

سلاسل المنجد - دروس و تمارين



السلسلة 3-03-1

تطور دراسة ظواهر كهربائية

عرض نظري و تمارين محلولة

يمكن تحميل السلسلة بصيغة pdf من موقع المنجد :
www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل - تمارين - فيديوهات)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في نفس الموقع الإلكتروني .

لكي يصلك جديد موقع المنجد تابع صفحة الفيسبوك
التالية :

facebook.com/elmoundjidff

الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نانت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
fares_fergani@yahoo.fr
0771998109

الإصدار : جانفي/2023

مجلد

العلم الفيزيائي

دراسة ظواهر كهربائية

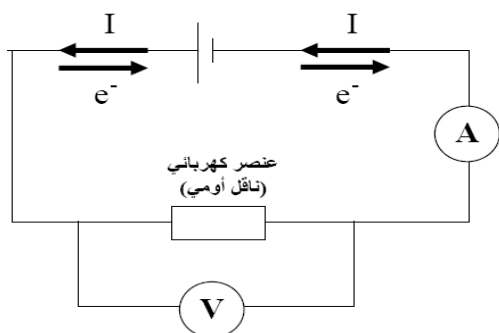
إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

السلسلة 03-01

عرض نظري و تمارين

I - مفاهيم أساسية في الكهرباء

1- التيار الكهربائي و التوتر الكهربائي



• مفهوم التيار الكهربائي و التوتر الكهربائي :

- التيار الكهربائي هو الانتقال الجماعي لحاملات الشحنة و حاملات الشحنة في النواقل المعدنية هي الإلكترونات .
- ينتقل التيار الكهربائي من القطب الموجب للمولد إلى قطبه السالب ، و الإلكترونات في الاتجاه المعاكس .
- تقاس شدة التيار الكهربائي بجهاز يدعى مقياس الأمبير يرمز له بـ (A) ويوصل دوماً على التسلسل مع العنصر المراد قياس شدته التيار الكهربائي المارة به
- إذا كانت شدة التيار الكهربائي المار في الدارة ثابتة فإنه يعبر عنها بالعلاقة :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

- إذا كانت شدة التيار الكهربائي متغيرة فإنه يعبر عنها بالعلاقة :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

- يجري تيار كهربائي بين نقطتين من دارة إذا كان بين هاتين النقطتين توتر كهربائي .
- يرمز للتوتر الكهربائي بين طرفي A و B لعنصر كهربائي في دارة كهربائية بـ U_{AB} و يكون ما يلي :

$$U_{AB} = - U_{BA} \quad \checkmark$$

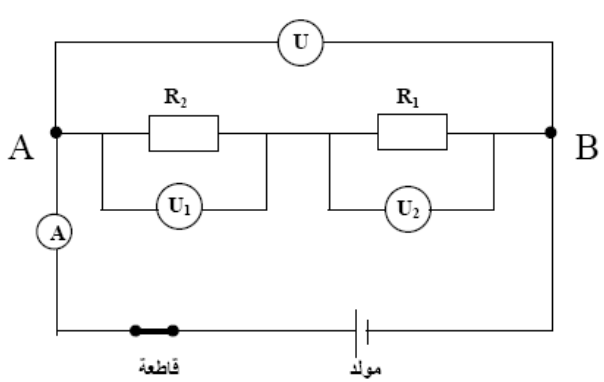
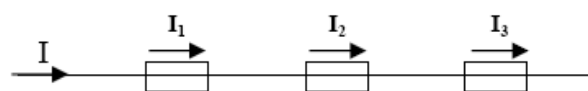
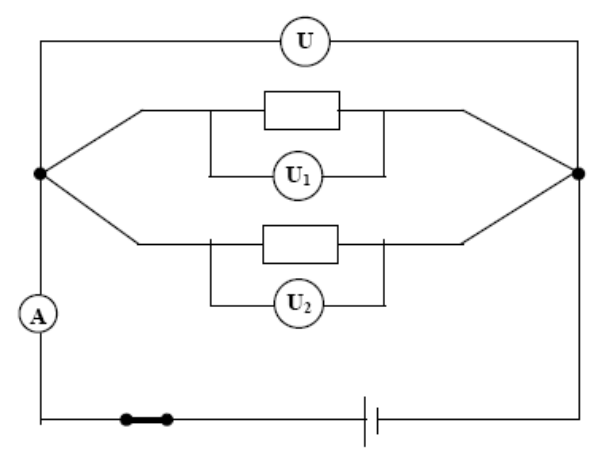
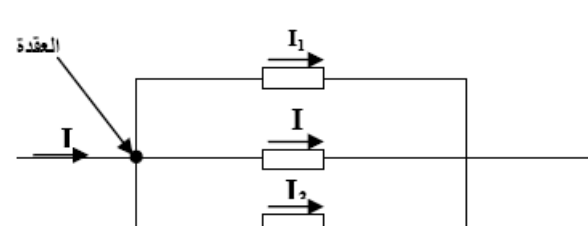
$$U_{AB} > 0 \quad \checkmark \text{ إذا كان الطرف A مرتبط بالقطب الموجب للمولد .}$$

