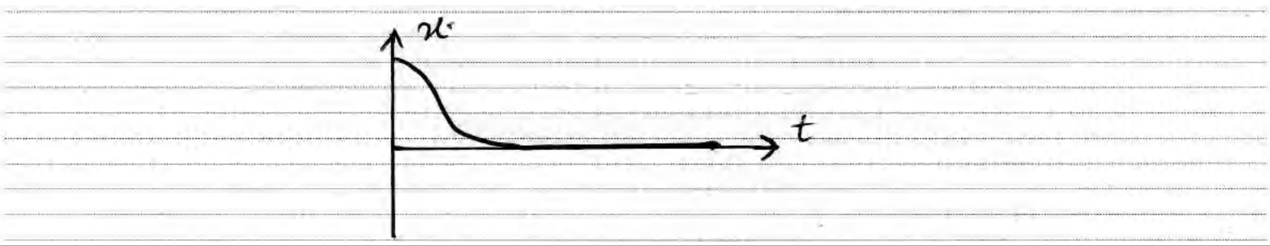
- $E = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2 X_0^2 = \frac{1}{2} .1(\pi)^2\, (2.10^{-2})^2 = 2.10^{-3}$ J
- $E = \frac{1}{2} kX_0^2 = \frac{1}{2} .10\,(2.10^{-2})^2 = 2.10^{-3}$ J

9- مناقشة طبيعة النظام :

- في حالة احتكاكات ضعيفة يكون النظام دوري غير متخامد .

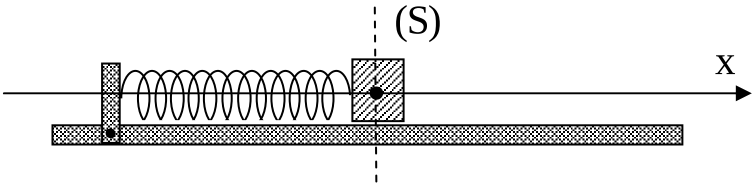


- في حالة احتكاكات معتبرة يكون النظام لا دوري حرج .



التمرين (2) : (التمرين : 002 في بنك التمارين على الموقع) (*)

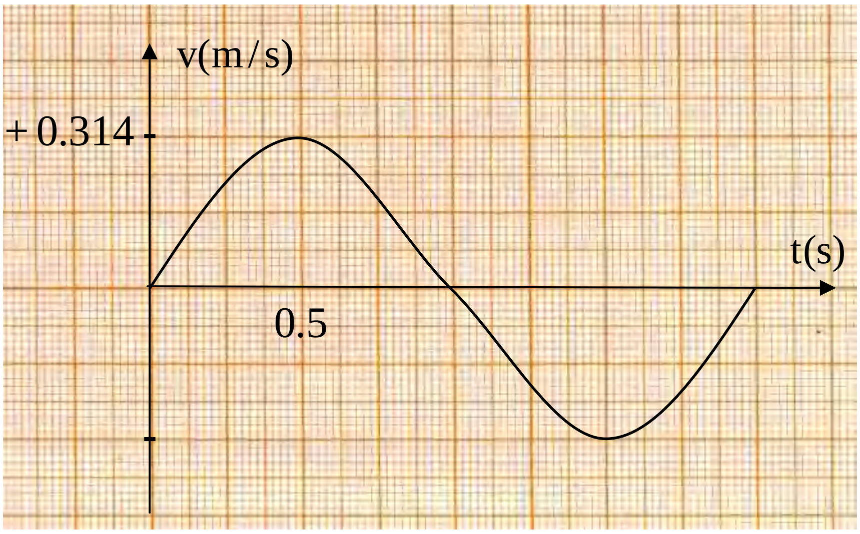
يتألف نواس مرن أفقي من نابض ثابت مرونته k حلقاته غير متلاصقة مهمل الكتلة و جسم صلب (S) كتلته $m = 2kg$.



نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار X_0 ، نلاحظ أن الجسم يأخذ حركة اهتزازية حول موضع توازنه دون تخامد .

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (جسم S) ، اكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$ ثم استنتج طبيعة حركة الجسم (S) .

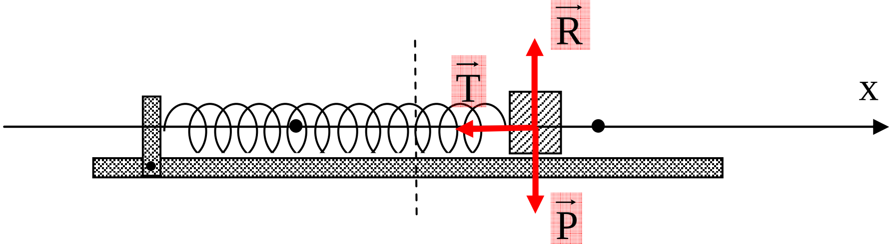
2- البيان التالي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن .



- اعتمادا على البيان حدد :
- سعة الحركة X_0 :
- دور الحركة الذاتي T_0 و نبضها الذاتي ω_0 .
- المطال الأعظمي X_0 للحركة الاهتزازية .
- أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$.
- احسب الطاقة الحركية للجسم (S) عند المرور بوضع التوزان .
- استنتج قيمة الطاقة الكامنة عند اللحظة $t = 0$.
- أوجد بطريقتين مختلفتين ثابت مرونة النابض k . نعتبر $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$:



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور ox :

$$- T = ma \rightarrow - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

2- دور الحركة الذاتي T_0 و نبضها الذاتي ω_0 :

من البيان :

$$T_0 = 4\ .\ 0.5 \ \rightarrow \ T_0 = 2\ s$$

- النبض الذاتي ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} \quad \rightarrow \ \omega_0 = \pi\ rad/s$$

▪ المطال الأعظمي X_0 للحركة الاهتزازية :

من البيان و لدينا $v_0 = 0.314\ s$:

$$v_0 = \omega_0 X_0 \ \rightarrow \ X_0 = \frac{v_0}{\omega_0} \quad \rightarrow X_0 = \frac{0.314}{\pi} = 0.1\,m = 10\,cm$$

3- المعادلة الزمنية للحركة :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

اعتمادا على ما سبق نكتب :

$$x = 0.1 \cos(\pi\ t + \varphi)$$

اعتمادا على البيان :

$$\begin{cases} t = 0 \ \rightarrow \ v = 0 \\ t > 0 \ \rightarrow \ v > 0 \quad (t < \frac{T_0}{4}) \end{cases}$$

هذا يتحقق عندما يكون $x = - X_0$ أي :

$$t = 0 \ \rightarrow \ x = - X_0$$

بالتعويض في المعادلة الزمنية :

$$- X_0 = X_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi)$$
$$\cos(\varphi) = - 1 \ \rightarrow \ \varphi = \pi$$

و منه المعادلة الزمنية $x(t)$ للحركة يكون كما يلي :

$$x = 0.1 \cos(\pi\ t + \pi)$$

▪ الطاقة الحركية للجسم (S) عند المرور بوضع التوزان :

$$E_C = \frac{1}{2} m\,v^2$$

عند المرور بوضع التوازن تكون الطاقة الحركية أعظمية كون أن الطاقة الكامنة المرونية معدومة نتيجة وجود النابض في حالة راحة أي :

$$E_{(C)} = E_{(C)0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_0{}^2X_0{}^2$$

$$E_{(C)} = \frac{1}{2}.\ 2.\pi^2.(0.1)^2 = 0.1\,J$$

▪ <u>الطاقة الكامنة عند اللحظة $t = 0$:</u>

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}m\,x^2$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون المطال أعظمي $(x = X_0)$ و بالتالي تكون الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم + نابض) أعظمية كون أن الطاقة الحركية معدومة نتيجة السرعة المعدومة و عليه :

$$E_{Pe} = E_{Pe0}$$

- حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة و بالتالي تكون طاقة الجسم (جسم + نابض) محفوظة ، بمعنى أن طاقة الجملة (جسم + نابض) عند اللحظة $t = 0$ أين $E_C = 0$ مساوية لطاقة نفس الجملة عند مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن أين $E_{Pe} = 0$ ، نستنتج من ذلك أن الطاقة الكامنة عند اللحظة $t = 0$ تكون مساوية للطاقة الحركية عند المرور بوضع التوزان ، لذا يكون :

$$E_{pe} = E_{pe0} = E_{c0} = 0.1\ J$$

▪ <u>ثابت مرونة النابض k :</u>

<u>الطريقة الأولى :</u>

$$E_{Pe0} = \frac{1}{2}kX_0{}^2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{2E_{Pe0}}{X_0{}^2} \quad \rightarrow k = \frac{2.\ 0.1}{(0.1)^2} = 20\ N/m$$

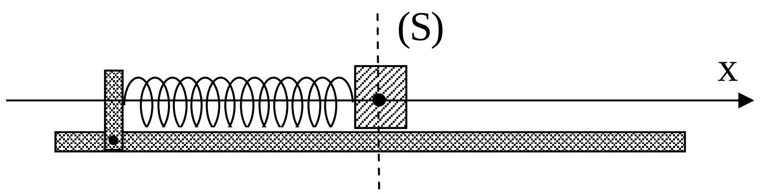
<u>الطريقة الثانية :</u>

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad k = m\omega_0{}^2$$

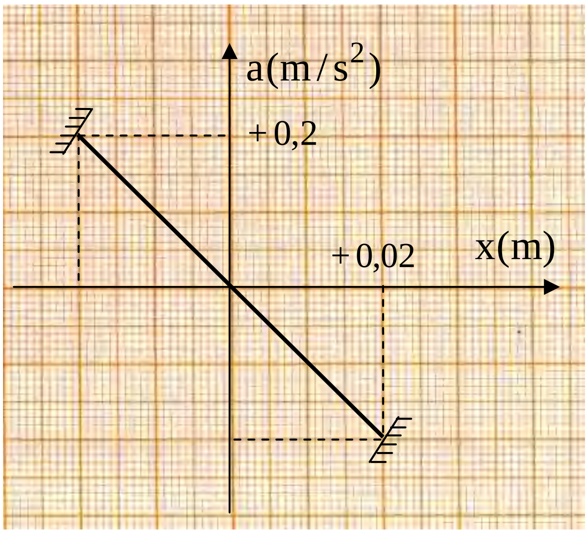
$$k = 2(\pi)^2 = 2.10 = 20\ N/m$$

<u>التمرين (3) :</u> <u>(التمرين : 003 في بنك التمارين على الموقع) (*)</u>

نواس مرن أفقي ، يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ، ثابت مرونته k ، متصل من إحدى طرفيه بجسم صلب (S) كتلته m ، نزيح الجسم (S) أفقيا بمقدار X_0 ثم نتركه حرا لحاله دون سرعة ابتدائية ، نعتبر مبدأ المطال عندما يكون الجسم (S) عند وضع التوازن .



- المخطط البياني التالي يمثل تطور تسارع مركز عطالة الجسم (S) بدلالة مطال الحركة x .
- اعتماد على البيان :



1- استنتج طبيعة الحركة .

2- أوجد العبارة النظرية التي تعبر عن التسارع $a_{(t)}$ بدلالة المطال $x_{(t)}$.

3- أحسب :

أ- النبض الذاتي للحركة ω_0 ، الدور الذاتي T_0 ، التواتر الذاتي f_0 .

ب- سعة الحركة بطريقتين مختلفتين .

4- أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$ باعتبار مبدأ الأزمنة عند مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن في الاتجاه السالب .

يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- استنتج طبيعة الحركة :

المنحنى $a(t)$ عبارة عن مستقيم ميله سالب يمر من المبدأ معادلته من الشكل $a = \alpha x$ ، هذا يعني أن تسارع مركز عطالة (S) يتناسب طرديا مع المطال و يعاكسه في الإشارة . نستنتج أن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .

2- العبارة النظرية التي تعبر عن التسارع $a_{(t)}$ بدلالة المطال $x_{(t)}$:

بما أن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة تكون المعادلة الزمنية للحركة من الشكل :

- $x = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$
- $v = \dfrac{dx}{dt} = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
- $a = \dfrac{dv}{dt} = -\omega_0^2 . X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

و حيث أن : $x = X_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ يصبح :

$a = -\omega_0^2 x$

أ- النبض الذاتي للحركة ω_0 :

- بيانيا :

$a = \alpha x$ .... (1)

حيث α هو ميل المستقيم .

- نظريا و مما سبق :

$a = -\omega_0^2 x$ .... (2)

بالمطابقة :

$$-\omega_0^2 = \alpha \rightarrow \omega_0 = \sqrt{-\alpha}$$

من البيان :

$$\alpha = -\frac{0.2}{0.02} = -10 \quad \rightarrow \omega_0 = \sqrt{-(-10)} = \sqrt{\pi^2} = \pi \text{ rad/s}$$

- الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,\text{s}$$

ب- سعة الحركة :

الطريقة الأولى :

X_0 هو أعظم قيمة للمطال ومن البيان يكون :

$X_0 = 0.02$ m

الطريقة الثانية :

من البيان :

$a_0 = 0.2$ m/s^2

و لدينا :

$$a_{0x} = \omega_0^2 X_0 \quad \rightarrow X_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2} \quad \rightarrow X_0 = \frac{0.2}{\pi^2} = \frac{0.2}{10} = 0.02\,\text{m}$$

3- المعادلة الزمنية للحركة :

$x = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

- $X_0 = 0.02$ m
- $\omega_0 = \pi$ rad/s
- $t = 0 \rightarrow x = 0$ (وضع التوازن) , $v > 0$

بالتعويض في المعادلة $x(t)$:

$$0 = X_0\cos(\omega_0(0)+\varphi) \rightarrow \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا :

$v = -v_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0\sin\varphi$

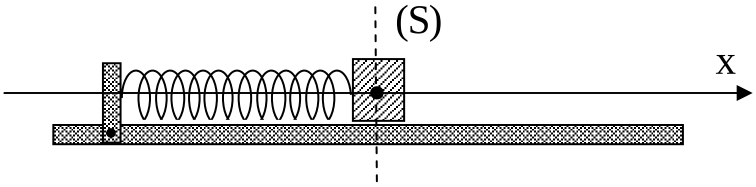
- $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 < 0$ (مقبول)
- $\varphi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0(-1) = v_0 > 0$ (مرفوض)

إذن المعادلة الزمنية $x(t)$ تكون كما يلي :

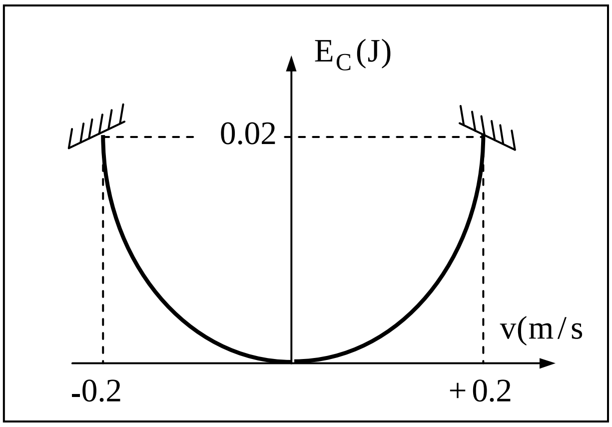
$$x = 0.02\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

التمرين (4) : (التمرين : 004 في بنك التمارين على الموقع) (*)

1- نابض مرن كتلته مهملة و حلقاته غير متلاصقة ، ثابت مرونته K ، نثبت إحدى نهايتيه بنقطة (o) ، و يثبت بنهايته الأخرى جسم صلب (S) كتلته m ، يمكنه الإنزلاق أفقيا دون احتكاك (الشكل) ، نعتبر مبدأ الفواصل عند وضع التوازن .



- حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة ، قسنا زمن 15 اهتزازة فوجدنا $\Delta t = 9.42\ s$. يمثل البيان التالي تغيرات الطاقة الحركية للجسم (S) بدلاله سرعة مركز عطالة الجسم (S) .



1- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (جسم + نابض) أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة x(t) .
2- عرف الدور الذاتي للحركة ثم أحسب قيمته T_0 و كذا النبض الذاتي للحركة ω_0 .
3- استنتج من هذا البيان :
أ- سرعة مركز عطالة الجسم (ص) عند المرور بوضع التوازن .
ب- سعة الحركة X_0 .
جـ- كتلة الجسم (S) .
د- ثابت مرونة النابض K .
4- أرسم على نفس البيان السابق المنحنيين $E_{pe}(v)$ ، $E(v)$ ، حيث E_{pe} الطاقة الكامنة المرونية و E طاقة الجملة الكلية $(E = E_C + E_{pe})$.

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة x(t) :
- الجملة المدروسة : (جسم (S) + نابض) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة بين الموضع M_0 و موضع كيفي M يكون عنده المطال x(t) .

$$E_0 + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_{(t)}$$

$$E_{C0} + E_{Pe0} = E_{C(t)} + E_{Pe(t)}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\,x_0^2 = \frac{1}{2}mv^2_{(t)} + \frac{1}{2}k\,x^2_{(t)}$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$0=\frac{1}{2}m(2\frac{dv_{(t)}}{dt}.v_{(t)}+\frac{1}{2}k(2\frac{dx_{(t)}}{dt}.x_{(t)})\rightarrow m\frac{dv_{(t)}}{dt}.v_{(t)}+k\frac{dx_{(t)}}{dt}.x_{(t)}=0$$

و حيث أن : $\frac{dx_{(t)}}{dt}=v_{(t)}$ ، $\frac{dv_{(t)}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$ يصبح :

$$m\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2}.v_{(t)}+k.v_{(t)}.x_{(t)}=0\quad\rightarrow v_{(t)}(m\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2}+k.x_{(t)})=0$$

$$m\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2}+k.x_{(t)}=0\quad\rightarrow\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2}+\frac{k}{m}x_{(t)}=0$$

2- تعريف الدور الذاتي للحركة الاهتزازية الجيبية غير المتخامدة :

هو الزمن اللازم لانجاز اهتزازة واحد .

قيمته :

حسب التعريف و باستعمال القاعدة الثلاثية نجد :

$$\begin{cases}15\text{ اهتزازة}\rightarrow 9.42\text{ s}\\ 1\text{ اهتزازة}\rightarrow T_0\text{ s}\end{cases}$$

و منه :

$$T_0=\frac{9.42\ .1}{15}=0.628\,s$$

- النبض الذاتي للحركة ω_0 :

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\quad\rightarrow\omega_0=\frac{2\,\pi}{0.628}=10\,rad/s$$

3- أ- سرعة مركز عطالة الجسم (ص) عند المرور بوضع التوازن :

عند المرور بوضع التوازن تكون السرعة أعظمية و عليه يكون من البيان :

$v=v_0=0.2$ m/s

ب- سعة الحركة X_0 :

$$v_0=\omega_0X_0\ \rightarrow\ X_0=\frac{v_0}{\omega_0}\ \rightarrow X_0=\frac{0.2}{10}=0.02\,m$$

جـ- كتلة الجسم (S) :

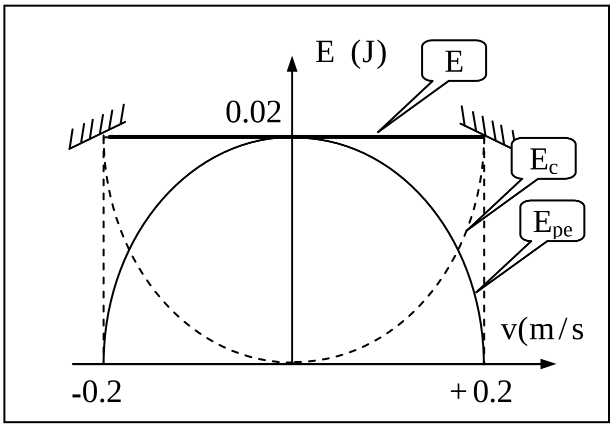
من البيان : $E_{C0}=0.02$ J ، $v_0=0.2$ m/s و لدينا :

$$E_{C0}=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}\quad\rightarrow\quad m=\frac{2E_{C0}}{v_0^{\ 2}}\ \rightarrow m=\frac{2\,.\,0.02}{(0.2)^2}=1\,kg$$

د- ثابت مرونة النابض K :

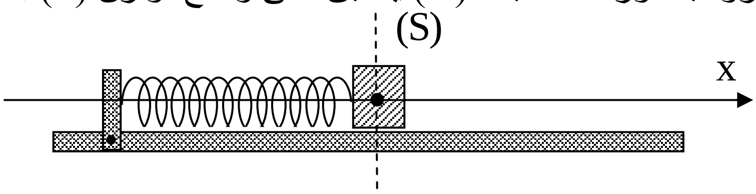
$$w_0^{\ 2}=\frac{k}{m}\ \rightarrow\ k=\omega_0^{\ 2}.m\ \rightarrow k=(10)^2.1=100\text{ N/m}$$

4- المنحنيين $E_{pe}(v)$ ، $E(v)$:

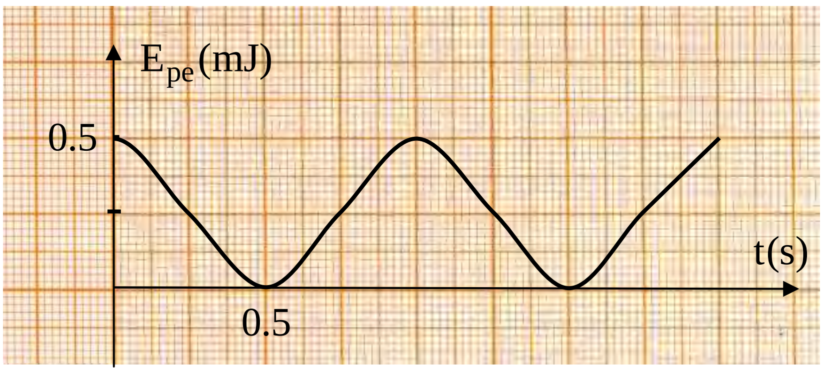


التمرين (5): (التمرين : 005 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يتألف نواس مرن أفقي من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و جسم صلب (S) كتلته $m = 1\ kg$ ، نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار X_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ حرا لحاله دون سرعة ابتدائية ، فيتحرك دون احتكاك على مستوي أفقي مزود بمحور xx' مبدأه (O) ينطبق على وضع توازن (S) .