$$U_{AB} < 0 \quad \checkmark \text{ إذا كان الطرف A مرتبط بالقطب السالب للمولد .}$$

- يقاس التوتر الكهربائي بجهاز يدعى مقياس الفولط يرمز له بـ (V) ويوصل دوماً على التفرع مع العنصر المراد قياس التوتر الكهربائي بين طرفيه .

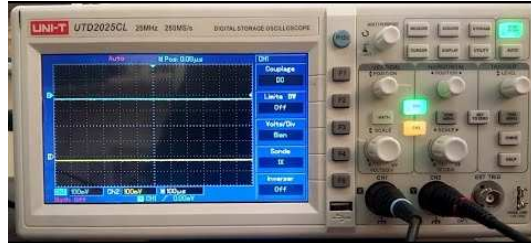
- للحصول على قيمة موجبة للتوتر الكهربائي بواسطة مقياس الفولط يجب وصل قطبه الموجب (لونه أحمر عادة) بالطرف الموصول بالقطب الموجب للمولد ، و إذا وصلنا قطبه الموجب مع الطرف المرتبط بالقطب السالب للمولد نحصل على قيمة سالبة للتوتر .

• خواص شدة التيار و التوتر الكهربائي :

خواص التوتر الكهربائي	خواص شدة التيار الكهربائي	
 $U = U_1 + U_2$ قانون جمع التوترات	 $I = I_1 = I_2 = I_3$	على التسلسل
 $U = U_1 = U_2$	 $I = I_1 + I_2 + I_3$ قانون العقد	على التفرع

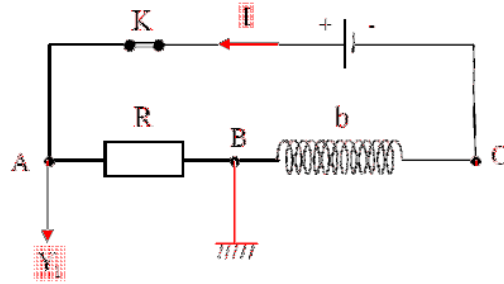
• راسم الاهتزاز المهبطي ذو ذاكرة :

- راسم الاهتزاز المهبطي هو جهاز إلكتروني يمكننا من خلاله الحصول على منحنى تغيرات التوتر الكهربائي بدلالة الزمن لأي عنصر كهربائي في الدارة .



- يمكن لرأس الاهتزاز المهبطي إعطاء منحنين في آن واحد .

- للحصول على قيمة موجبة للتوتر الكهربائي بين طرفي عنصر كهربائي باستعمال راسم الاهتزاز المهبطي نصل أرضي الجهاز بطرف العنصر الكهربائي الموصول بالقطب السالب للمولد و المدخل Y بالطرف الموصول بالقطب الموجب للمولد ، و إذا لزم عكس ذلك ، نحصل على قيمة سالبة و بعدها نقوم بعكس المنحنى بالضغط على الزر INV .