يمثل البيان التالي تغيرات الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم S + نابض) بدلالة الزمن .



1- اعتمادا على هذا البيان أحسب : الدور الذاتي للحركة T_0 ، النبض الذاتي للحركة ω_0 ، ثابت مرونة النابض K ، سعة الحركة X_0 .

2- أكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ المميزة للحركة .

3- أرسم على نفس البيان السابق المنحنيين $E_C(t)$ ، $E(t)$ ، حيث E_c الطاقة الحركية و E طاقة الجملة الكلية ($E = E_C + E_{pe}$) .

نعتبر : $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

1- الدور الذاتي T_0 للحركة :

تتغير قيمة الطاقة الكامنة من قيمة أعظمية (عند المطال الأعظمي) إلى قيمة معدومة (عند وضع التوازن) خلال ربع دور $\frac{T_0}{4}$ و عليه يكون من البيان :

$$\frac{T_0}{4} = 0.5\,s \rightarrow T_0 = 2\ s$$

- النبض الذاتي ω_0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$$

- ثابت مرونة النابض k :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = \omega_0^2.m \rightarrow k = \pi^2 . 1 = 10\ N/m$$

- سعة الحركة X_0 :

من البيان $E_{Pe0} = 0.5\ mJ$ و لدينا :

$$E_{Pe0} = \frac{1}{2}kX_0^2 \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{2E_{Pe0}}{k}} \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{2\ .\ 0.5.10^{-3}}{10}} = 10^{-2}\ m = 1\,cm$$

2- المعادلة الزمنية x(t) :

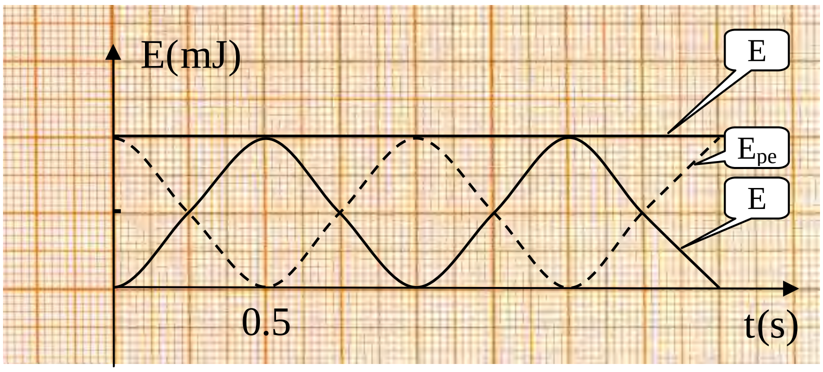
$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

- $X_0 = 10^{-2}$ m
- $\omega_0 = \pi$ rad/s
- $t = 0 \rightarrow x = X_0 \rightarrow \varphi = 0$

إذن المعادلة الزمنية للحركة تكون كما يلي :

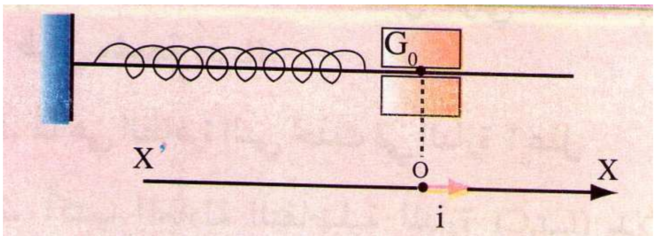
$x = 2\ .\ 10^{-2} \cos(\pi\ t)$

3- المنحنيين $E_C(v)$ ، $E(v)$:

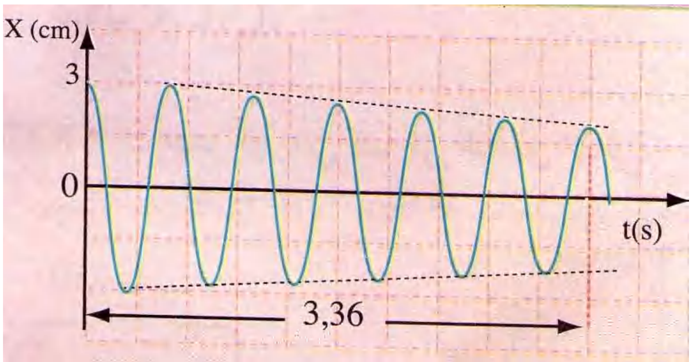


التمرين (6) : (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نواس مرن أفقي يتكون من جسم صلب (S) كتلته $m = 100\ g$ و نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و ثابت مرونته $k = 13\ N/kg$، الجسم (S) بإمكانه الحركة على ساق أفقية كما مبين في الشكل التالي :



عند اللحظة $t = 0$ يكون الجسم (S) متوازنا و يكون مركز عطالته G منطبق على مبدأ الفواصل O ، عند اللحظة t يمر مركز العطالة G من نقطة مطالها x بسرعة v .
بواسطة تجهيز مناسب تمكنا من متابعة تغيرات المطال x بدلالة الزمن t فتحصلنا على البيان التالي :



1- ما هو نمط الاهتزازات ؟
2- أحسب قيمة شبه الدور T للإهتزازات ؟
3- أكتب عبارة طاقة الجملة (جسم + نابض) بدلالة m ، k ، x ، v .
4- حدد من البيان قيم المطال x عند اللحظات : $t_0 = 0$ ، $t_1 = T$ ، $t_2 = 5T$ ثم أحسب طاقة الجملة في هذه اللحظات مع الشرح .
5- قارن بين القيم المتحصل عليها ، ما هو سبب التغير في طاقة الجملة ؟

الأجوبة :

1- نمط الاهتزازات حرة متخامدة .

2- قيمة شبه الدور T :

من البيان :

$$6\ T = 3.36\ s \ \rightarrow\ T = \frac{3.36}{6} = 0.56\, s$$

3- عبارة طاقة الجملة (جسم + نابض) بدلالة m ، k ، x ، v :

تمتلك الجملة (جسم + نابض) في لحظة t من اهتزازاتها طاقة حركتة $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ و طاقة كامنة مرونية $E_{Pe} = \frac{1}{2}k.x^2$ ، فإذا اعتبرنا وضع الجملة في حالة التوازن مرجعا لحساب الطاقة الكامنة المرونية ، أين يصبح المطال x مساوي لاستطالة النابض ، تكون عبارة طاقة الجملة (جسم + نابض) كما يلي :

$$E = E_C + E_{Pe} \rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

4- قيمة المطال و الطاقة عند اللحظات $t = 0$ ، $t = T$ ، $t = 5T$:

من البيان :

- $t = 0 \rightarrow x = 3\ cm$
- $t = T \rightarrow x = 3\ cm$
- $t = 5T \rightarrow x = 2.25\ xm$

- في اللحظات $t = 0$ ، T ، $5T$ يكون المطال أعظمي و عليه في هذه اللحظات تكون الطاقة الكامنة المرونية أعظمية في حين تكون الطاقة الحركية معدومة ، و منه تصبح عبارة طاقة الجملة في اللحظات المذكورة كما يلي :

- $t = 0 \rightarrow x = 3\ cm \rightarrow E = 0 + \frac{1}{2} . 13 . (3 . 10^{-2})^2 = 5.85 . 10^{-3}\ J$
- $t = T \rightarrow x = 3\ cm \rightarrow E = 0 + \frac{1}{2} . 13 . (3 . 10^{-2})^2 = 5.85 . 10^{-3}\ J$
- $t = 5T \rightarrow x = 2.25\ cm \rightarrow E = 0 + \frac{1}{2} . 13 . (2.25 . 10^{-2})^2 = 3.29 . 10^{-3}\ J$

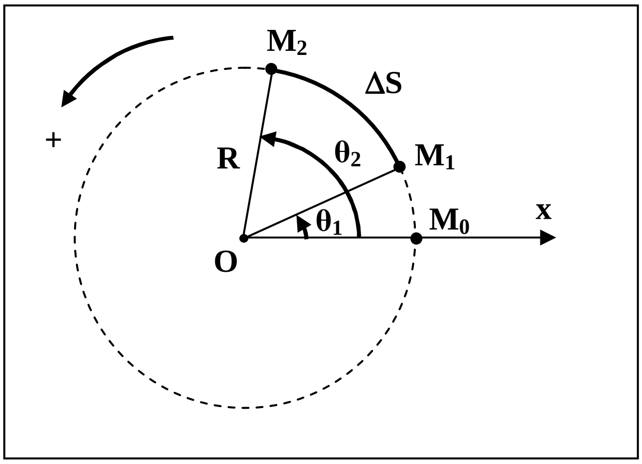
5- المقارنة بين الطاقات :

نلاحظ أن طاقة الجملة تتناقص بمرور الزمن ، السبب في ذلك يعود إلى الاحتكاك الموجود بين الجسم الصلب (S) و الساق .

3- الإهتزازت الحرة في النواس الثقلي

• الفاصلة المنحنية و السرعة (تذكير):

- نعتبر جسم نقطي (أبعاده مهملة) ينتقل على مسار دائري نصف قطره R و مركزه O مارًا بالمواضع M_1 ، M_2 ، ..... عند اللحظات t_1 ، t_2 ، ...... (الشكل)



- الفاصلة المنحنية التي نرمز لها بـ s و تقدر بالمتر (m) هي المسافة المنحنية (على المحيط) بين الموضع M_i و موضع M_0 نعتبره مبدأ للفواصل المنحنية .

- الفاصلة الزاوية التي نرمز لها بـ θ و تقدر بالراديان (rad) هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر (OM_i) المار من الموضع M_i مع نصف القطر (OM_0) المار من O و الذي يعتبر مبدأ للفواصل الزاوية .

- يعبر عن الفاصلة الزاوية θ بدلالة الفاصلة المنحنية s بالعلاقة :

$$\theta = \frac{s}{R} \leftrightarrow s = R\,\theta$$

• السرعة الخطية و الزاوية :

- السرعة اللحظية v لمتحرك (S) عند لحظة v و وحدتها المتر/الثانية (m/s) هي مشتقة الفاصلة الخطية s أي :

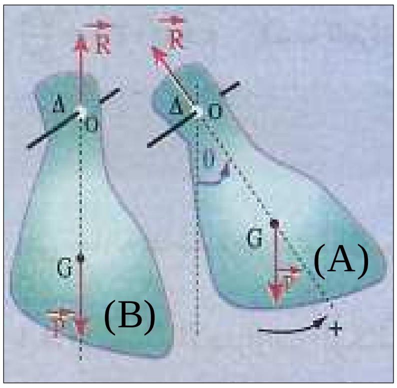
$$v = \frac{ds}{dt}$$

و حيث أن : $s = R.\theta$ فإنه يمكن كتابة عبارة السرعة اللحظية كما يلي :

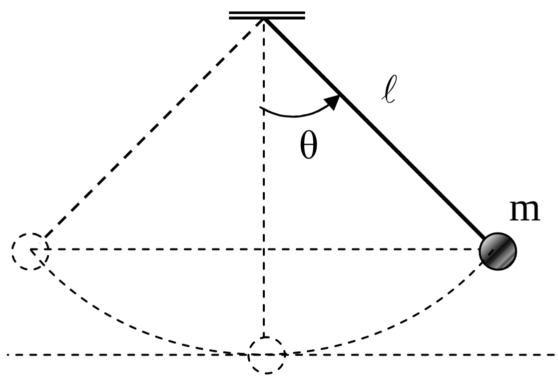
$$v = R\frac{d\theta}{dt}$$

• تعريف النواس الثقالي :

- النواس الثقالي هو كل جسم بإمكانه الاهتزاز حول محور أفقي (Δ) ثابت و لا يمر من مركز عطالته (الشكل-A) .
- يكون النواس الثقالي في حالة توازن مستقر عندما يقع G مركز عطالة الجسم تحت و على شاقول النقطة o (نقطة تعليق النواس) (الشكل-B) .



- ينجز النواس الثقالي اهتزازة واحدة عندما يمر مركز عطالته من نقطة ما من مساره مرورين متعاقبين بنفس الاتجاه بالنسبة لوضع التوازن .
- كحالة خاصة من النواس الثقالي ، نذكر النواس الثقالي البسيط التي يتألف من خيط طويل غير قابل للامتطاط و مهمل الكتلة ، معلق بنهايته الحرة بجسم صلب نقطي (أبعاده مهملة بالنسبة لطول الخيط) .



• دراسة حركة نواس بسيط – حالة اهتزازات حرة غير متخامدة (خاص بالشعب الرياضية) :

• طاقة الجملة (جسم + أرض) :

- نتيجة حركة الجسم (S) ، فإن الجملة (جسم + أرض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة حركية E_C عبارتها :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m v^2}$$

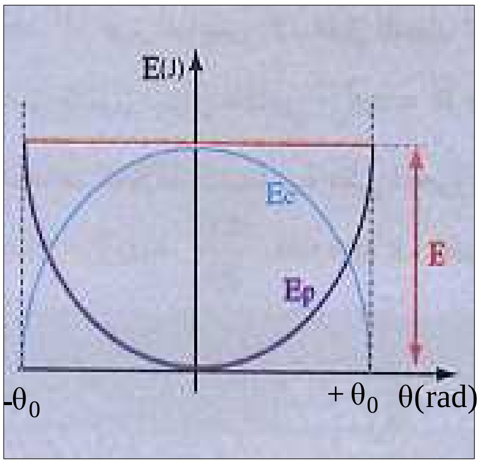
و نتيجة وجود الجسم (S) على ارتفاع h من سطح الأرض ، الجملة (جسم + أرض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة كامنة ثقالية E_{Pe} عبارتها :

$$\boxed{E_C = mgz}$$

حيث z هو ارتفاع الجسم (S) بالنسبة للمستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة الثقالية .
- تمتلك الجملة (جسم + أرض) في اللحظة t من الحركة الاهتزازية طاقة مساوية لمجموع طاقتها الحركية و الكامنة المرونية ، و نكتب :

$$\boxed{E = E_C + E_{Pp}}$$

- الشكل التالي يمثل تطور الطاقتين الحركية و الكامنة الثقالية أثناء الحركة الاهتزازية ، كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



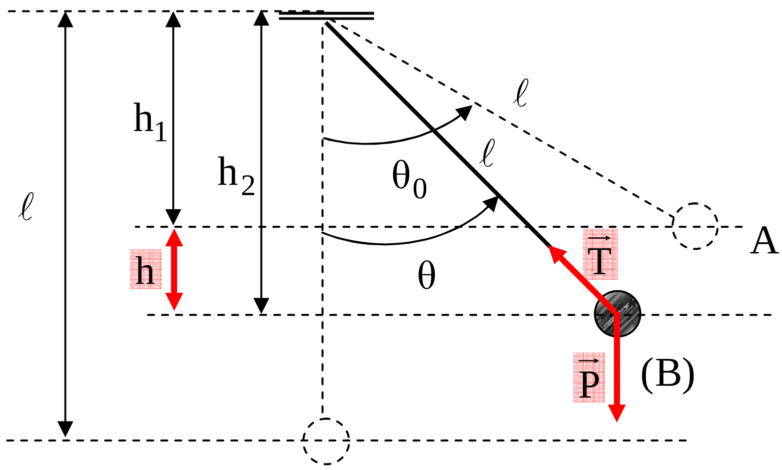
▪ المعادلة التفاضلية θ(t) :

لدراسة حركة نواس ثقالي بسيط ، نستعمل نواس مرن يتكون من خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط طوله ℓ ، مرتبط بطرف الحر بجسم صلب نقطي (S) كتلته m .
- نزيح النواس الثقالي البسيط بزاوية θ_0 ، ثم نتركه حرا لحاله دون سرعة ابتدائية .
▪ نذكر مسبقا بخاصية المشتقة التالية :

$$\boxed{(f^n)' = n f' f^{n-1} \rightarrow \frac{d(f^n)}{dx} = 2n.\frac{df}{dx}.f^{n-1}} .$$

مثلا :

$$\boxed{\frac{d(v^2)}{dt} = 2.\frac{dv}{dt}.v}$$



- الجملة المدروسة : (كرية + أرض) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$ حيث :

$$W_{AB}(\vec{P}) = 0 \quad , \quad W_{AB}(\vec{T}) = 0$$

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضع (A) و الوضع (B) :

$$0 + mg(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}mv^2$$

من الشكل :

- $\cos\theta_0 = \frac{h_1}{\ell} \longrightarrow h_1 = \ell\cos\theta_0$
- $\cos\theta = \frac{h_2}{\ell} \longrightarrow h_2 = \ell\cos\theta$

يصبح :

$$mg(\ell\cos\theta - \ell\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \to mg\ell\cos\theta - mg\ell\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

θ و v دالتين في الزمن في حين θ_0 تكون ثابتة ، و باشتقاق الطرفين نجد :

$$mg\ell(\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta)) - 0 = \frac{1}{2}m(2\frac{dv}{dt}.v)$$

$$-mg\ell\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = \frac{1}{2}m(2\frac{dv}{dt}.v) \quad \to -g\ell\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = \frac{dv}{dt}.v$$

لدينا :

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \frac{dv}{dt} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

و منه يصبح :

$$-2g\ell\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 2(\ell\frac{d\theta}{dt}).(\ell\frac{d^2\theta}{dt^2})$$

$$-2g\ell\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 2\ell^2.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow -g\sin\theta = \ell.\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \ell.\frac{d^2\theta}{dt^2} + g.\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}.\sin\theta = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها ليس جيبيا ، و من أجل الزوايا الصغيرة أين $\sin\theta \approx \theta$ ، يمكن كتابة :

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}.\theta = 0}$$

هي من الشكل :

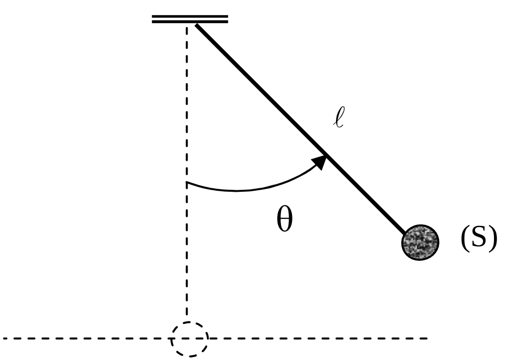
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0{}^2.\theta = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها جيبي من الشكل $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ ، نستنتج أنه من أجل الزوايا الصغيرة تكون حركة النواس البسيط اهتزازية جيبية دورها :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

<u>التمرين (7) :</u> (التمرين : 007 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نواس بسيط يتكون من خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط طوله $\ell = 1\ m$ و جسم نقطي (S) كتلته m ، نزيح النواس في اللحظة t بزاوية θ_0 ، ثم نتركه عند اللحظة $t = 0$ دون سرعة ابتدائية .



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن المعادلة التفاضلية بدلالة $\theta(t)$ المميزة للحركة من أجل السعات الزاوية الصغيرة تكون من الشكل :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0{}^2\theta = 0$$

حيث ω_0 هو ثابت يميز طبيعة الحركة يطلب التعبير عنه بدلالة طول الخيط ℓ و شدة الجاذبية g .

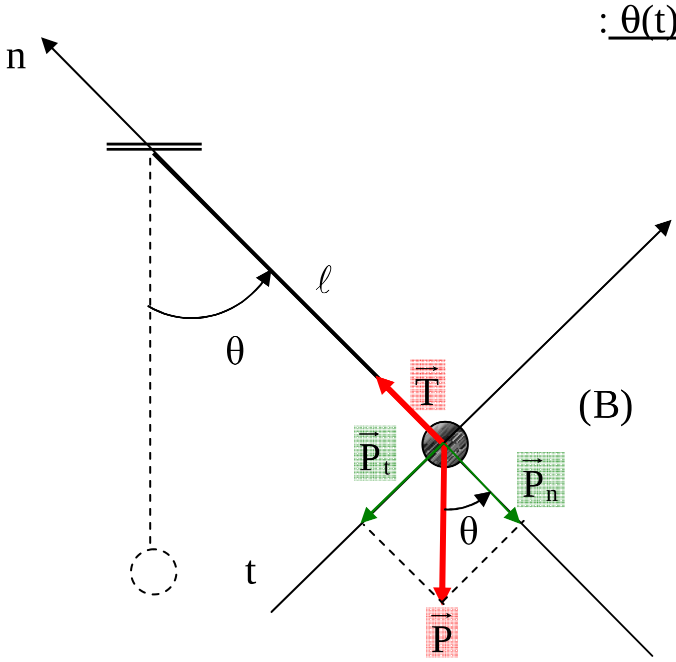
2- أثبت أن هذه المعادلة التفاضلية تقبل المعادلة $\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$ كحل لها .

3- دور الحركة الاهتزازية الذاتي من أجل السعات الصغيرة هو $T_0 =$ 2s ، أوجد :

أ- النبض الذاتي ω_0 للحركة الاهتزازية .
ب- قيمة الجاذبية g الأرضية في مكان التجربة .
يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $\theta(t)$:



- الجملة المدروسة : (كرية) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$.
- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور المماسي (ot) نجد :

$$-P \sin\theta = m\, a_t$$

$$-m.g \sin\theta = m\frac{dv}{dt} \rightarrow -g\sin\theta = \frac{dv}{dt}$$

لدينا :

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

و منه يصبح :

$$-g.\sin\theta = \ell.\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\ell.\frac{d^2\theta}{dt^2} + g.\sin\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة يكون : $\sin\theta \approx \theta$ و منه يصبح لدينا :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$\omega_0{}^2 = \frac{g}{\ell} \;\rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

2- التحقق من حل المعادلة التفاضلية :

- $\theta = \theta_0\cos(\omega_0\, t + \varphi)$
- $\frac{d\theta}{dt} = -\,\omega_0\theta_0\sin(\omega_0\, t + \varphi)$
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega_0\theta_0\cos(\omega_0\, t + \varphi)$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$-\,\omega_0{}^2\theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0{}^2.\theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \;\rightarrow\; 0 = 0$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

3- أ- نبض الحركة :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

ب- قيمة g :

$$\omega_0{}^2 = \frac{g}{\ell} \;\rightarrow g = \omega_0{}^2.\ell$$

$$g = \pi^2 \,.\, 1 = 10 \,.\, 1 \rightarrow\; g = 10 \text{ m/s}^2 \,.$$

4- المعادلة الزمنية للحركة :

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

- $\theta_0 =$

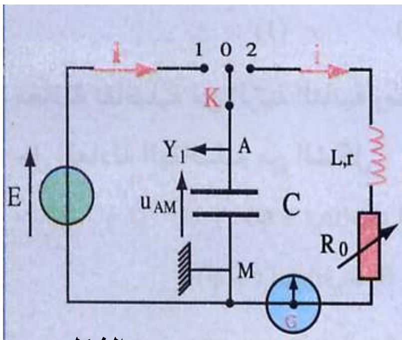
II – الاهتزازات الحرة لجملة كهربائية

1- الاهتزازات الحرة للدارة الحقيقة (R,L,C)

● الدراسة التحليلية للدارة الحقيقية (R,L,C):

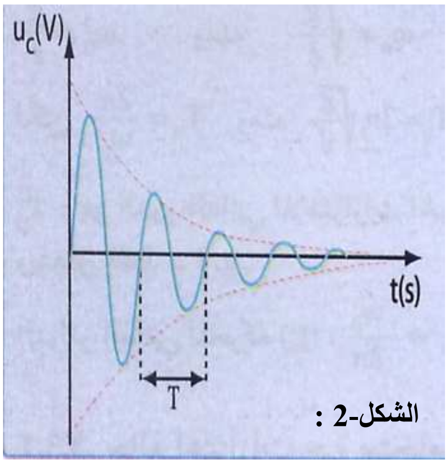
نحقق الدارة المبينة في (الشكل-1) المقابل ، نشحن المكثفة بوضع البادلة في الوضع (1) ، ثم نفرغها بنقلها إلى الوضع (2) و نعطي للمقاومة R_0 قيما متزايدة ، و من أجل كل قيمة نراقب حركة إبرة المقياس الغلفاني و نتابع أيضا تغيرات التوتر بين طرفي المكثفة و ذلك من البيان الذي يظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي .

نعتبر $R = R_0 + r$ هي المقاومة المكافئة .



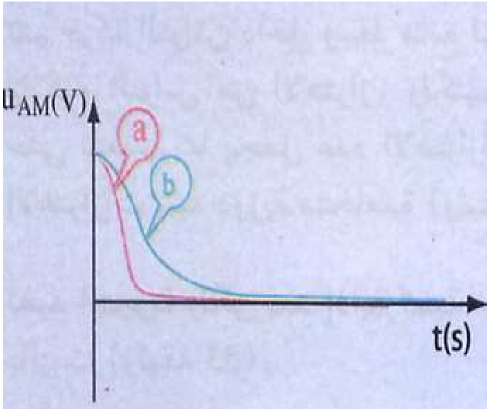
الشكل-1 :

- من أجل $R_0 = 0$ أي المقاومة المكافئة للدارة هي $R = r$ (مقاومة صغيرة) تهتز إبرة المقياس الغلفاني على جانبي الصفر المركزي بسعات متناقصة حتى تعود إلى للصفر ، أما على شاشة راسم الاهتزاز فيظهر البيان المبين في (الشكل-2) و الذي يظهر أن التوتر بين طرفي المكثفة أثناء تفريغها يكون متناوبا و الاهتزازات الحاصلة شبه دورية و سعتها تتناقص بسرعة لذا نقول عن الاهتزازات أنها متخامدة ، وبما أن الدارة لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي نقول إن الاهتزازات حرة و تسمى الدارة (R,L,C) بالدارة المهتزة الحرة و المتخامدة و النظام في الدارة شبه دوري ، و شبه دور اهتزازتها هو T .



الشكل-2 :

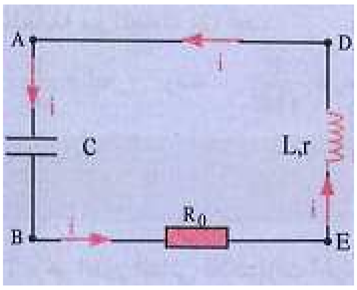
- نزيد من قيمة المقاومة المكافئة R فنلاحظ تزايد تخامد الاهتزازات حتى تصل إلى قيمة كبيرة للمقاومة ، عندها تنحرف إبرة المقياس الغلفاني إلى جهة واحدة ثم تعود إلى للصفر ، أما على شاشة راسم الاهتزاز نشاهد البيان المبين في (الشكل-3) .



الشكل-3 :

• المعادلة التفاضلية بدلالة q(t) للدارة الحقيقة (R,L,C) :

نحقق الدارة الكهربائية التالية و التي تتكون على التسلسل من وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، مكثفة مشحونة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R_0 ، نختار اتجاها موجبا للتيار الكهربائي كما مبين في الشكل .



- بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$u_{AB} + u_{BE} + u_{DE} + u_{DA} = 0$$

$$u_C + u_{R0} + u_b + 0 = 0 \quad \rightarrow \frac{q}{C} + Ri + L\frac{di}{dt} + ri = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + (R_0 r)i + \frac{q}{C} = 0 \quad \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + (R_0 r)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

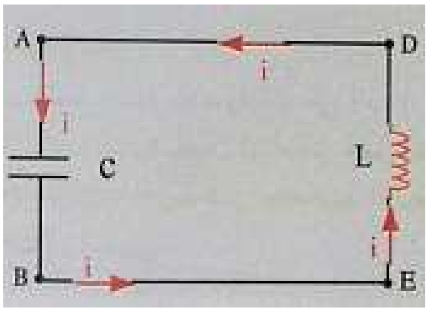
$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{(R_0 r)}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، لا تقبل حل جيبي ، حلها خارج البرنامج .

ب - الاهتزازات الحرة للدارة المثالية (L,C)

• المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ للدارة الحقيقية (R,L,C) :

نحقق الدارة الكهربائية التالية و التي تتكون على التسلسل من وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، مكثفة مشحونة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R_0 ، نختار اتجاها موجبا للتيار الكهربائي كما مبين في الشكل .



- بتطبيق قانون جمع التوترات :

$u_{AB} + u_{BE} + u_{DE} + u_{DA} = 0$

$u_C + 0 + u_b + 0 = 0$

$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

هي من الشكل :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0{}^2 q = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، حلها جيبي من الشكل $q = Q_0 \cos(\omega_0 t+\varphi)$ ، ومنه الإهتزازات الجملة حرة جيبية غير متخامدة دورها :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$$

• العبارة الزمنية $q(t)$ و المنحنى البياني الموافق :

- حل المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ السابقة :

$q = Q_0 \cos(\omega_0 t+\varphi)$.

- من الشروط الإبتدائية :

$t = 0 \rightarrow q = + Q_0$

بالتعويض في المعادلة :

$+Q_0 = Q_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos\varphi = +1 \rightarrow \varphi = o$

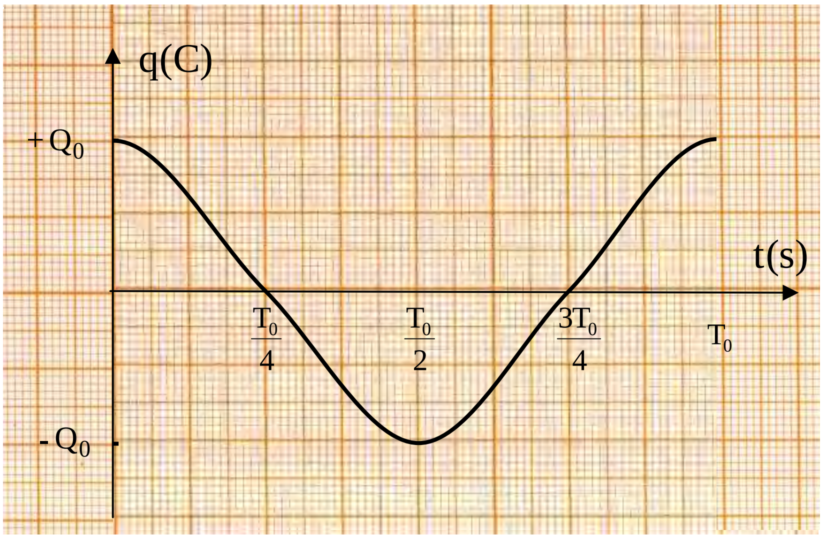
ومنه العبارة الزمنية $q(t)$ تصبح :

$q = Q_0 \cos(\omega_0 t)$

لرسم المنحنى البياني $q(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة قيم شحنة المكثفة q خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

t (s)	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0} t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$q = Q_0 \cos(\omega_0 t)$	$+Q_0$	0	$-Q_0$	0	$+Q_0$

و منه يكون المنحنى $q(t)$ كما يلي :



• العبارة الزمنية $i(t)$ و المنحنى البياني الموافق :

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

مما سبق : $q = Q_0 \cos(\omega_0 t)$ يكون :

$$i = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$i = -I_0 \sin(\omega_0 t)$$

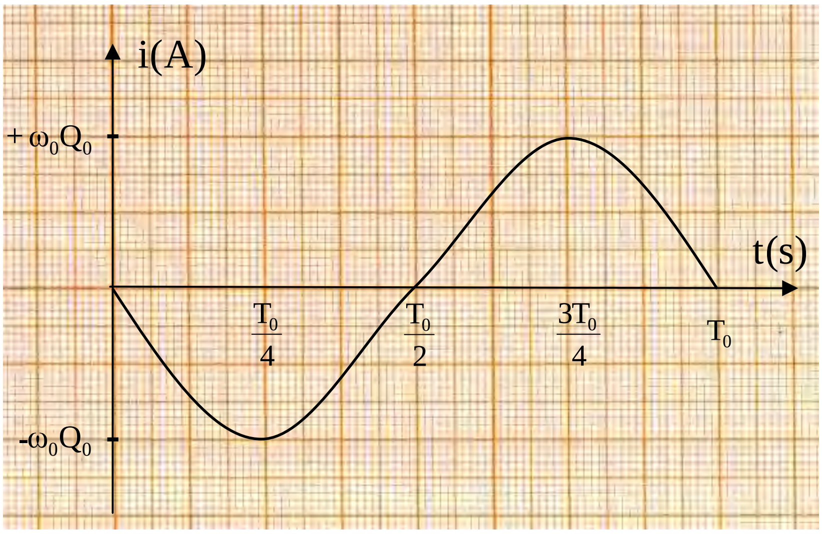
حيث : $I_0 = \omega_0 Q_0$ هي شدة التيار الأعظمية .

<u>بيانيا :</u>

لرسم المنحنى البياني $v(t)$ نحسب اعتمادا على المعادلة قيم شدة التيار i خلال اللحظات : $t = 0$ ، $t = \frac{T_0}{4}$ ، $t = \frac{T_0}{2}$ ، $t = \frac{3T_0}{4}$ ، $t = T_0$ ، كما مبين في الجدول التالي :

$t\ (s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$(\omega_0 t) = (\frac{2\pi}{T_0}t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$i = -\omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t)$	0	$-\omega_0 Q_0$	0	$-\omega_0 Q_0$	0

و منه يكون المنحنى $i(t)$ كما يلي :



• الطاقة في الدارة الكهربائية المهتزة :

▪ طاقة الجملة (L,C) :

- تخزن الدارة المثالية (L,C) في اللحظة t طاقة في المكثفة عبارتها $E_{(C)} = \frac{1}{2}Cu_C^2$ ، و تخزن في الوشيعة طاقة عبارتها $E_{(L)} = \frac{1}{2}Li^2$ ، و عليه فالطاقة الكلية المخزنة في الدارة المثالية (L,C) يعبر عنها بالعلاقة :

$$E = E_{(C)} + E_{(L)}$$

$$E = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

و حيث أن : $u_C = \frac{q}{C}$ نكتب :

$$E = \frac{1}{2}C\frac{q^{2}}{C^2} + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{q^{2}}{C} + \frac{1}{2}Li^2}$$

▪ <u>إثبات أن طاقة الدارة المثالية (L,C) ثابتة في كل لحظة :</u>

لدينا مما سبق :

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

وجدنا سابقا :

▪ $q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

▪ $i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}L\omega_0^{\,2}Q_0^{\,2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا : $\omega_0^{\,2} = \frac{1}{LC}$ و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}L\frac{1}{LC}Q_0^{\,2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C}(\underbrace{\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}_{1})$$

لدينا :

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$$

و منه يصبح :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C} = E_{(C)0}}$$

إذن طاقة الجملة (L,C) في حالة اهتزازية غير متخامدة تكون ثابتة و مساوية لطاقة المكثفة الأعظمية .

- يمكن إثبات بنفس الطريقة و بأخذ $\omega_0^{\,2} = \frac{1}{LC} \rightarrow \frac{1}{C} = \omega_0^{\,2} L$ ، نجد أن طاقة الجملة الجملة (L,C) في حالة اهتزازية غير متخامدة تكون ثابتة و مساوية لطاقة الوشيعة الأعظمية ، حيث نجد في النهاية :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}L\omega_0^{\,2}Q_0^{\,2} = E_{(L)0}}$$

• طاقة الجملة (جسم + نابض):

- نتيجة حركة الجسم (S) ، فإن الجملة (جسم + نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة حركية E_C عبارتها :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m v^2}$$

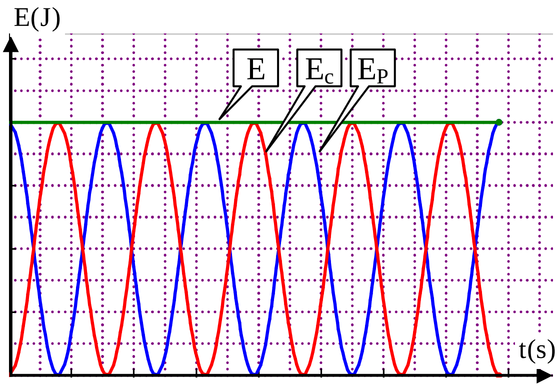
و نتيجة تشوه النابض ، الجملة (جسم + نابض) تمتلك في لحظة t من الحركة الاهتزازية ، طاقة كامنة مرونية E_{Pe} عبارتها :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} k x^2}$$

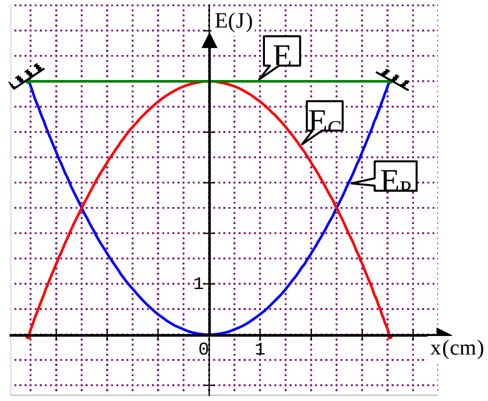
- تمتلك الجملة (جسم + نابض) في اللحظة t من الحركة الاهتزازية طاقة مساوية لمجموع طاقتها الحركية و الكامنة المرونية ، و نكتب :

$$\boxed{E = E_C + E_{Pe}}$$

- يمثل الشكل التالي تغيرات الطاقة الحركية E_C و الكامنة المرونية E_{Pe} بدلالة الزمن في الحركة الاهتزازية غير المتخامدة (حركة اهتزازية جيبية) . كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



- الشكل التالي يمثل تغيرات الطاقتين الحركية E_C و الكامنة المرونية E_{Pe} بدلالة المطال x أثناء الحركة الاهتزازية ، كما يبين ثبوت الطاقة الكلية أثناء هذه الحركة .



- إذا كانت حركة الجملة غير متخامدة ، نتيجة تغذيها أو عدم وجود سبب لتناقص الطاقة، تكون طاقة الجملة ثابتة أثناء الحركة الاهتزازية، وحيث أن هذه الطاقة التي اكتسبتها عند اللحظة $t = 0$ كانت نتيجة الإستطالة الأعظمية X_0 ، أين تكون الطاقة الكامنة أعظمية و الطاقة الحركية معدومة يمكن كتابة :

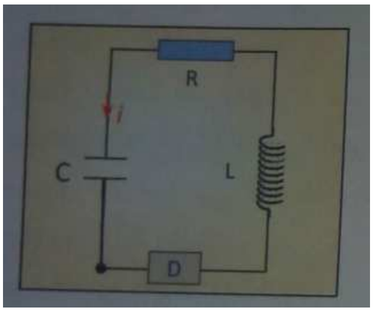
$$\boxed{E = E_{Pe0} = \frac{1}{2}kX_0^{\,2}}$$

- عند مرور الجسم بوضع التوازن يكون النابض في وضع الراحة ، تكون الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم + نابض) عندئذ معدومة ، كما تكون السرعة أعظمية و عليه فالطاقة الحركية عندئذ أعظمية أيضا ، نكتب إذن :

$$\boxed{E = E_{C0} = \frac{1}{2}mv_0^{\,2}}$$

• تغذية الإهتزازات الكهربائية :

التخامد في الدارة RLC ناتج عن المقاومة R التي تتسبب في ضياع الطاقة على شكل مفعول جول ، و لتعويض الطاقة نضيف إلى الدراة ثنائي قطب (D) يدعى دارة المقاومة السلبية يعمل على تعويض هذه الطاقة الضائعة في كل لحظة بحيث تصبح الاهتزازات دورية .



- المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R + u_C = u_D \rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = R_D i$$

لدينا :

- $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} \rightarrow i = C\frac{du_C}{dt}$
- $\frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt}$

و منه يصبح :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = R_D C\frac{du_C}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = R_D C\frac{du_C}{dt} - RC\frac{du_C}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = C(R_D - R)\frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{(R_D - R)}{L}\frac{du_C}{dt}$$

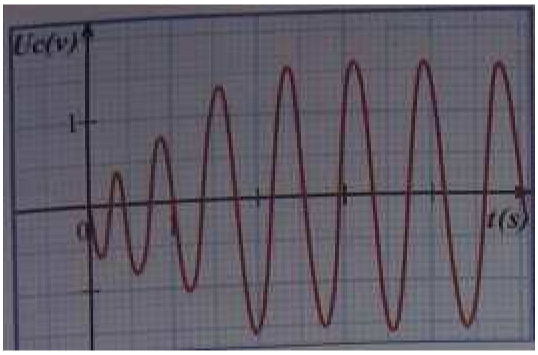
لكي تختفي الاهتزازات يجب أن تكون الطاقة الضائعة بفعل جول $(R.i^2)$ في الدارة تساوي الطاقة التي يعطيها المولد D في كل لحظة هي :

$$R_D i^2 = Ri^2 \quad \rightarrow \quad R = R_D$$

و منه تصبح المعادلة التفاضلية كما يلي :

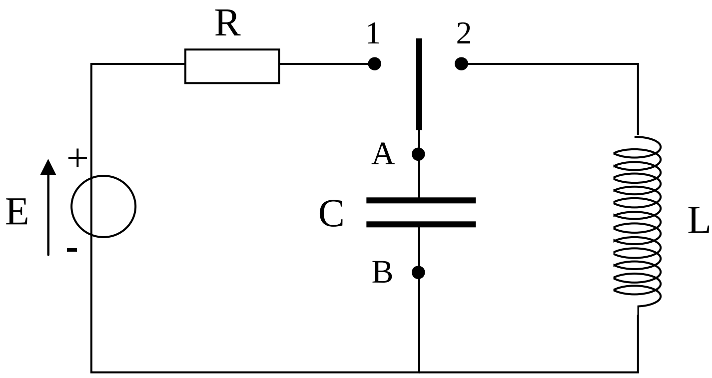
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها جيبي ، و نشاهد على شادة راسم اهتزازا مهبطي موصول بين طرفي مكثفة المنحنى التالي :



التمرين (8) : (التمرين : 017 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نحقق التركيب الكهربائي التجريبي المبين في الشكل المقابل باستعمال التجهيز : مكثفة سعتها (C) غير مشحونة ، ناقل أومي مقاومته $R = 10\ \Omega$ ، مولد ذي توتر ثابت $E = 12\ V$ ، وشيعة مقاومتها مهملة ذاتيتها L .



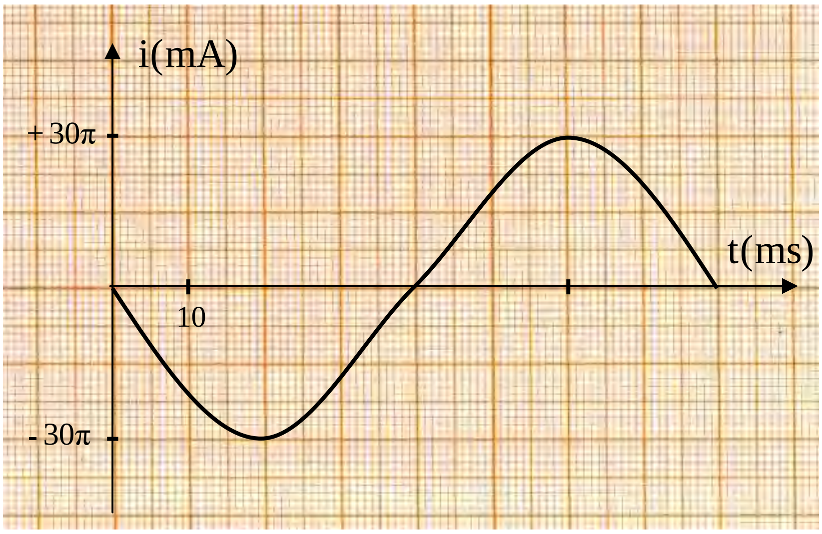
1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$.

أ- ما هي الظاهرة الملاحظة ، فسر هذه الظاهرة على المستوى المجهري .

ب- عند نهاية الشحن تكون طاقة المكثفة $E_{(C)} = 7.2 \cdot 10^{-3}\ J$ ، أحسب : سعة المكثفة C ، ثابت الزمن τ .

جـ- نريد تسريع عملية الشحن ، لهذا الغرض نصل ناقل أومي آخر مقاومته R' مع الناقل الأومي السابق ذو المقاومة R . بيين مع الشرح كيف يجب وصل الناقلين الأوميين R ، R' (على التسلسل أو على التفرع) لتحقيق هذا الغرض .

2- نضع البادلة في الوضع 2 عند اللحظة $t = 0$ ، المنحنى البياني التالي يمثل تغيرات شدة التيار الكهربائي بدلالة الزمن . نعتبر $\pi^2 = 10$.



أ- ما هي الظاهرة الملاحظة .

ب- اكتب المعادلة التفاضلية المعبرة عن شحنة المكثفة $q(t)$.

جـ- استنتج من البيان :

- الدور الذاتي T_0 .
- النبض الذاتي ω_0 .
- شحنة المكثفة الأعظمية (بطريقتين) .
- ذاتية الوشيعة L .

د- اكتب العبارة اللحظية لشحنة المكثفة $q(t)$ علما أن $q > 0$ عند اللحظة $t = 0$.

هـ- بين أن طاقة الجملة الكهربائية محفوظة .

و- في الحقيقة المقاومة الداخلية للوشيعة r ليست مهملة . ناقش حسب قيم r طبيعة النظام الكهربائي المهتز مبينا ذلك منحنى كيفي .

الأجوبة :

1- أ- الظاهرة الملاحظة :

هي شحن المكثفة و على المستوى المجهري تنتقل الإلكترونات من اللبوس A إلى اللبوس B و تتراكم في اللبوس B بسبب العازل ، فيشحن اللبوس B سلبا و يشحن اللبوس A إيجابا .

ب- سعة المكثفة C :

عند نهاية الشحن تكون طاقة المكثفة أعظمية ، أي : $E_{(C)0} = 7,2 \ . \ 10^{-3}\ J$ و لدينا :

$$E_{(C)0} = \frac{1}{2}CE^2 \rightarrow C = \frac{2E_{(C)0}}{E^2} \qquad \rightarrow C = \frac{2\,.\,7,2\,.\,10^{-3}}{(12)^2} = 10^{-4}\ F$$

- ثابت الزمن τ :

$$\tau = RC \rightarrow \tau = 10\ .\ 10^{-4} = 10^{-3}\ s$$

جـ- لتسريع شحن المكثفة نخفض من قيمة زمن اتمام الشحن (5τ) و بالتالي تخفيض قيمة $\tau = RC$ ، و لتحقيق ذلك نقلل من قيمة المقاومة R و هذا يتحقق عند ربط الناقلين الأوميين على التفرع أين يكون : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

2- أ- الظاهرة الملاحظة :
كون أنه لا توجد مقاومة في الدارة (لا يوجد ناقل أومي و لا مقاومة داخلية للوشيعة) ، فإن الظاهرة الملاحظة هي اهتزازات كهربائية غير متخامدة .
ب- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:
حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_C = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

جـ- قيمة T_0 :

$T_0 = 8\ .\ 10 = 80$ ms (من البيان)

- قيمة ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{80\ .10^{-3}} = 25\,\pi \text{ rad/s}$$

- قيمة Q_0 :
طريقة (1) :

$$Q_0 = EC \rightarrow Q_0 = 12\ .\ 10^{-4} = 1{,}2\ .\ 10^{-3}\ C$$

طريقة (2) :
من المنحنى $i(t)$: $I_0 = 30\pi$ mA و لدينا :

$$I_0 = \omega_0 Q_0 \ \rightarrow\ Q_0 = \frac{I_0}{\omega_0} \rightarrow Q_0 = \frac{30\,\pi\,.10^{-3}}{25\pi} = 1.2\ .10^{-3}\ C$$

- قيمة L :
من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \quad \rightarrow\ L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \rightarrow L = \frac{1}{(25\pi)^2\ .10^{-4}} = 1.6\ H$$

د- العبارة $q(t)$:

$$q = Q_0 \cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0\ \rightarrow\ q = +Q_0$$

بالتعويض :

$$Q_0 = Q_0 \cos(\omega_0(0) + \varphi)\ \rightarrow\ \cos(\varphi) = 1\ \rightarrow\ \varphi = 0$$

إذن :

$$q = 1.2\ .\ 10^{-3} \cos(25\pi\, t)$$

هـ- إثبات أن طاقة الجملة (مكثفة + وشيعة) ثابتة :
- تخزن الدارة المثالية (L,C) في اللحظة t طاقة في المكثفة عبارتها $E_{(C)} = \frac{1}{2}Cu_C{}^2$ ، و تخزن عند نفس اللحظة في الوشيعة طاقة عبارتها $E_{(L)} = \frac{1}{2}Li^2$ ، و عليه فالطاقة الكلية المخزنة عند اللحظة t في الدارة المثالية (L,C) يعبر عنها بالعلاقة :

$$E = E_{(C)} + E_{(L)} \quad \rightarrow E = \frac{1}{2}Cu_C{}^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

و حيث أن : $u_C = \frac{q}{C}$ نكتب :

$$E = \frac{1}{2}C\frac{q}{C^2}^2 + \frac{1}{2}Li^2 \rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{q}{C}^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

لدينا في الاهتزازات الكهربائية غير المتخامدة :

- $q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- $i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

بالتعويض في عبارة الطاقة :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_0{}^2}{C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}L\omega_0{}^2 Q_0{}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

وجدنا سابقا : $\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$ و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_0{}^2}{C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}L\frac{1}{LC}Q_0{}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

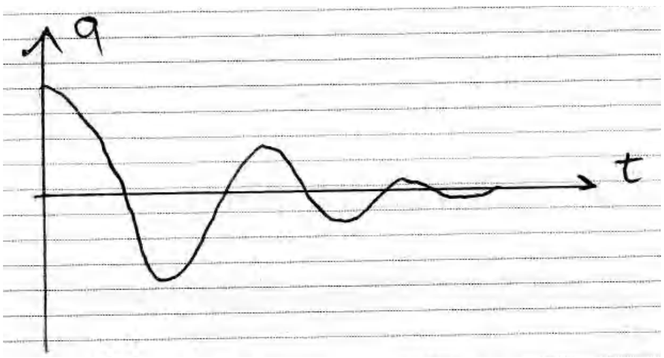
$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_0{}^2}{C}(\underbrace{\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}_{1}) \quad \rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{Q_0{}^2}{C} = E_{(C)0}$$

- يمكن إثبات بنفس الطريقة و بأخذ ($\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \frac{1}{C} = \omega_0{}^2 \cdot L$) ، نجد أن طاقة الجملة الجملة (L,C) في حالة اهتزازبة غير متخامدة تكون ثابتة و مساوية لطاقة الوشيعة الأعظمية ، حيث نجد في النهاية :

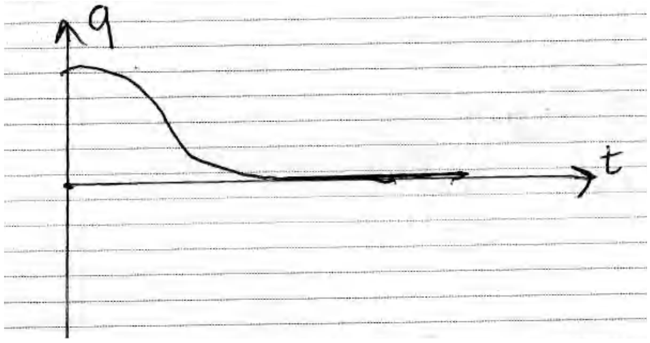
$$E = \frac{1}{2}L\omega_0{}^2 Q_0{}^2 = E_{(L)0}$$

و- طبيعة النظام :

إذا كانت المقاومة الداخلية للوشيعة r صغيرة يكون النظام شبه دوري متخامد :

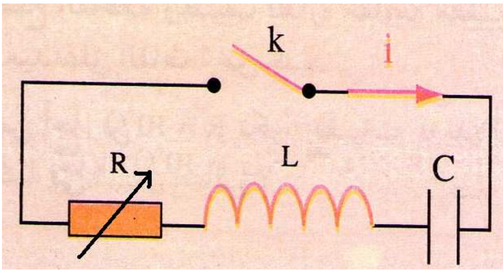


- إذا كانت المقاومة الداخلية للوشيعة r معتبرة يكون النظام لا دوري حرج .

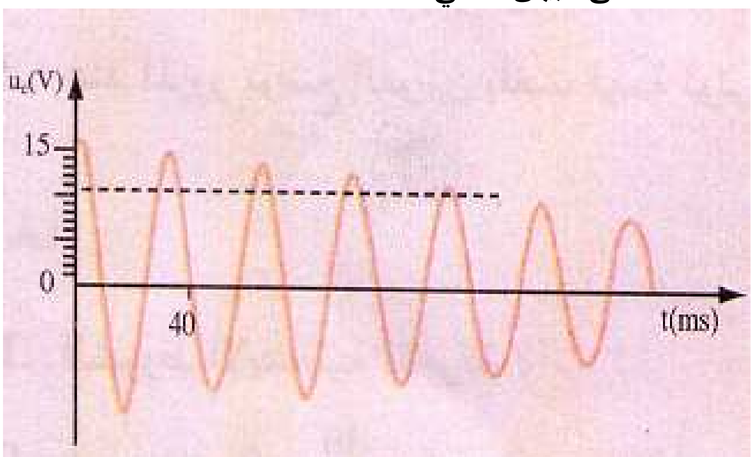


التمرين (9) : (التمرين : 009 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جزء من دارة كهربائية تتكون على التسلسل من : مكثفة سعتها $C = 10^{-4}$ F شحنت تحت توتر قدره 15V ، وشيعة ذاتيها L و مقاومتها الداخلية مهملة $(r = 0)$ معدلة (ناقل أومي ذو مقاومة متغيرة) .



نتابع تغيرات التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن فنحصل على البيان التالي :



1- ما هو نمط الإهتزازات ؟ علل .
2- عين قيمة شبه دور الاهتزازات T .
3- أحسب ذاتية الوشيعة L باعتبار الدور T يقترب من الدور الذاتي T_0 .
4- أحسب الطاقة الأعظمية للدراة .
5- أحسب الطاقة الضائعة عند نهاية الاهتزازة الرابعة
6- أحسب الشدة الأعظمية للتيار الكهربائي I_0 .
7- كيف يصبح نمط الاهتزازات إذا كانت قيمة R كبيرة جدا ، مثل في هذه الحالة و بشكل كيفي تطور التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .
يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- نمط الاهتزازات :
الجملة المهتزة (R,L,C) لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي أثناء الاهتزازات لذا فالاهتزازات حرة ، و بما أن الدارة تحتوي على ناقل أومي (مقاومة) ، هذه الأخيرة تعتبر سبب في تخامد هذه الاهتزازات كون أن طاقة الجملة تضيع على شكل حرارة بفعل جول في الناقل الأومي ، إذن نمط الاهتزازات في الدارة (R,L,C) حرة متخامدة .

2- قيمة شبه الدور T :
من البيان :

$$\frac{5T}{4} = 40\text{ ms} \quad \rightarrow \quad T = \frac{4\ .\ 40}{5} = 32\text{ ms}$$

3- ذاتية الوشيعة L :

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \rightarrow T^2 = 4\pi^2.L.C \rightarrow L = \frac{T_0^{\ 2}}{4\pi^2 C}$$

$$L = \frac{T_0^{\ 2}}{4\pi^2 C} \quad \frac{(32\ .10^{-3})^2}{4\ .\ \pi^2\ .10^{-4}} = 0.256\ H$$

4- الطاقة الأعظمية للدارة :

تكون طاقة الجملة (R,L,C) أعظمية عند اللحظة t = 0 ، أين تكون طاقة المكثفة أعظمية و طاقة الوشيعة عندئذ معدومة ، أي :

$$E_{max} = E_{C\ max} = \frac{1}{2} C.u_C{}^2{}_{max}$$

من البيان : $u_{C\ max} = 15V$ و منه :

$$E_{max} = \frac{1}{2}\ .\ 10^{-4}\ \rightarrow .(15)^3 = 1.125\ \ .\ 10^{-2}\ J$$

5- الطاقة الضائعة في نهاية الاهتزازة الرابعة :

في نهاية الاهتزازة الرابعة يكون التوتر u_C في قيمته الحدية عندها تكون طاقة الوشيعة معدومة ، و كون أن طاقة المكثفة $u_C = \frac{1}{2} C.u_C{}^2$ ، تكون طاقة الجملة (R,L,C) عند نهاية الاهتزازة الرابعة هي :

$$E = E_{(C)} = \frac{1}{2} C.u_C{}^2$$

من البيان ، عند نهاية الاهتزازة الرابعة يكون u = 11 V و منه طاقة الجملة (R,L,C) عند هذه اللحظة هي :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2}\ .\ 10^{-4}\ (11)^2 = 6.05\ .\ 10^{-3}\ J$$

الطاقة الضائعة هي النقصان في الطاقة بين اللحظة t = 0 و نهاية الاهتزازة الرابعة ، فإذا اعتبرنا الطاقة الضائعة هي E' نكتب :

$$E' = E_0 - E \rightarrow E' = 1.125\ .\ 10^{-2}\ - 6.05\ \ .\ 10^{-3}\ = 5.2\ \ .10^{-3}\ J$$

6- شدة التيار الأعظمية :

تكون شدة التيار الكهربائي في أعظم قيمة لها عندما تكون طاقة الوشيعة في أعظم قيمة لها ، و أعظم قيمة لطاقة الوشيعة $E_{(C)max}$ لا تتعدى طاقة الدارة (R,L,C) الأعظمية أي :

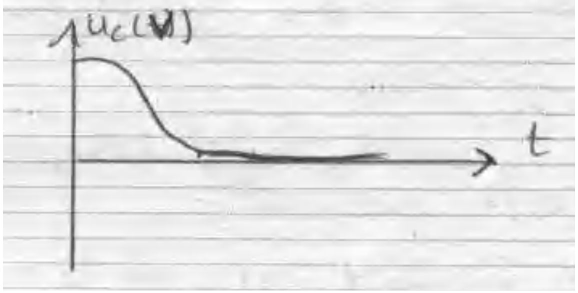
$$E_{(L)max} = E_{max} = 1.125\ \ .\ 10^{-2}\ J$$

و لدينا :

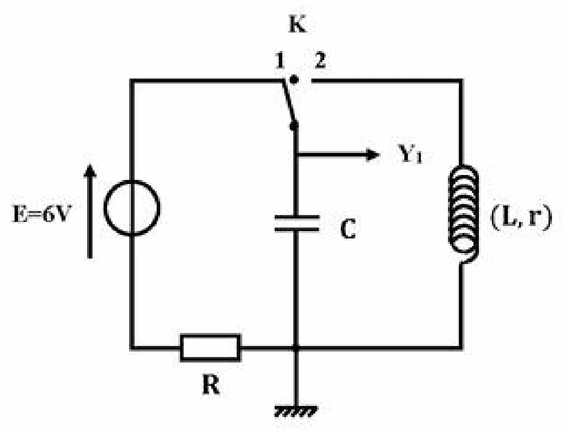
$$E_{(L)max} = \frac{1}{2} L.I_0{}^2 \rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{2E_{(L)max}}{L}} \rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{2\ 1.125\ .10^{-2}}{0.256}} \approx 0.30A$$

7- نمط الاهتزاز عندما تكون R كبيرة جدا :

بازدياد قيمة المقاومة R يزداد تخامد الاهتزازات الكهربائية و عندما تكون قيمة المقاومة كبيرة جدا ، يصبح نظام الدارة لا دوري (حرجًا) ، في هذه الحالة يصبح شكل تطور التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة كما يلي :



التمرين (13) : (التمرين : 030 في بنك التمارين على الموقع) (**)

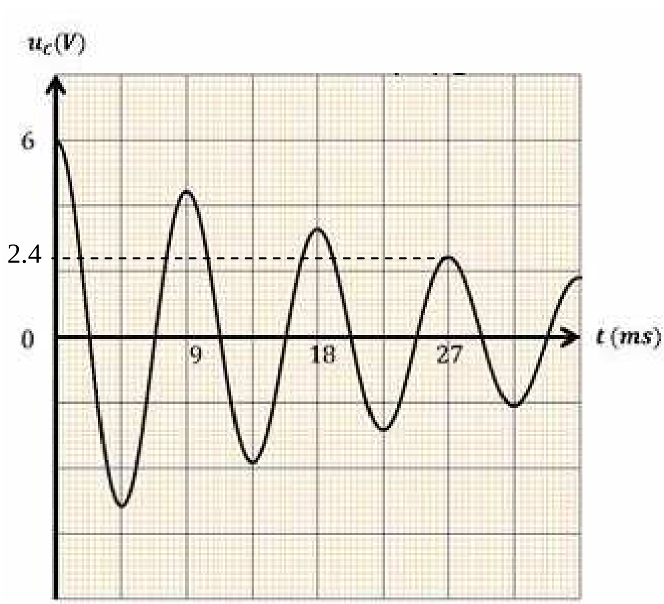


ننجز الدارة الممثلة في الشكل (04) و المكونة من :

- مكثفة شحمنها معدومة ، سعتها $C = 20\ \mu F$.
- وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r .
- ناقل أومي R .
- مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 6\ V$.
- بادلة K .