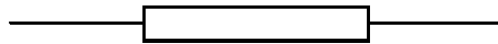


- يمكن الحصول على منحنى التيار عن طريق راسم الاهتزاز المهبطي من خلال منحنى التوتر بين طرفي الناقل الأومي ، لأن $u_R = Ri$ و بالتالي المنحنى $i(t)$ مماثل للمنحنى $u_R(t)$.

2- النواقل الأومية و المولدات

• الناقل الأومي :

- الناقل الأومي هو عنصر كهربائي يحول جزءاً من الطاقة الكهربائية التي يتلقاها إلى طاقة حرارية بفعل جول ، يرمز له في الدارة الكهربائية كما يلي :

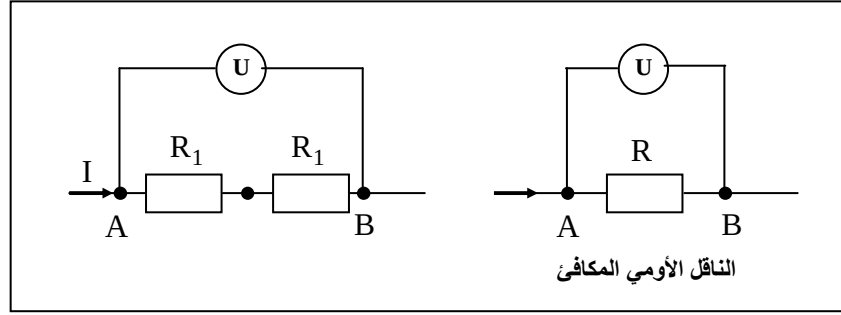


- يتميز الناقل الأومي بثابت يدعى مقاومة الناقل الأومي يرمز له بـ R و وحدته الأوم (Ω) .
- التوتر بين طرفي ناقل أومي يعطى بالعلاقة :

$$u_R = Ri$$

• جمع النواقل الأومية :

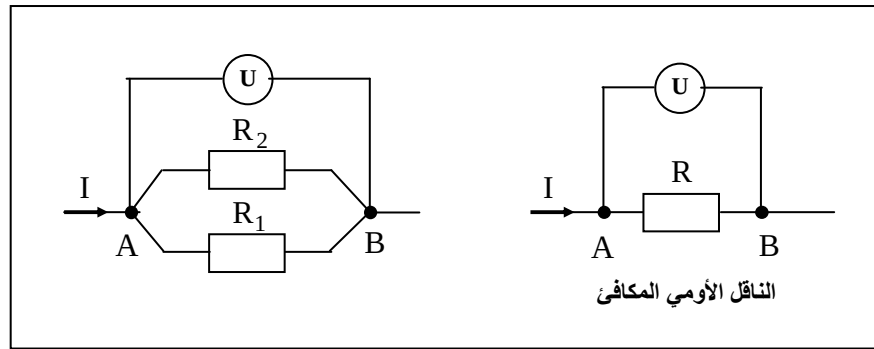
على التسلسل :



$$R = R_1 + R_2$$

R : هي مقاومة الناقل الأومي المكافئ ، و الناقل الأومي المكافئ لنواقل أومية R_1 ، R_2 ... هو ناقل أومي التوتّر بين طرفيه مساوي للتوتّر بين طرفي ثنائي القطب (R_1 , R_2 ) و يجتازه تيار كهربائي شدته مساوية لشدة التيار الكهربائي الذي يجتاز ثنائي القطب (R_1 , R_2 ) .

على التفرع :

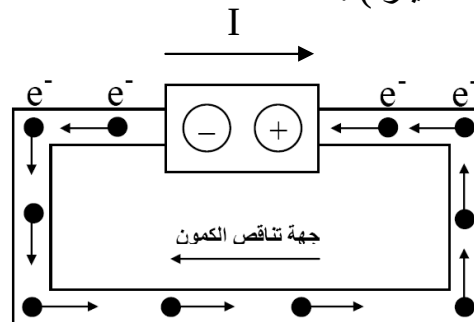


$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

R : هي مقاومة الناقل الأومي المكافئ للنواقل الأومية R_1 ، R_2 .