1- نضع البادلة K في الوضع (1) فتشحن المكثفة .
أ- أوجد المعادلة التفاضلية بدالة التوتر u_C بين طرفي المكثفة .
ب- حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل $u_C = A\ e^{-\alpha t} + B$ حيث A ، B ، α وثوابت يطلب كتابة عبارتهم بدلالة المقادير المميزة للدارة .
جـ- أحسب الطاقة الكهربائية E_0 التي تخزنها المكثفة عند نهاية الشحن .
2- نغير عند اللحظة $t = 0$ البادلة k في الوضع (2) ، يمثل الشكل (05) تغيرات التوتر بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن ، اعتمادا على المنحنى :
أ- فسر الظاهرة الملاحظة .
ب- حدد شبه الدور T .
جـ- أحسب الطاقة الضائعة بفعل جول بين اللحظتين $t = 0$ و $t = 3T$.
د- أثبت أن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C بين طرفي المكثفة هي من الشكل :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$



3- في حالة إهمال r يكون حل المعادلة التفاضلية كالتالي :

$$u_C(t) = U_0 \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)\ .$$

أ- ماهي الظاهرة الملاحظة في هذه الحالة .
ب- استنتج عبارة الدور الذاتي T_0 بدلالة ثوابت الدارة .
جـ- حدد بدقة كل من U_0 و φ .
د- أحسب قيمة L باعتبار $T = T_0$.

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$R\frac{dq}{dt} + u_C = E$$

$$RC\cdot\frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

3- عبارة A ، B ، α :

$$\bullet\ u_C = Ae^{-\alpha t} + B$$

$$\bullet\ \frac{du_C}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(Ae^{-\alpha t} + B\right) = \frac{E}{RC}$$

$$-\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{A}{RC}e^{-\alpha t} + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$Ae^{-\alpha t}\left(-\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\bullet\ -\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

$$\bullet\ \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC} \rightarrow B = E$$

من الشروط الابتدائية

$$t = 0 \rightarrow q = 0 \rightarrow u_C = \frac{q}{C} = 0$$

بالتعويض :

$$0 = Ae^{-\alpha(0)} + B \rightarrow A + B = 0 \rightarrow A = -B = -E$$

جـ- الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة عند نهاية الشحن :

عند نهاية الشحن تكون الطاقة أعظمية وعليه

$$E_{(C)0} = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}\cdot 20.10^{-6}(6)^2 = 3,6\cdot 10^{-4}\ J$$

ب- 2- الظاهرة الملاحظة :

كون أنه توجد مقاومة في الدارة $(R-L.C)$ والمتمثلة في المقاومة الداخلية للوشيعة ، فالظاهرة الملاحظة هي اهتزازات كهربائية حرة متخامدة .

ب- قيمة شبه الدور T

من البيان:

$$T = 9ms$$

جـ- الطاقة الضائعة بفعل جول بين اللحظتين $t=0$ ، $t=3T$:

- عند اللحظة $t=0$ الطاقة المخزنة في المكثفة أعظمية أي:

$$E_{(c)1} = E_{(c)0} = 3{,}6 \cdot 10^{-4} J$$

- عند اللحظة $t=3T$ ومن البيان $U_c = 2{,}4V$ ومنه تكون الطاقة المخزنة في المكثفة عند هذه اللحظة هي:

$$E_{(c)2} = \frac{1}{2} C U_c^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^{-6} (2{,}4)^2 = 5{,}76 \cdot 10^{-5} J$$

ومنه الطاقة الضائعة بفعل جول هو النقصان في الطاقة أي:

$$E_{(c)lib} = E_{(c)2} - E_{(c)1}$$

$$E_{(c)lib} = 3{,}6 \cdot 10^{-4} - 5{,}76 \cdot 10^{-5} = 3{,}024 \cdot 10^{-4} J$$

د- المعادلة التفاضلية بدلالة $U_c(t)$:

حسب قانون جمع التوترات:

$$U_b + U_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + U_c = 0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dq}{dt} + U_c = 0$$

$$L\frac{d^2(CU_c)}{dt^2} + r\frac{d(C \cdot U_c)}{dt} + U_c = 0$$

$$LC\frac{d^2(U_c)}{dt} + rC\frac{dU_c}{dt} + U_c = 0$$

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{r\cancel{C}}{L\cancel{C}}\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{LC}U_c = 0$$

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{LC}U_c = 0$$

9- P- الظاهرة الملاحظة:

عند اهمال r يصبح تطور التوتر U_c بين طرفي المكثفة جيبي ، وبالتالي الظاهرة الملاحظة في هذه الحالة اهتزازات حرة كهربائية غير متخامدة .

ب- عبارة الدور الذاتي T_0

عند إهمال r تصبح المعادلة التفاضلية كما يلي:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

من هذه المعادلة التفاضلية:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

و لدينا:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

جـ- قيمة U_0:

من البيان:

$$U_0 = 6\ V$$

- قيمة φ:

من البيان:

$$t=0 \longrightarrow u_C = u_{C0} = 9V$$

بالتعويض:

$$6 = 6\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}(0) + \varphi\right)$$

$$\cos(\varphi) = 1 \longrightarrow \varphi = 0$$

قيمة L:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 LC \rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

$$L = \frac{(9 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 0{,}1\ H$$

III – الإهتزازات القسرية

خاص بالشعب الرياضية فقط

مفهوم الاهتزازات القسرية و التحاوب

- نقول عن جملة ما في شروط معينة أنها تتعرض لاهتزازات قسرية عندما يفرض عامل خارجي دور معين لاهتزازات هذه الجملة ، و نقول أن الجملة المهتزة دخلت في حالة التجاوب عندما تأخذ سعة اهتزازاتها قيمة عظمى .
- تتعرض الجملة المهتزة (ميكانيكية أو كهربائية) إلى تخامد في اهتزازاتها عندما تفقد جزء من طاقتها على شكل تحويل حراري .
- في الجمل الكهربائية يكون الضياع بفعل جول في النواقل الأومية .

الاهتزازات القسرية الكهربائية

التوتر المنتج (الفعال) :

- التوتر المنتج U_{eff} (أو شدة التيار المنتجة I_{eff}) التي يرمز لها بــ للتيار المتناوب الجيبي هو التوتر المستمر (أو شدة التيار المستمر) الذي ينتج نفس الكمية من الحرارة التي ينتجها التوتر (أو التيار) المتناوب الجيبي بين طرفي ناقل أومي في نفس المدة الزمنية .
- يقاس التوتر المنتج و شدة التيار المنتجة بمقياس الفولط و الأمبير العاديين المضبوطين في وضع المتناوب ، بمعنى القيمة التي يشير إليها مقياسي الفولط و الأمبير المضبوطين في وضع المتناوب في دارة مغلقة يسري فيها تيار كهربائي متناوب جيبي هي القيمتين المنتجة للتوتر و التيار .
- التوتر المنتج U_{eff} متعلق بالتوتر الأعظمي U_0 وفق العلاقة :

$$\boxed{U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}}$$

- شدة التيار المنتجة I_{eff} متعلقة بشدة التيار الأعظمية I_0 وفق العلاقة :

$$\boxed{I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$$

• ممانعة ثنائي القطب (R,L,C) على التسلسل :

يبقى قانون أوم بين طرفي ناقل أومي يسري فيه تيار مستمر ساري المفعول في كل لحظة بين طرفي ثنائي قطب يسري فيه تيار متناوب جيبي ، و يعبر عنه في هذه الأخيرة وفق العلاقة :

$$\boxed{U = Z\,I}$$

حيث Z هي ممانعة ثنائي القطب الذي يسري فيه التيار المتناوب الجيبي وحدته الأوم (Ω)

- من هذه العلاقة يمكن كتابة :

$$U_0 = Z\, I_0$$
$$U_{eff} = Z\, I_{eff}$$

• استطاعة التحويل الحراري بفعل جول :

-- استطاعة التحويل الحرراي بفعل جول في دارة كهربائية يسري فيها تيار كهربائي متناوب جيبي ، هي الطاقة المحولة بفعل جول في الثانية الواحدة ، يرمز لها بـ P و وحدتها الواط (W) و يعبر عنها بالعلاقة :

$$P = R.I_{eff}^2$$

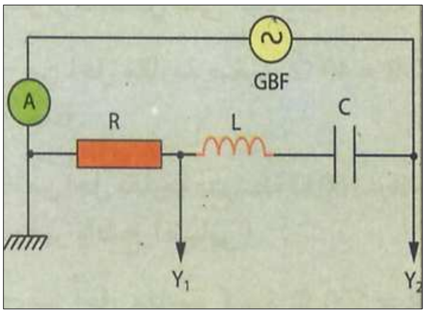
حيث : ▪ R مقاومة الناقل الأومي المكافئ في الدارة .

▪ I_{eff} : شدة التيار المنتجة في الدارة .

- الطاقة المحول فعل جول في دارة كهربائية يسري فيها تيار كهربائي متناوب جيبي يعبر خلال مدة زمنية Δt يعبر عنها بالعلاقة التالية :

$$E = P\,\Delta t = R.I_{eff}^2.\Delta t$$

• الدراسة الكيفية :

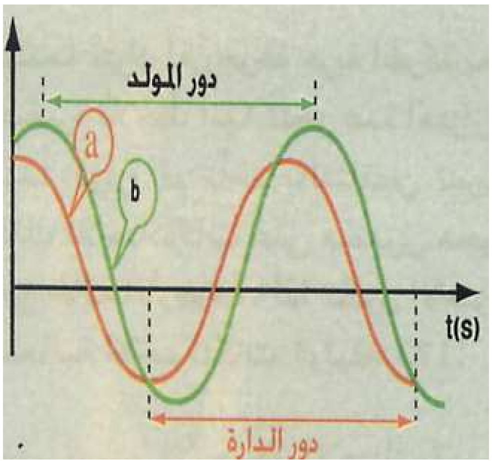


نحقق الدارة الكهربائية التالية :

- نغذي الدارة بتوتر متناوب جيبي تواته قابل للتغيير عبارته الزمنية : $u = U_0\cos(\omega_0 t)$.

- بواسطة راسم الاهتزاز المهبطي نتابع تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي في المدخل Y_1 و التوتر u_G بين طرفي المولد في المدخل Y_2 .

- من أجل قيمة للتواتر نشاهد على شاشة راسم الاهتزاز البيانين التاليين ، حيث يمثل المنحنى (a) تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي المماثل للمنحنى i(t) الذي يمثل تغيرات شدة التيار المار بالدارة .

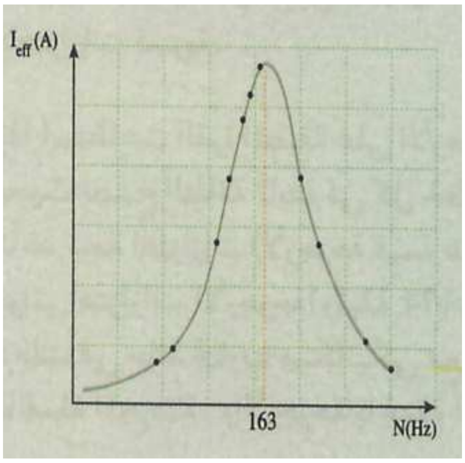


- من المنحنى $u_R(t)$ المماثل للمنحنى i(t) ، يتبين أن تغيرات شدة التيار i المار بالدارة هي على شكل دالة جيبية دورها مساوي لدور التوتر u_G بين طرفي المولد (GBF).

- عندما نحسب الدور الذاتي للدارة المهتزة (R,L,C) الذي يعطى بالعلاقة : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ، ثم نحسب من المنحنى $u_R(t)$ المماثل للمنحنى $i(t)$ دور شدة التيار المار في الدارة و الذي يجريه المولد (GBF) ، نلاحظ أن الدورين غير متساويين ، و كون أن دور شدة التيار الذي يجري في الدارة مساوي لدور التوتر $u_G(t)$ الذي يطبقة المولد (GBF) على الدارة ، يمكن القول أن المولد أجبر الدراة (R,L,C) على الاهتزاز بدور مساوي لدوره ، و بالتالي نقول أننا تحصلنا على اهتزازات كهربائية قسرية .
- نسمي المولد (GBF) بالجملة المحرضة (المحرض) و الدارة (R,L,C) بالجملة المجاوبة (المجاوب) .

● الدراسة الكمية :

نأخذ $L = 0.95$ H ، $C = 1$ µF .
نجعل التوتر بين طرفي المولد (GBF) ثابتا و نغير من قيمة تواتره ، و نسجل الشدة المنتجة للتيار الكهربائي في الدارة (R,L,C) .
- نمثل تغيرات شدة التيار الفعالة I_{eff} بدلالة التواتر f للجملة المحرضة (المولد GBF) ، نتحصل على المنحنى التالي :



- حالة التجاوب الكهربائي :

- نحسب التواتر الذاتي للدراة (R,L,C) فنجد :

$$f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 163\,\text{Hz}$$

- من البيان نلاحظ أن الشدة المنتجة للتيار الكهربائي تبلغ قيمة عظمى من أجل تواتر المولد $f_0 = 163$ Hz ، أي أن شدة التيار المنتجة في الدراة (R,L,C) تكون أعظمية عندما يكون تواتر (GBF) مساوي للتواتر f_0 الخاص المجاوب (R,L,C) ، نقول عندها أن الدارة في حالة تجاوب كهربائي ، إذن عند التجاوب يكون :

$$\boxed{f_0 = f}$$

و من ثم يكون :

$$\boxed{\begin{array}{c}\omega_0 = \omega \\ T_0 = T\end{array}}$$

نذكر أن الدور الذاتي T_0 و النبض الذاتي ω_0 و التواتر الذاتي f_0 للدارة RLC يعبر عنهما بالعلاقة :

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\\ T_0 &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}\\ f_0 &= \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\end{aligned}}$$

- عندما نقيس ممانعة الدارة عند التجاوب تلاحظ أن قيمتها تصبح مساوية لقيمة مقاومة الدراة ، أي عند التجاوب يكون :

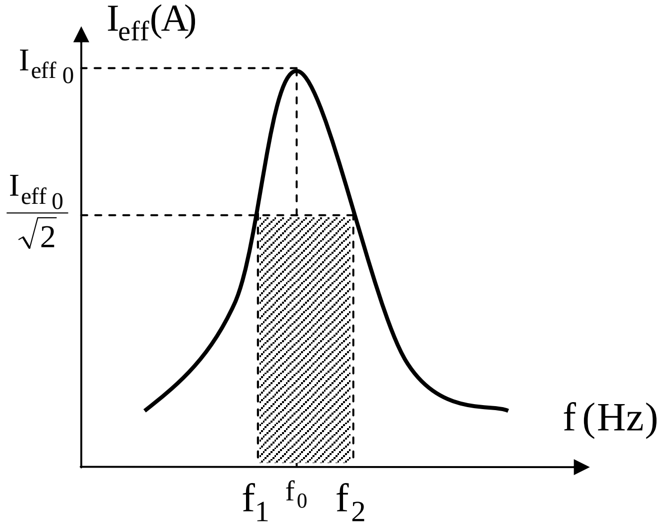
$$\boxed{Z = R + r}$$

- <u>الشريط النافذ :</u>

- الشريط النافذ لتواترات المتجاوب هو مجال التواترات الموافق لـ :

$$\boxed{I_{eff} \geq \frac{I_{eff\,0}}{\sqrt{2}}}$$

- من أجل $I_{eff} = \frac{I_{eff\,0}}{\sqrt{2}}$ يكون للتواتر f قيمتان الأولى f_1 و الثانية f_2 حيث $f_1 < f_2$ (الشكل) ، نسمي f_1 ، f_2 حدي الشريط النافذ .



- يمكن إثبات أن $I_{eff} = \frac{I_{eff\,0}}{\sqrt{2}}$ ، عندما تكون الاستطاعة المحولة بفعل جول في الدارة مساوية لنصف الإستطاعة الأعظمية المحولة فعل جول في الدارة ، أي :

$$\boxed{P = \frac{P_0}{2} \rightarrow I_{eff} = \frac{I_{eff0}}{2}}$$

- عرض الشريط النافذ :

عرض الشريط النافذ الذي نرمز له بالرمز Δf هو الفرق بين قيمتي التواتر f_1 ، f_2 الموافقتين للقيمة $I_{eff} = \frac{I_{eff\,0}}{\sqrt{2}}$ ، فهو إذن يعبر عنه بالعلاقة :

$$\boxed{\Delta f = f_2 - f_1}$$

- في المجال Δf (عرض الشريط النافذ) ، نقول عن الجملة المتجاوبة أنها أكثر استجابة .

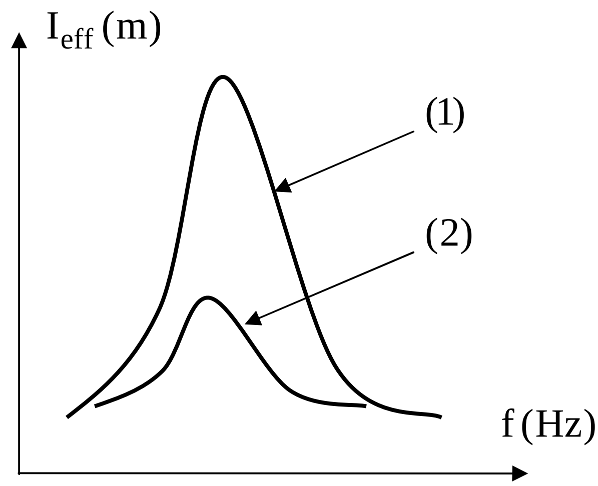
▪ معامل الجودة :

معامل الجودة هو مقدار يستعمل للتعبير عن حالة التجاوب بين المحرض (GBF) و المتجاوب (الدارة R,L,C) ، يرمز لها بـ Q و هو بدون وحدة ، يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f}}$$

- نقول عن الجملة المهتزة المتجاوبة أنها أكثر استجابة (أو أن استجابتها مقبولة) كلما كان معامل الجودة Q أكبر ، في هذه الحالة يكون المنحنى x (f) أكثر حدة .

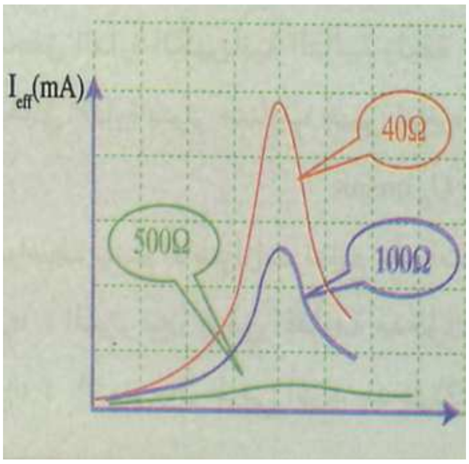
مثال :



المنحنى (1) أكثر حدة من المنحنى (1) و بالتالي عنده يكون معامل الجودة أكبر و الجملة المهتزة المتجاوبة أكثر استجابة .