• المولد الكهربائي :

- المولد الكهربائي هو عنصر كهربائي يجعل الشحنات الكهربائية تتحرك باستمرار بين قطبين من الدارة الكهربائية و بالتالي إعطاء تيار كهربائي .
- يسلك المولد في دارة كهربائية سلوك المضخة المائية تماما ، فهو يسحب الإلكترونات من جهة قطبه الموجب ، و يدفعها من جهة قطبه السالب (عكس جهة التيار) .



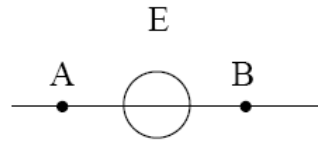
- يتميز المولد بمقاومة داخلية r و قوة محركة كهربائية E تمثل التوتر الكهربائي بين طرفيه عندما لا يجري في الدارة أي تيار .
- التوتر بين طرفي مولد قوته المحركة الكهربائية E و مقاومته الداخلية r يعطى بالعلاقة :

$$u = E - ri$$

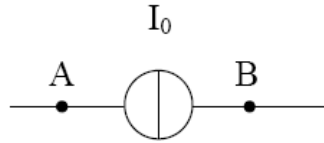
- إذا كانت $r = 0$ نقول على المولد أنه مثالي و يكون :

$$u = E$$

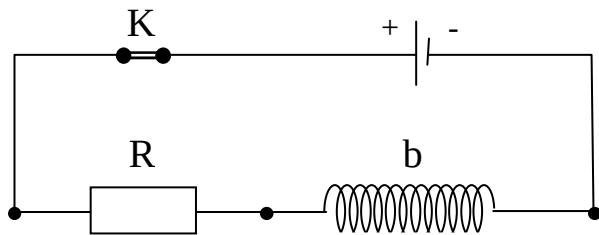
- أي التوتر بين طرفيه (بين طرفي الدارة) ثابت و يساوي E .
- لا يوجد في الواقع مولد مثالي لكن يمكن بتجهيز مرفق للمولد جعل المقاومة الداخلية معدومة و الحصول على مولد التوتر بين طرفيه ثابت E يدعى هذا المولد مولد التوتر .
- مولد التوتر هو مولد يعطي توتر ثابت و يساوي E ، يرمز له في الدارة الكهربائية كما يلي :



- هناك مولد آخر يدعى مولد التيار و هو مولد يعطي تيار ثابت I_0 ، يرمز له كما يلي :

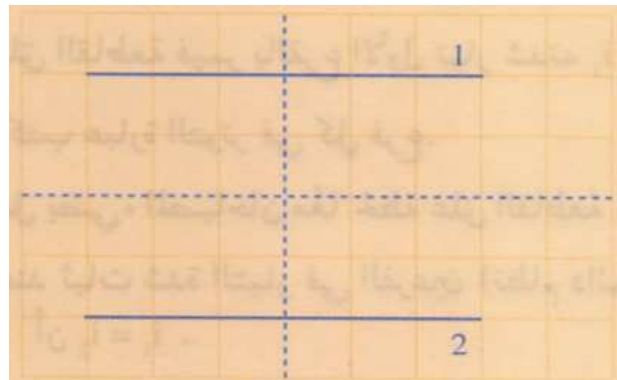


التمرين (1) : (التمرين : 001 في بنك التمارين على الموقع) (*)



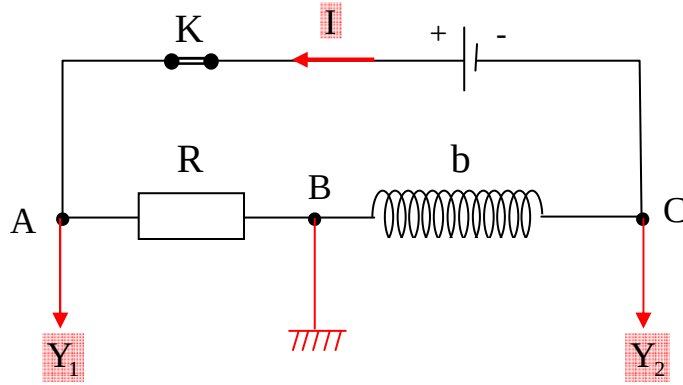
- تتكون الدارة التالية من ناقل أومي (R) و وشيعة (b) و قاطعة (k)
- 1- عين على هذه الدارة جهة التيار الكهربائي ، ثم بين كيف يتم وصل هذه الدارة براسم الاهتزاز المهبطي حتى نحصل على منحنيين ، الأول يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي و الثاني بين طرفي الوشيعة .