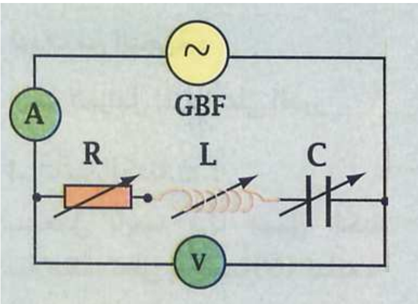
● تأثير التخامد :

نكرر التجربة السابقة بتغير قيمة المقاومة R ، و من أجل كل قيمة للمقاومة ، نمثل تغيرات الشدة المنتجة للتيار i(t) بدلالة التواتر f فنحصل على المنحنيات التالية :



- من أجل مقاومة صغيرة $R = 40\ \Omega$ ، يكون التخامد ضعيف و التجاوب حاد .
- من أجل مقاومة متوسطة $R = 100\ \Omega$ يكون التخامد متوسطا و التجاوب غير واضح (ضبابي) .
- من أجل مقاومة كبيرة $R = 500\ \Omega$ ، يكون التخامد كبيرا و المنحنى منبسطا و لا يوجد تجاوب .

▪ تأثير العوامل R ، L ، C على ممانعة ثنائي القطب (R,L,C) :



نحقق الدارة (R,L,C) على التسلسل المبينة في الشكل التالي :

- نثبت التواتر f و السعة C و الذاتية L و نأخذ قيم مختلفة للمقاومة R ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت المقاومة R ازدادت قيمة الممانعة Z .
- نثبت التواتر f و السعة C و المقاومة R و نأخذ قيم مختلفة للذاتية L ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت الذاتية L نقصت قيمة الممانعة Z .
- نثبت التواتر f و الذاتية L و المقاومة R و نأخذ قيم مختلفة للسعة C ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت السعة C نقصت قيمة الممانعة Z .
- نثبت التواتر السعة C و الذاتية L و المقاومة R و نأخذ قيم مختلفة للتواتر f للتيار المستعمل ثم نقرأ قيم التوتر المنتج U_{eff} بين طرفي الدارة و الشدة المنتجة I_{eff} المار بها ثم نحسب ممانعة الدارة من أجل كل قيمة ، نجد أنه كلما ازدادت قيمة التواتر f نقصت قيمة الممانعة Z .

ملاحظة :

عندما تكون الممانعة صغرى تكون الشدة المنتجة عظمى .

التمرين (1) : (التمرين : 020 في بنك التمارين على الموقع) (**)

جزء من دارة كهربائية تضم على التسلسل ناقل أومي مقاومته $R = 10\ \Omega$ وشيعة ذاتيتها $L = 1\ H$ و مقاومتها r مهملة و مكثفة سعتها C متغيرة ، تغذى الدارة بتوتر متناوب جيبي عبارته : $u = 50\sqrt{2}\sin(100\,t + \varphi)$ حيث : u(V) ، t(s) .

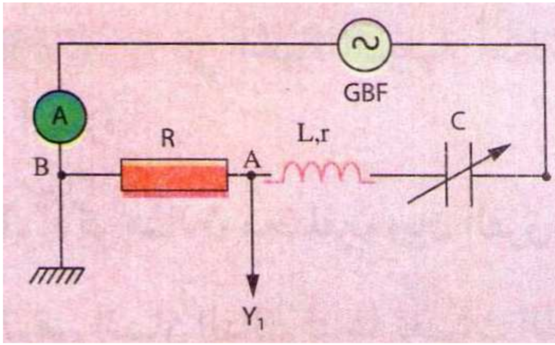
نصل طرفي المقاومة إلى راسم اهتزازات فيظهر على شاشته البيان u(R) .

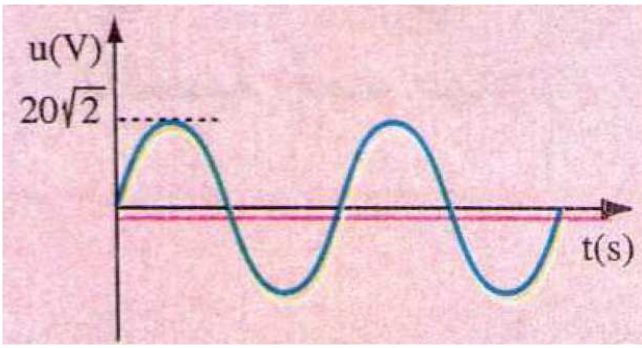
1- ماذا يقيس مقياس الأمبير و مقياس الفولط في الدارة ؟

2- جد قيمة شدة التيار الأعظمية I_0 ثم قيمة شدة التيار المنتجة I_{eff} .

3- أحسب ممانعة الدارة Z .

4- إذا علمت أن استطاعة التحويل الحراري الضائعة بالدارة $P = 60\ W$ ، عين r المقاومة الداخلية للوشيعة .





5- نغير سعة المكثفة حتى يشير مقياس الأمبير إلى قيمة عظمى يبدأ بعدها بالتناقص .

أ- ما هي الحالة الكهربائية للدارة عندما تكون الشدة المنتجة للتيار الكهربائي عظمى ؟ و ما هي قيمة ممانعة الدارة Z_0 عندئذ .

ب- أحسب سعة المكثفة في هذه الحالة .

يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- في حالة دارة مغذاة بتيار متناوب جيبي يقيس كل من مقياس الأمبير و مقياس الفولط الشدة المنتجة للتيار الكهربائي I_{eff} و الشدة المنتجة للتوتر الكهربائي U_{eff} على الترتيب .

2- قيمة I_0 :

من البيان : $u_0 = 20\sqrt{2}\ A$ و لدينا :

$$U_{R0} = RI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R0}}{R} \rightarrow I_0 = \frac{20\sqrt{2}}{10} = 2\sqrt{2}\ A$$

قيمة I_{eff} :

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\ A$$

3- ممانعة الدراة :

$$Z = \frac{U_0}{I_0}$$

من عبارة التوتر الكهربائي المغذي للدارة : $U_0 = 50\sqrt{2}\ V$ و منه :

$$Z = \frac{50\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 25\,\Omega$$

4- قيمة r :

$$P = (R + r)\, I_{eff}^2$$

$$R + r = \frac{P}{I_{eff}^2} \rightarrow r = \frac{P}{I_{eff}^2} - R$$

$$r = \frac{60}{(2)^2 . 2} - 10 = 5\,\Omega$$

5- أ- عندما تكون الشدة المنتجة للتيار الكهربائي في الدارة أعظمية تكون الدارة في حالة تجاوب كهربائي .

- قيمة Z_0 :

عندما تكون الدارة في حالة تجاوب تكون ممانعة الدارة في أصغر قيمة لها و تساوي المقاومة المكافئة أي :

$$Z_0 = R + r = 10 + 5 = 15\ \Omega$$

ب- سعة المكثفة عند التجاوب :

عند التجاوب يساوي النبض الذاتي للمولد النبض الذاتي للدارة المهتزة RLC أي :

$$\omega_{0\,(\text{دارة})} = \omega_{0\,(\text{مولد})}$$

و لدينا :

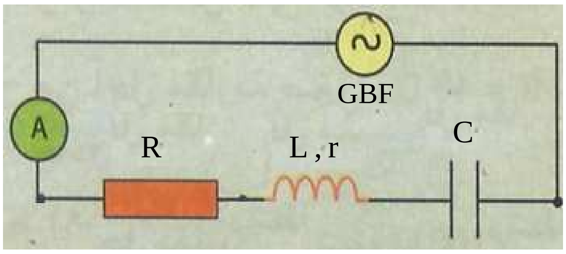
- $\omega_{0\,(\text{مولد})} = 100\ rad/s$ (من عبارة التوتر الكهربائي المغذي للدارة)
- $\omega_{0\,(\text{دارة})} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

و منه :

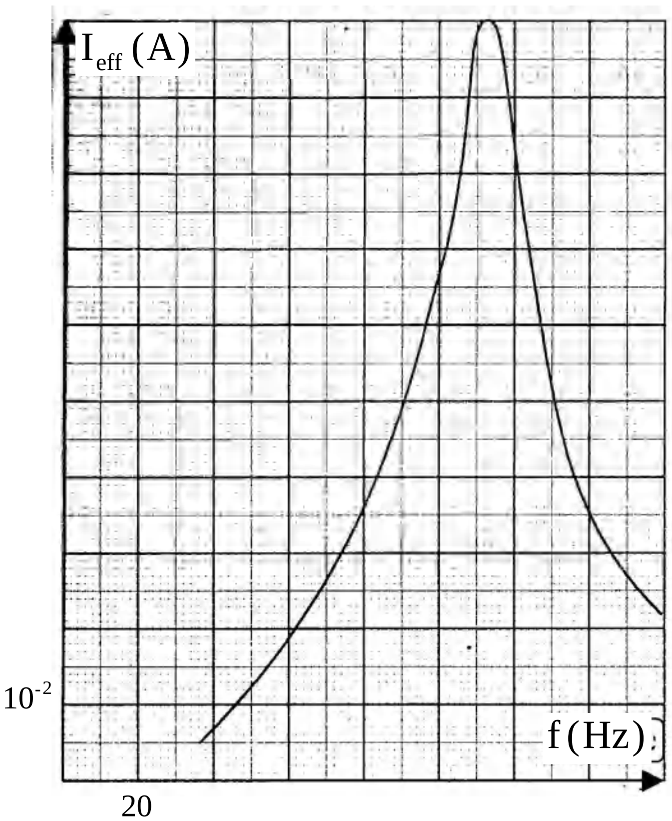
$$\frac{1}{LC} = (100)^2 \rightarrow C = \frac{1}{(100)^2 . L} \rightarrow C = \frac{1}{(100)^2 . 1} = 10^{-4}\ F$$

التمرين (2) : (التمرين : 021 في بنك التمارين على الموقع) (**)

تضم دارة كهربائية على التسلسل ناقل أومي مقاومته $R = 50\ \Omega$ ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، مكثفة سعتها $C = 5\ \mu F$ ، نغذي الدارة بتوتر جيبي توتره المنتج $u_{eff} = 6V$.



من أجل قيم مختلفة للتواتر N نسجل قيم الشدة المنتجة I_{eff} للتيار المار في الدارة ، نرسم المنحنى البياني : $I_{eff} = f(N)$.



1- استنتج من البيان ما يلي :

أ- التواتر N_0 عند التجاوب .

ب- شدة التيار المنتجة عند التجاوب .

2- أحسب قيمتي المقاومة الداخلية للوشيعة r و ذاتيتها L .

3- عرف الشريط النافذ للدارة .

4- استنتج من المنحنى عرض الشريط النافذ ΔN ثم أحسب عامل الجودة Q .

5- احسب الاستطاعة الكهربائية المستهلكة عند التجاوب .

يعطى : $\pi^2 = 10$

الأجوبة :

1- أ- قيمة N_0 عند التجاوب :

عند التجاوب يبلغ المنحنى $I_{eff} = f(N)$ قيمة حدية و بالإسقاط :

$N_0 = 5,6 \;.\; 20 = 112 \text{ Hz}$

ب- شدة التيار المنتجة عند التجاوب :

$I_{eff0} = 10 \;.\; 10^{-2} = 0,1 \text{ A}$

2- قيمة r :

$U_{eff} = Z_0.I_{eff0}$

عند التجاوب تساوي ممانعة الدارة المقاومة المكافئة للدارة أي :

$Z_0 = R + r$

و عليه :

$$U_{eff} = (R + r)\, I_{eff0} \rightarrow R + r = \frac{U_{eff}}{I_{eff0}} \rightarrow r = \frac{U_{eff}}{I_{eff0}} - R \rightarrow r = \frac{6}{0,1} - 50 = 10\,\Omega$$

قيمة L :

عند التجاوب يكون :

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \rightarrow \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2.C}$$

و حيث أن :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \rightarrow \omega_0 = 4\pi^2 f_0^2$$

يصبح :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 .C} \rightarrow L = \frac{1}{4.10.(112)^2 .5.10^{-6}} = 0,4 \text{ H}$$

3- تعريف عرض الشريط النافذ :

عرض الشريط النافذ هو مجموعة التواترات التي من أجلها تكون : $I_{eff} \leq \frac{I_{eff0}}{\sqrt{2}}$.

4- عرض الشريط النافذ :

$$\frac{I_{eff0}}{\sqrt{2}} = \frac{0,1}{\sqrt{2}} = 7,07.10^{-2} \text{ A}$$

بالإسقاط :

- $f_1 = 5,1 \cdot 20 = 102\ Hz$
- $f_2 = 6,2 \cdot 20 = 124\ Hz$

إذن :

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 124 - 102 = 22\ Hz$$

- عامل الجودة :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{112}{22} = 5,1$$

5- الاستطاعة الكهربائية المستهلكة عند التجاوب :

عند التجاوب الاستطاعة المستهلكة تكون فقط فعل جول على شكل حرارة :

$$P_0 = (R + r)\, I_{eff}^2 = (50 + 10)\,.\,(0,1)^2 = 0,6\ W$$

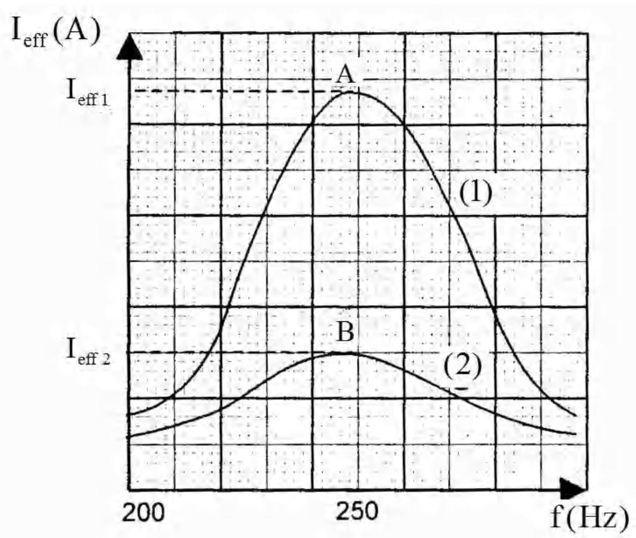
أو :

$$P_0 = U_{eff}\,.\,I_{eff0} = 6\,.\,0,1 = 0,6\ W$$

التمرين (3) : (التمرين : 022 في بنك التمارين على الموقع) (**)

تتألف دارة كهربائية من ناقل أومي مقاومته متغيرة R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية $r = 8\ \Omega$ ، مكثفة سعتها C ، مقياس أمبير مهمل المقاومة ، موصولة على التسلسل بين طرفي مولد للتوترات المنخفضة GBF التوتر المنتج بين طرفيه $U_{eff} = 51\ V$ و تواتره f متغير .

- من اجل $R = 22\ \Omega$ ، نرسم المنحنى البياني (1) الممثل لتغيرات الشدة المنتجة I_{eff} بدلالة التواتر f .
- نكرر نفس التجربة من أجل $R = 77\ \Omega$ ، فنحصل على المنحنى (2) .



1- ما هي الظاهرة الفيزيائية التي يمثلها المنحنيان (1) ، (2) ؟

2- أوجد قيمتي الشدتين I_{eff1} ، I_{eff2} المشار إليهما في الشكل .

3- اعتمادا على هاتين النتيجتين لـ I_{eff1} ، I_{eff2} و المنحنيين (1) ، (2) حدد سلم الرسم المعتمد .

4- اعتمادا على المنحنيين (1) ، (2) أي الدارتين أكثر نقاءا ؟ برر إجابتك ..

الأجوبة :

1- الظاهرة الفيزيائية التي يمثلها المنحنيان (1) ، (2) هي ظاهرة التجاوب الكهربائي .

2- قيمتي I_{eff0-1} ، I_{eff0-2} :

$$I_{eff0} = \frac{U_0}{Z_0}$$

عند التجاوب تساوي ممانعة الدارة المقاومة المكافئة للدارة ، أي : $Z_0 = R + r$ و منه :

$$I_{eff0} = \frac{U_0}{R + r}$$

- بالنسبة للمنحنى (1) :

$$I_{eff0\text{-}1} = \frac{51}{22+8} = 1{,}7\ A$$

- بالنسبة للمنحنى (2) :

$$I_{eff0\text{-}2} = \frac{51}{77+8} = 0{,}6\ A$$

3- سلم الرسم :

$I_{eff0\text{-}2} = 0{,}6\ A$ توافقها في المنحنى (2) 1,5cm و عليه :

$$\begin{cases} 1{,}5\ cm \rightarrow 0{,}6\ A \\ 1\ cm \rightarrow X \end{cases}$$

$$X = \frac{0{,}6}{1{,}5} = 0{,}4$$

إذن سلم الرسم هو :

$$1\ cm \rightarrow 0{,}4\ A$$

4- الدارة الأكثر نقاءا :

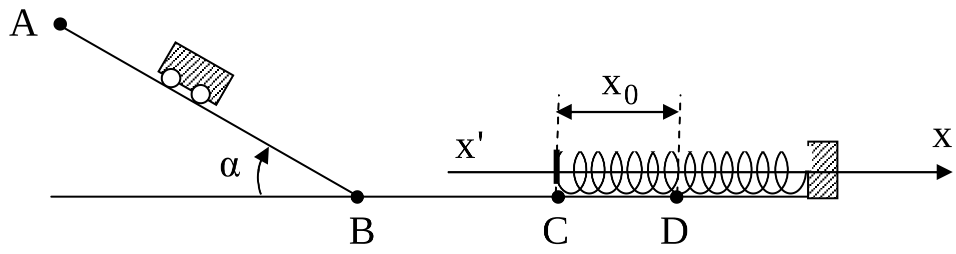
الدارة الأكثر نقاءا هو الدارة التي تتميز بعامل جودة أكبر و يكون المنحنى $I_{eff} = (f)$ أكثر حدة ، نلاحظ المنحنى (1) أكثر حدة و بالتالي الدارة الموافقة لهذه المنحنى هي الدارة الأكثر نقاء و ذات عامل جودة أكبر .

IV – تمارين متنوعة

التمرين (11) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (**)

ملاحظة : نهمل تأثير الهواء و كل الاحتكاكات ، يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

من موضع A أعلى مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية α ، نترك بدون سرعة ابتدائية عربة صغيرة (S) كتلتها m = 1 Kg ، لتتحرك باتجاه الموضع B أسفل هذا المستوي ، بعدها تواصل حركتها على مستوي أفقي أملس BCD .

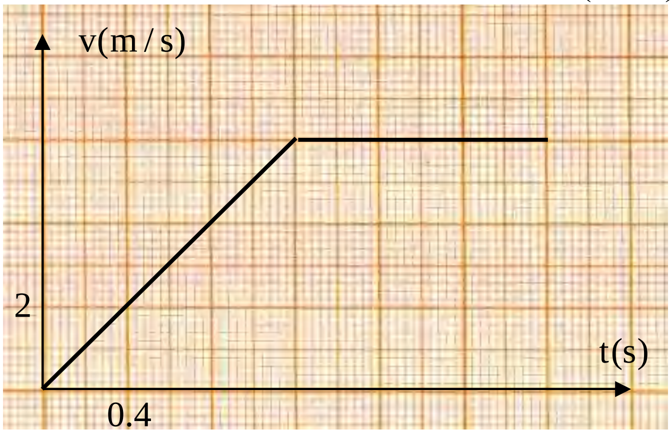


1- التمثيل البياني التالي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة العربة (S) أثناء الانتقال من A إلى B ثم C .

- استنتج من البيان في كل طور : طبيعة الحركة ، المسافة المقطوعة ، تسارع الحركة .

2- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (عربة S) بين الموضعين A و B ، أوجد الزاوية α .

3- عند بلوغ العربة الموضع C بسرعة $v_0 = v_C$ تلتحم عند اللحظة $t = 0$ بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $K = 10\ N/m$ فتضغطه بمقدار X_0 عندما تبلغ الموضع D ، عندها تنعدم سرعتها و تغير جهة حركتها باتجاه الموضع C (الشكل) .



أ- مثل القوى الخارجية المؤثرة على مركز عطالة العربة (S) بين الموضعين C و D .
ب- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$ ، محدد طبيعة حركة العربة (S) .
جـ- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (عربة S + نابض) أوجد قيمة X_0 .
د- باعتبار الموضع C مبدأ للفواصل و علما أن السرعة عند هذا الموضع تكون موجبة ، أحسب :
- النبض الذاتي ω_0 .
- الدور الذاتي T_0 ، ثابت مرونة النابض K .

هـ- أكتب المعادلة الزمنية لحركة العربة (S) ، ثم أرسم المنحنى $x(t)$ بشكل كيفي .

الأجوبة :

1- طبيعة الحركة في كل طور :

• الطور الأول :

المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ و حيث أن $(v > 0\ ,\ a > 0)$ ، نستنتج أن الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام .

- المسافة المقطوعة :

$$d = \frac{(3\ .\ 2)\ (3\ .\ 0.4)}{2} = 3.6\ m$$

- تسارع الحركة :

$$a = \frac{(3\ .\ 2)}{3\ .\ 0.4} = 5\ m/s$$

• الطور الثاني : $(1.2\ s \rightarrow 2.4\ s)$:

المنحى $v(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، و منه الحركة مستقيمة منتظمة .

- المسافة المقطوعة :

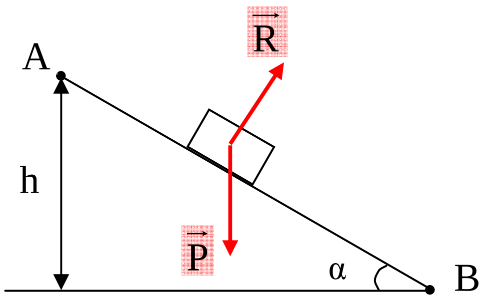
$$d = (3\ .\ 2)\ (3\ .\ 0.4) = 7.2\ m$$

- التسارع :

$$v = 0 \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0$$

2- الزاوية α :

- الجملة المدروسة : عربة (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، حيث : $W_{AB}(\vec{R}) = 0$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و B :



$$E_A + E_{مكتسبة} - E_{مقدمة} = E_B$$

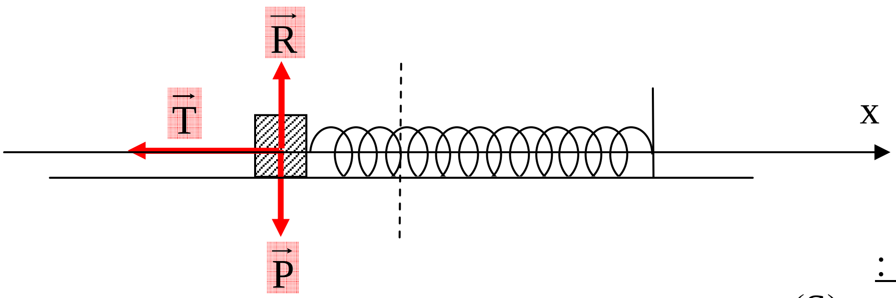
$$E_{CA} + W_{AB}(\vec{P}) = E_{CB}$$

$$0 + m.g.AB.\sin\alpha = \frac{1}{2}m.v_B^{\ 2}$$

$$g.AB.\sin\alpha = \frac{1}{2}v_B^{\ 2} \rightarrow 2g.AB.\sin\alpha = v_B^{\ 2} \rightarrow \sin\alpha = \frac{v_B^{\ 2}}{2.g.AB}$$

$$\sin\alpha = \frac{(6)^2}{2\ .\ 10\ .\ 3.6} = 0.5 \rightarrow \alpha = 30°$$

2- أ- تمثيل القوة المؤثرة على العربة :



ب- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$ ، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور ox :

$$-T = ma \rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- طبيعة الحركة :

المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل $x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، إذن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .

جـ- قيمة X_0 :

- الجملة المدروسة : (جسم (S) + نابض) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، حيث : $W_{CD}(\vec{P}) = 0$ ، $W_{CD}(\vec{R}) = 0$

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين C و D :

$E_C + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_D$

$E_{CC} + E_{PeC} = E_{CD} + E_{PeD}$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kX_0^2 \rightarrow mv_C^2 = kX_0^2 \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{mv_C^2}{k}}$$

اعتمادا على البيان $v_C = 6\ m/s$ و منه :

$$X_0 = \sqrt{\frac{1\ (6)^2}{10}} = 6.10^{-2}\ m$$

- النبض الذاتي ω_0 :

من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{1}} = \sqrt{10} = \sqrt{\pi^2} \rightarrow \omega_0 = \pi\ rad/s$$

- الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$$

هـ- المعادلة الزمنية للحركة :

$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x = 6\ .\ 10^{-2} \cos(\pi\ t + \varphi)$

من الشروط الابتدائية :

$t = 0 \rightarrow x = 0\ ,\ v > 0$

بالتعويض في $x(t)$:

$0 = 6\ .\ 10^{-2} \cos(\pi\ (0) + \varphi)$

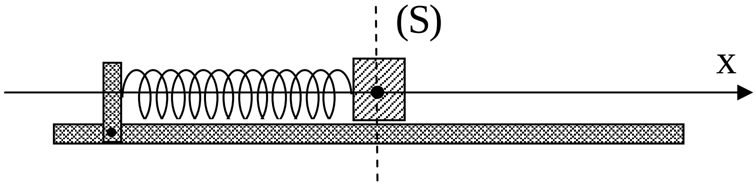
$$\cos\varphi = 0 \rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 \sin\varphi < 0 & \text{(مرفوض)} \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow v_{(t=0)} = -v_0 \sin\varphi > 0 & \text{(مقبول)} \end{cases}$$

إذن :

$$x = 6\ .\ 10^{-2} \cos(\pi\ t + \frac{3\pi}{2})$$

التمرين (12) : (التمرين : 015 في بنك التمارين على الموقع) (**)

نواس مرن أفقي يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته k و جسم نقطي (S) كتلته m يستطيع أن يتحرك على مستوي أفقي دون احتكاك . نزيح الجسم (S) أفقيا بمقدار X_0 ثم نتركه لحاله دون سرعة ابتدائية ، نعتبر مبدأ الأزمنة لحظة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن في الإتجاه الموجب :



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن حركة مركز عطالة الجسم (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .

2- اكتب عبارة النبض الذاتي ω_0 و كذا الدور الذاتي T_0 بدلالة k ، m .

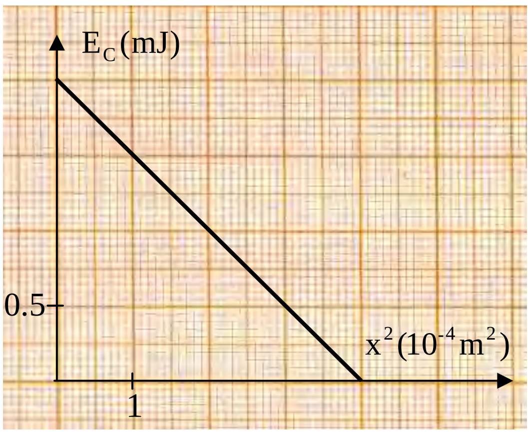
3- قسنا زمن 10 اهتزازات فوجدنا $\Delta t = 10\ s$ ، حدد قيمة الدور الذاتي T_0 و النبض الذاتي ω_0 .

4- بين أن الطاقة الحركية للجسم (S) يعطى العلاقة :

$$E_C = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (X_0^2 - x^2_{(t)})$$

5- يمثل البيان التالي تغيرات الطاقة الحركية E_C بدلالة مربع المطال x^2 للجسم النقطي (S) أثناء حركته .

حدد اعتمادا على البيان :



أ- الكتلة m للجسم (s) و المطال الأعظمي X_0 .

ب- الطاقة الكامنة المرونية الأعظمية E_{Pe} .

جـ- ثابت مرونة النابض k (بطريقتين) .

د- المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$.

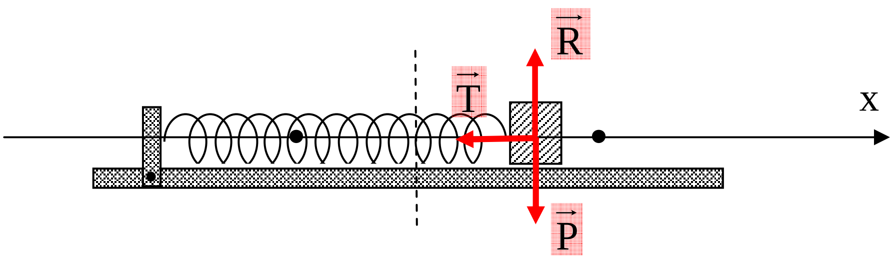
6- أحسب سرعة مركز عطالة الجسم (S) عند المرور بالمطال $x = 1\ cm$.

7- أحسب لحظة المرور الثالث بالمطال $x = + X_0$.

نعتبر $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

1- اثبات طبيعة الحركة :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .

- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : توتر النابض $\vec{T}$، الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور ox :

$$- T = ma \quad - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \quad \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- طبيعة الحركة :

المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل $x = X_0 \cos(\omega_0 t+\varphi)$ ، إذن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .

2- عبارة النبض الذاتي ω_0 :

من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- عبارة الدور الذاتي T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3- قيمة T_0 :

الدور الذاتي T_0 هو الزمن اللازم لانجاز اهتزازة واحدة و عليه :

$$\begin{cases} 10 \text{ اهتزازة} \rightarrow 10\ s \\ 1 \text{ اهتزازة} \rightarrow T_0\ s \end{cases}$$

$$T_0 = \frac{1\ .\ 10}{10} = 1\,s$$

- قيمة ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$$

4- إثبات $E_C = \frac{1}{2}m\omega_0^2(X_0^2 - x^2_{(t)})$:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

بما أن الحركة اهتزازية جيبية غير متخامدة يكون :

- $x = X_0 \cos(\omega_0\, t + \varphi)$
- $v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

بالتعويض في عبارة E_C :

$$E_C = \frac{1}{2} m\, \omega_0{}^2 . X_0{}^2 . \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

لدينا :

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = 1 \;\rightarrow\; \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

يصبح لدينا :

$$E_C = \frac{1}{2} m\, \omega_0{}^2 . X_0{}^2 (1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) \;\rightarrow\; E_C = \frac{1}{2} m\, \omega_0{}^2 (X_0{}^2 - X_0{}^2 . \cos^2(\omega_0 t + \varphi))$$

و حيث أن :

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \;\rightarrow\; X_0{}^2 . \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = x^2$$

يصبح لدينا :

$$E_C = \frac{1}{2} m\, \omega_0{}^2 (X_0{}^2 - x^2)$$

5- أ- الكتلة m للجسم (S) و المطال الأعظمي X_0 :

بيانيا :

المنحنى $E_C = f(x^2)$ عبارة عن مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$E_C = A\, x^2 + B$ .... (1)

حيث : A هو معامل التوجيه ، B نقطة تقاطع المنحنى مع محور التراتيب .

نظريا :

اعتماد على العلاقة المتحصل عليها سابقا نكتب :

$$E_C = \frac{1}{2} m\, \omega_0{}^2 (X_0{}^2 - x^2) \rightarrow E_C = \frac{1}{2} m\, \omega_0{}^2 X_0{}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0{}^2\, x^2$$

$$E_C = -\frac{1}{2} m \omega_0{}^2\, x^2 + \frac{1}{2} m \omega_0{}^2 . X_0{}^2 \quad .... (2)$$

بالمطابقة :

- $-\frac{1}{2} m \omega_0{}^2\, x^2 = A \;\rightarrow\; m = \frac{-2A}{\omega_0{}^2}$
- $-\frac{1}{2} m \omega_0{}^2 X_0{}^2 = B \;\rightarrow\; X_0 = \sqrt{\frac{2B}{m.\omega_0{}^2}}$

من البيان :

- $A = -\frac{4 \,.\, 0.5 \,.\, 10^{-3}}{4 \,.\, 10^{-4}} = -5$
- $B = 4 \,.\, 0.5 \,.\, 10^{-3} = 2 \,.\, 10^{-3}$

إذن :

- $m = \frac{-2(-5)}{(2\pi)^2} = 0.25\,kg$
- $X_0 = \sqrt{\frac{2(2\ .10^{-3})}{0.25\,(2\pi)^2}} = 2\,.10^{-2}\,m = 2\,cm$

ب- الطاقة الكامنة المرونية الأعظمية E_{Pe} :

- في الموضع الموافق لـ $x = X_0$ (المطال الأعظمي) يكون :

- $E_{C1} = 0 \quad (v = 0)$
- $E_{Pe1} = E_{Pe0}$ (طاقة كامنة أعظمية)
- $E_1 = E_{C1} + E_{Pe1} = E_{Pe0}$

- في وضع التوازن الموافق لـ $x = 0$ يكون :

- $E_{C2} = E_{C0}$ (السرعة أعظمية)
- $E_{Pe2} = 0$ (النابض في حالة راحة)
- $E_2 = E_{C1} + E_{Pe1} = E_{C0}$

- بما أن الحركة اهتزازية غير متخامدة يكون طاقة الجملة (جسم + نابض) محفوظة لذلك يكون :

$E_1 = E_2 \ \rightarrow\ E_{Pe0} = E_{C0}$

من البيان :

$E_{C0} = 4\ .\ 0.5\ .\ 10^{-3} = 2\ .\ 10^{-3}\ J$

إذن :

$E_{Pe0} = 2\ .\ 10^{-3}\ J$

جـ- ثابت مرونة النابض k :

الطريقة الأولى :

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{k}{m} \ \rightarrow\ k = \omega_0^{\ 2}\ .\ m \ \rightarrow\ k = (2\pi)^2.0.25 = 10\ N/m$$

الطريقة الثانية :

$$E_{Pe0} = \frac{1}{2}k\,X_0^{\ 2} \ \rightarrow\ k = \frac{2\,E_{Pe0}}{X_0^{\ 2}} \ \rightarrow\ k = \frac{2\ .\ 2\ .10^{-3}}{(2\ .10^{-2})^2} = 10\ N/m$$

د- المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$:

$x = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x = 2\ .\ 10^{-2}\cos(2\pi\ t + \varphi)$

من الشروط الابتدائية :

$t = 0 \ \rightarrow x = 0\ ,\ v > 0$

بالتعويض في $x(t)$:

$0 = 2\ .\ 10^{-2}\cos(2\pi\,(0) + \varphi)$

$$\cos\varphi = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \ \rightarrow\ v_{(0)} = -\,v_0\cos\varphi < 0 \ (\text{مرفوض}) \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} \ \rightarrow\ v_{(0)} = -\,v_0\cos\varphi > 0 \ (\text{مقبول}) \end{cases}$$

إذن المعادلة الزمنية للحركة هي :

$$x = 2.10^{-2}\cos(2\pi\, t + \frac{3\pi}{2})$$

6- سرعة مركز عطالة الجسم (S) عند المرور بالمطال $x = 1\ cm$:

عند وضع التوازن تكون السرعة أعظمية و عليه :

$v = v_0 = \omega_0 X_0$

$v = 2\pi\ .\ 2\ .\ 10^{-2} = 0.1256\ ms$

7- لحظة المرور الثالث بالمطال $x = +X_0$:

$$x = 2.10^{-2}\cos(2\pi\, t + \frac{3\pi}{2})$$

بتعويض : $x = X_0 = 2\ .\ 10^{-2}\ m$ نجد :

$$2\ .\ 10^{-2} = 2.10^{-2}\cos(2\pi\, t + \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \cos(2\pi\, t + \frac{3\pi}{2}) = 1$$

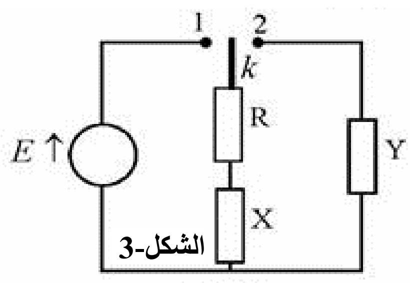
$$2\pi\, t + \frac{3\pi}{2} = 2\pi k \rightarrow 2\, t + \frac{3}{2} = 2k \rightarrow t + \frac{3}{4} = k \rightarrow t = k - \frac{3}{4}$$

- $k = 0 \rightarrow t = -\frac{3}{4}$ (مرفوض)
- $k = 1 \rightarrow t = 1 - \frac{3}{4} = 0.25$ (المرور الأول)
- $k = 2 \rightarrow t = 2 - \frac{3}{4} = 1.25$ (المرور الثاني)
- $k = 3 \rightarrow t = 3 - \frac{3}{4} = 2.25$ (المرور الثالث)

إذن لحظة المرور الثالث هي : $t = 2.25\ s$.

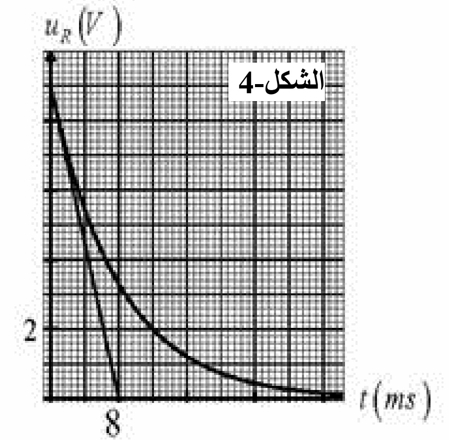
التمرين (14) : (التمرين : 032 في بنك التمارين على الموقع) (**)

في حصة للأعمال المخبرية ، قدم الأستاذ لفوج من التلاميذ العناصر الكهربائية التالية : مولد كهربائي ذو توتر ثابت (E) و مقاومة داخلية مهملة ، بادلة (k) ،
ناقل أومي مقاومته ($R = 100\ \Omega$) ، عنصر مجهول (X) ، عنصر مجهول (Y) ، راسم اهتزاز ذو ذاكرة .
من أجل تحديد و مميزات كل من العنصرين المجهولين (X) و (Y) أحدهما مكثفة و الآخر وشيعة مقاومتها مهملة طلب الأستاذ من التلاميذ تحقيق التركيب التجريبي (الشكل-3) .



الشكل-3

التجربة الأولى :



نضع البادلة في الوضع (1) في اللحظة $t = 0$ و باستعمال راسم الاهتزاز المهبطي نسجل التوتر $u_R(t)$ (الشكل-4) .

بالاعتماد على البيان :

1- حدد طبيعة العنصر (X) مع التعليل .

2- عين قيمة ثابت الزمن τ للدارة .

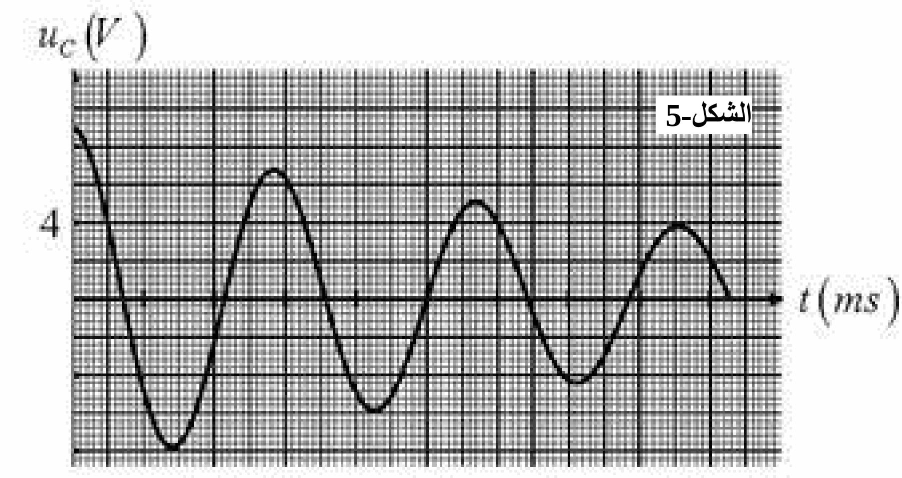
3- عين المقدار المميز للعنصر (X) .

4- استنتج قيمة القوة المحركة الكهربائية للمولد (E) .

5- أكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها المقدار $u_R(t)$.

التجربة الثانية :

باعتبار العنصر (X) مكثفة سعتها $C = 80\ \mu F$ مشحونة كليا ، نضع البادلة في الوضع (2) . فنلاحظ على شاشة راسم الإهتزاز المهبطي منحنى (الشكل-5) الذي يمثل تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .



1- ما هي الظاهرة التي يلاحظها التلاميذ ؟

2- هل يسمح منحنى (الشكل-5) من معرفة طبيعة العنصر (Y) علل .

3- أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_C(t)$.

4- عين قيمة شبه الدور لـ $u_C(t)$.

5- أحسب المقدار المميز للعنصر (Y)

6- أحسب الطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظتين $t_1 = 0$ و $t_2 = 3T$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر ذلك .

يعطى : $\pi^2 = 10$.

الأجوبة :

التجربة الأولى :

1- تحديد العنصر X :

أثناء شحن المكثفة تتناقص شدة التيار في ثنائي القطب RC وبالتالي تتناقص التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي (لأن $u_R = Ri$) ، إذن ثنائي القطب X عبارة عن مكثفة .

2- ثابت الزمن τ :

تمثل قيمة τ لحظة تقاطع مماس المنحنى $u_R(t)$ مع محور الأزمنة (ot) وبالتالي من المنحنى $u_R(t)$ يكون :

$$\tau = 8ms$$

3- المقدار المميز للعنصر X (سعة المكثفة) :

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R}$$

$$C = \frac{8.10^{-3}}{100} = 8.10^{-5} F$$

4- قيمة E :

من البيان :
$u_R(t=0) = 4,5 \times 2 = 9V$

ولدينا :
$u_R = Ri \rightarrow u_R(t=0) = RI_0$

وحيث أن $I_0 = \frac{E}{R}$ نكتب :

$u_R(t=0) = R.\frac{E}{R} = E \rightarrow E = 9V$

5- المعادلة التفاضلية التي يحققها المقدار $u_R(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$u_R + u_C = E$

$u_R + \frac{q}{C} = E$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$

$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$

لدينا :
$u_R = Ri \rightarrow i = \frac{u_R}{R}$

ومنه :

$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0$

التجربة الثانية :

1- الظاهرة التي يلاحظها التلاميذ هي اهتزازات حرة كهربائية شبه دورية

2- امكانية معرفة العنصر X من منحنى الشكل-5- :

في الاهتزازات الكهربائية تفرغ المكثفة طاقتها في الوشيعة والعكس، أي تفرغ الوشيعة طاقتها في المكثفة التي تشحن عندئذ، بما أن العنصر Y هو مكثفة فحتما يكون العنصر X عبارة عن وشيعة.

3- المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$u_b + u_C = 0$

$L\frac{di}{dt} + u_C = 0$

$L\frac{d^2q}{dt^2} + u_C = 0$

$L\frac{d^2(C.u_C)}{dt^2} + u_C = 0$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+u_C=0 \rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

4- قيمة شبه الدور $u_C(t)$:

من منحنى الشكل-5 :

$$T=2,9\times 20=58\ ms=5,8.10^{-2}s$$

5- المقدار المميز للعنصر Y (ذاتية الوشيعة L) :

$$T=2\pi\sqrt{LC} \rightarrow T^2=4\pi^2LC \rightarrow L=\frac{T^2}{4\pi^2C}$$

$$L=\frac{(5,8.10^{-2})^2}{4\times 10\times 8.10^{-5}}=1,05\ H$$

6- الطاقة المخزنة في المكثفة عند $t=0$ ، $t_2=3T$

$$E_{(C)}=\frac{1}{2}Cu_C^2$$

اعتمادا على منحنى الشكل-5 :

- $t_1=0 \rightarrow u_C=9V \rightarrow E_{(C)}(t_1=0)=\frac{1}{2}.8.10^{-5}(9)^2=3,24.10^{-3}J$
- $t_2=3T \rightarrow u_C=3,8V \rightarrow E_{(C)}(t_2=3T)=\frac{1}{2}.8.10^{-5}(3,8)^2=3,60.10^{-4}J$

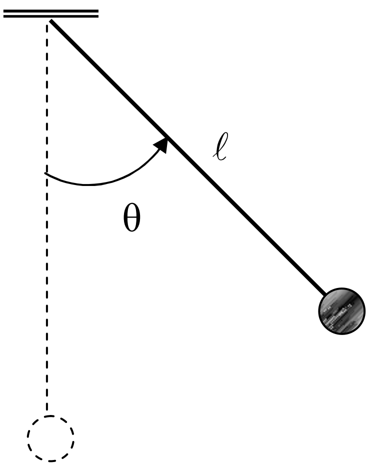
الاستنتاج :

نلاحظ $E_C(t_2)<E_C(t_1)$ ، نستنتج أن طاقة الدارة (RLC) غير محفوظة كما أنها تتناقص (اهتزازات متخامدة)

التفسير :

نفسر تناقص طاقة المكثفة ، بتحول جزء منها في الناقل الأومي بفعل جول وهو سبب التخامد .

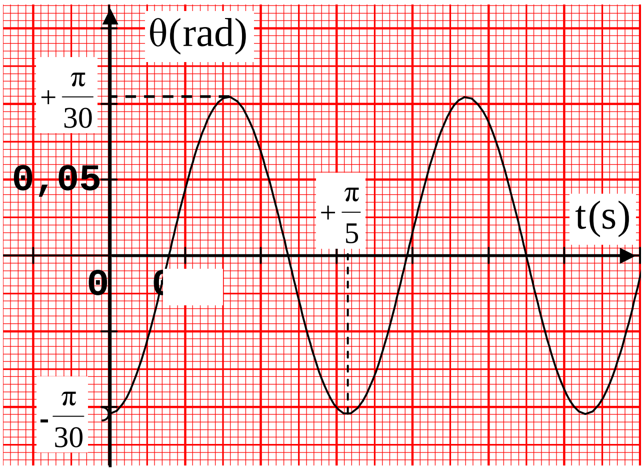
التمرين (15) : (بكالوريا 2004 - ع ط ح) (التمرين : 014 في بنك التمارين على الموقع) (**)



1- يتألف نواس بسيط من خيط مهمل الكتلة طوله (ℓ) ، يحمل في طرفه الأسفل جسما (S) نقطيا كتلته m = 18 g ، يمكن لهذا النواس أن يهتز في المستوي الشاقولي حول المحور الأفقي المار من نقطة تعليقه (o) ، نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية θ صغيرة ، ثم نحرره عند اللحظة t = 0 بدون سرعة ابتدائية .

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، استنتج طبيعة حركة النواس و جد عبارة دورها الذاتي T_0 بدلالة g ، ℓ .

2- يسمح تجهيز مناسب بتسجيل ثم رسم البيان الذي يمثل تغيرات المطال الزاوي θ بدلالة الزمن (الشكل) .



أ- استنتج من البيان قيمة الدور الذاتي T_0 و السعة الزاوية θ_0 .

ب- إذا علمت أن $g = 10\ m/s^2$ ، أحسب طول النواس (ℓ) .

جـ- أكتب المعادلة الزمنية لحركة هذا النواس .

4- نزيح النواس بزاوية كبيرة (θ_0) ثم نتركه بدون سرعة ابتدائية .

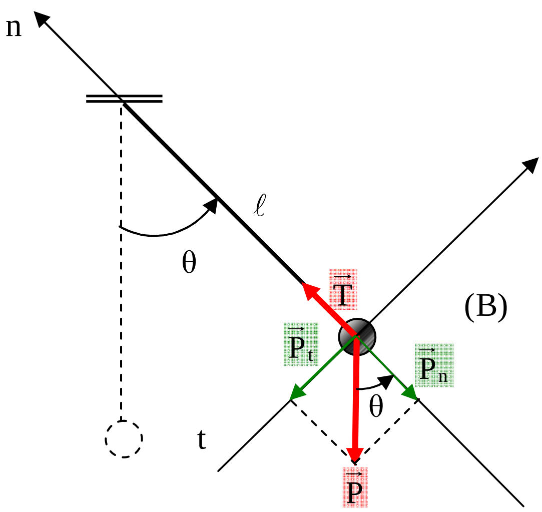
أ- أوجد عبارة السرعة الخطية v للجسم النقطي (S) عند مروره بوضع التوازن بدلالة المقادير g ، ℓ ، θ_0 .

ب- بين أن عبارة توتر الخيط عند المرور بوضع التوازن تعطى بالعلاقة :

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

جـ- إذا كانت شدة التوتر عند هذا الوضع 0.36N ، استنتج الزاوية θ_0 .

الأجوبة :



1- طبيعة حركة النواس :

- الجملة المدروسة : (كرية) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$.
- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور المماسي (ot) نجد :

$$-P\sin\theta = m\,a_t \rightarrow -m.g\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$-g\sin\theta = \frac{dv}{dt}$$

لدينا :

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

و منه يصبح :

$$-g.\sin\theta = \ell.\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \rightarrow \ell.\frac{d^2\theta}{dt^2} + g.\sin\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة يكون : $\sin\theta \approx \theta$ و منه يصبح لدينا :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، نستنتج أن حركة النواس اهتزازية جيبية غير متخامدة .

- عبارة الدور الذاتي T_0 بدلالة g ، ℓ :

من المعادلة التفاضلية :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

و لدينا :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

2- أ- قيمة T_0 ، θ_0 :

من البيان :

- $T_0 = \frac{\pi}{5}\,s$
- $\theta_0 = \frac{\pi}{30}$ rad

ب- قيمة ℓ :

مما سبق :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \rightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2.\ell}{g} \rightarrow \ell = \frac{T_0^2.g}{4\pi^2} \rightarrow \ell = \frac{(\frac{\pi}{5})^2.10}{4\pi^2} \rightarrow \ell = 0.1\text{ m} = 10\text{ cm}$$

جـ- المعادلة الزمنية :

$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

- $\theta_0 = \frac{\pi}{30}$.
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \rightarrow \omega_0 = 10$ rad/s
- $t = 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{30}$ (من البيان)

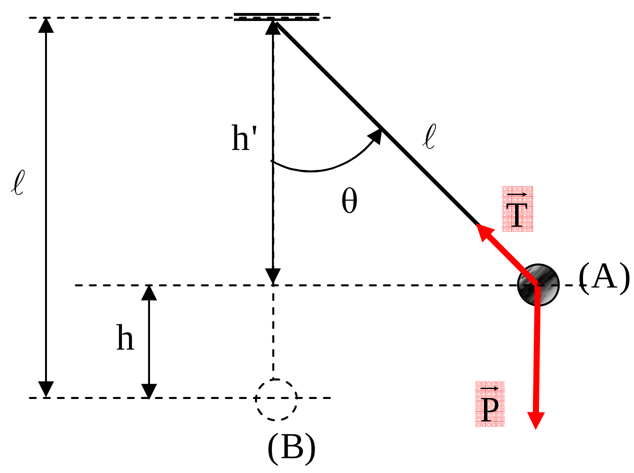
بالتعويض :

$$-\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{30}\cos(\omega_0(0) + \varphi) \rightarrow \cos\varphi = -1 \rightarrow \varphi = \pi$$

و منه المعادلة الزمنية تكون كما يلي :

$$\theta = \frac{\pi}{30}\cos(\omega_0 t + \pi)$$

4- أ- عبارة السرعة عند وضع التوازن بدلالة g ، ℓ ، θ_0 :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : قوة الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$ حيث : $W_{AB}(\vec{T}) = 0$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{AB}(\vec{P}) = E_{CB}$$

- $E_{CA} = 0 \quad (v_A = 0)$
- $E_{CB} = \frac{1}{2} m v_B^2$
- $W_{AB}(\vec{P}) = m.g.h$

من الشكل :

$$\begin{cases} h = \ell - h' \\ \cos\theta_0 = \dfrac{h'}{\ell} \end{cases} \rightarrow h' = \ell \cos\theta_0 \rightarrow h = \ell - \ell\cos\theta_0 = \ell\,(1 - \cos\theta_0)$$

و منه :

$$W_{AB}(\vec{P}) = m.g.\ell\,(1 - \cos\theta_0)$$

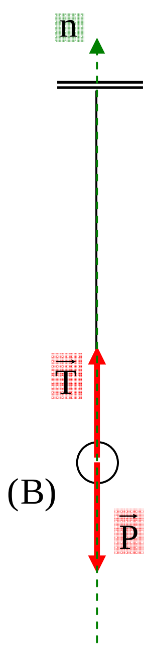
يصبح لدينا :

$$0 + m.g.\ell\,(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$2g.\ell\,(1 - \cos\theta_0) = v_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g.\ell\,(1 - \cos\theta_0)}$$

و هي عبارة سرعة الجسم النقطي (S) عند مروره بوضع التوازن B .

ب- عبارة توتر الخيط عند المرور بوضع التوازن :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$.
- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m a_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور الناظمي (on) نجد :

$$-P + T = m\,a_n$$

$$-m\,g + T = m\,\frac{v_B^2}{\ell}$$

مما سبقا وجدنا : $v_B = \sqrt{2g.\ell\,(1 - \cos\theta_0)}$ و منه :

$$-mg + T = m\frac{2.g.\ell(1-\cos\theta_0)}{\ell}$$
$$-mg + T = 2m.g\,(1-\cos\theta_0)$$
$$-mg + T = 2m.g - 2m.g\cos\theta_0$$
$$T = 3m.g - 2m.g\cos\theta_0 \quad\rightarrow\quad T = mg(3-2\cos\theta_0\,)$$

جـ- قيمة θ_0 من أجل $T = 0.36\ N$:

من العلاقة السابقة :

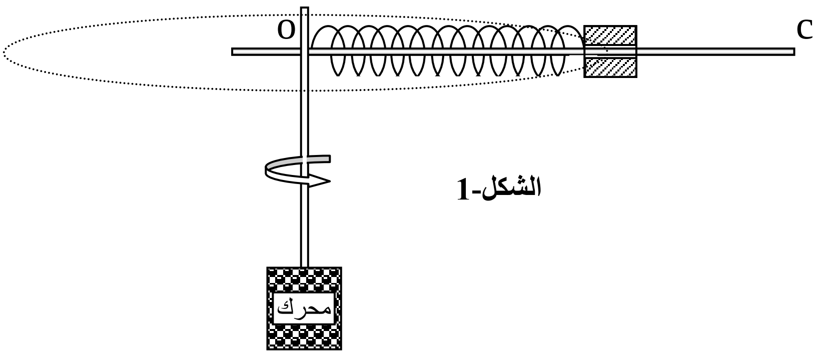
$$T = 3m.g - 2mg\cos\theta_0$$
$$2m.g.\cos\theta_0 = 3m.g - T \quad\rightarrow\quad \cos\theta_0 = \frac{3m.g - T}{2m.g}$$
$$\cos\theta_0 = \frac{(3\ .\ 18\ .\ 10^{-3}\ .\ 10)\ - 0.36}{2\ \ .\ \ 18\ .\ 10^{-3}\ .\ 10} = 0.5 \quad\rightarrow\quad \theta_0 = 60°$$

التمرين (16) : (التمرين : 018 في بنك التمارين على الموقع) (**)

نلف حول ساق أفقية (oc) نابض مرنا كتلته مهملة ، حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $k = 40\ N/m$ طوله و هو في حالته الطبيعية $\ell_0 = 20\ cm$.

نثبت إحدى نهايتيه في النقطة (o) و في النهاية الأخرى للنابض يلحم جسم صلب (S) كتلته $m = 500\ g$ يمكنه الانزلاق وفق الساق (oc) دون احتكاك (الشكل-1) .

1- يدير محرك بسرعة ثابتة الجملة (الساق oc - النابض - الجسم الصلب) في مستوي أفقي حول محور شاقولي (yy') ، فيأخذ الجسم (S) حركة دائرية منتظمة حول النقطة (o) بسرعة ثابتة $v = 1\ m/s$.



الشكل-1

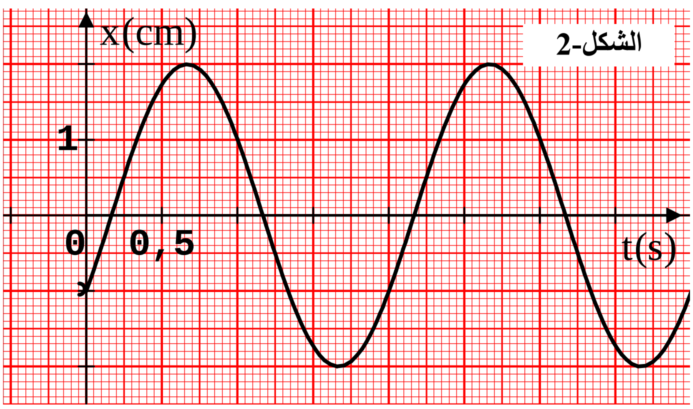
أ- أوجد قيمة استطالة النابض أثناء الحركة علما أن ثابتة

ب- أحسب شدة توتر النابض .

2- نوقف الجملة السابقة عن الدوران ، و نسحب الجسم (S) أفقيا ثم نتركه ، فيكتسب حركة اهتزازية جيبية غير متخامدة ، يمثل منحنى (الشكل-2) تغيرات المطال x بدلالة الزمن .

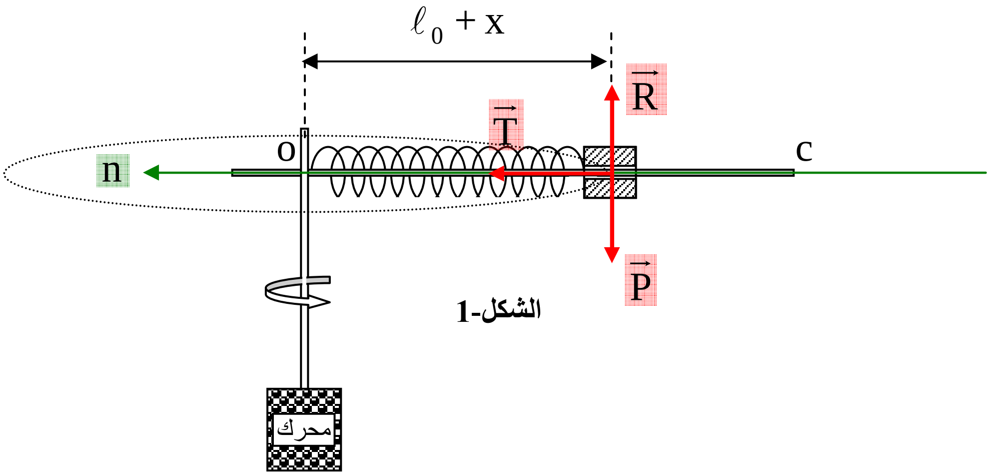
أ- اعتمادا على المنحنى البياني عين قيمتي الدور الذاتي T_0 و التواتر الذاتي ω_0 .

ب- أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$.



الأجوبة :

1- أ- استطالة النابض :



الشكل-1

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوة الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة توتر النابض $\vec{T}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور الناظمي (on) :

$$T = m\,a_n$$

$$k\,x = m\frac{v^2}{(\ell_0 + x)}$$

$$40\,x = 0.5\frac{(1)^2}{(0,2 + x)}$$

$$40\,x = \frac{0.5}{(0,2 + x)}$$

$$8\,x + 40\,x^2 = 0.5 \;\rightarrow\; 40\,x^2 + 8\,x - 0.5 = 0$$

$$\Delta = (8)^2 - 4(40)(-0,5) = 144 \;\rightarrow\; \sqrt{\Delta} = 12$$

- $x_1 = \dfrac{-8 - 12}{2\,.40} = -0,25\,m$ (مرفوض)
- $x_1 = \dfrac{-8 + 12}{2\,.40} = 0.05\,m$ (مقبول)

إذن : $x = 0.05\ m = 5\ cm$ و هي استطالة النابض أثناء دوران الجسم (S) .

ب- شدة توتر النابض :

$T = k\,x$

$T = 40 \;.\; 0{,}05 = 2\ N$

2- أ- قيمة T_0 ، ω_0 :

من البيان :

- $T_0 = 4 \;.\; 0{,}5 \rightarrow T_0 = 2\ s$
- $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$

ب- المعادلة الزمنية :

$x = X_0 \cos(\omega_0\, t + \varphi)$

- $X_0 = 2cm = 2 \;.\; 10^{-2}\ m$
- $\omega_0 = \pi\ rad/s$

من البيان أيضا :

$t = 0 \rightarrow x = 10^{-2}\ m \;\rightarrow\; v > 0$

بالتعويض في $x(t)$:

$- 10^{-2} = 2 \;.\; 10^{-2} \cos(\pi(0) + \varphi)$

$$\cos(\varphi) = 0.5 \;\rightarrow\; \begin{cases} \varphi = \dfrac{2\pi}{3} & \rightarrow\; v_{(t=0)} = -\,v_0 \sin\varphi < 0 \quad \text{(مرفوض)} \\ \varphi = \dfrac{4\pi}{3} & \rightarrow\; v_{(t=0)} = -\,v_0 \sin\varphi > 0 \quad \text{(مقبول)} \end{cases}$$

إذن المعادلة الزمنية للحركة تكون كما يلي :

$$x = 2 \;.\; 10^{-2} \cos\left(\pi\, t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

** الأستاذ : فرقاني فارس **
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم
الخروب ـ قسنطينة
Fares_Fergani@yahoo.Fr

نرجو إبلاغنا عن طريق البريد الإلكتروني بأي خلل في الدروس أو التمارين و حلولها . وشكرا مسبقا

لتحميل نسخة من هذا الملف و للمزيد . أدخل موقع الأستاذ :

www.sites.google.com/site/faresfergani