- 2- المنحنيين (1) ، (2) التاليين هما الذين يظهران على شاشة راسم الإهتزاز المهبطي . أي المنحنيين يمثل التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي و أيهما يمثل التوتر u_b بين طرفي الوشيعة



الأجوبة :

1- تعيين جهة التيار الكهربائي و كيفية وصل هذه الدارة براسم الاهتزاز المهبطي :



2- المنحنى الموافق لكل عنصر كهربائي :

من خلال طريقة وصل راسم الاهتزاز المهبطي بالدائرة ، يُظهر راسم الاهتزاز المهبطي على المدخل Y_1 التوتر u_{AB} بين طرفي الناقل الأومي و على المدخل Y_2 يُظهر التوتر u_{CB} بين طرفي الوشيعة ، و كون أن Y_1 مرتبط بطرف الناقل الأومي الموصول بالقطب الموجب للمولد و المدخل Y_2 متربط بطرف الوشيعة الموصول بالقطب السالب للمولد يكون :

▪ $u_{AB} > 0$

و هذا يتفق مع المنحنى (1) و عليه فإن المنحنى (1) يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي .

▪ $u_{CB} < 0$

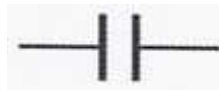
و هذا يتفق مع المنحنى (2) و عليه فإن المنحنى (2) يمثل التوتر بين طرفي الوشيعة .

II - ثنائي القطب RC

1- خصائص المكثفة

• تعريف المكثفة :

- المكثفة هي عنصر كهربائي قادر على تخزين شحنة كهربائية.
- تتكون المكثفة من ناقلين كهربائيين ، يدعى كل منهما لبوس المكثفة ، يفصل بينهما مادة عازلة للكهرباء .
- يرمز للمكثفة اصطلاحا في الدارات الكهربائية بالرمز التالي :



• سعة المكثفة :

- أثبت تجريبيا ان شحنة المكثفة تتناسب طرديا مع التوتر الكهربائي بين طرفيها أي : $q = a u$ ، ثابت التناسب a هو ثابت يميز المكثفة يدعى **سعة المكثفة** يرمز لها بـ C ووحدتها الفاراد التي يرمز لها بـ F و نكتب :

$$q = C u \rightarrow u = \frac{q}{C}$$

وحدة شحنة المكثفة : الكولون (C)

وحدة التوتر u : الفولط (V)

- سعة المكثفة هي مقدار يعبر عن إمكانية تخزينه المكثفة للشحنة الكهربائية ، حيث تخزن المكثفة شحنة أكبر كلما كانت سعتها أكبر عندما تتشحن بنفس التوتر .

- سعة المكثفة صغيرة جدا ، لذا يعبر عنها عادة بأجزاء الفاراد التالية :

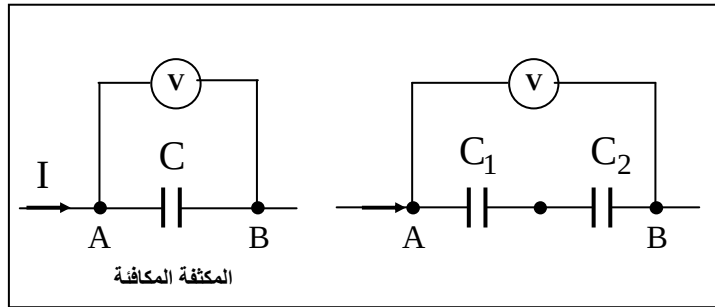
▪ ميكرو فاراد (μF) : حيث $1\mu F = 10^{-6} F$

▪ نانو فاراد (nF) : حيث $1nF = 10^{-9} F$

▪ بيكو فاراد (pF) : حيث $1pF = 10^{-12} F$.

● تجميع المكثفات :

على التسلسل :

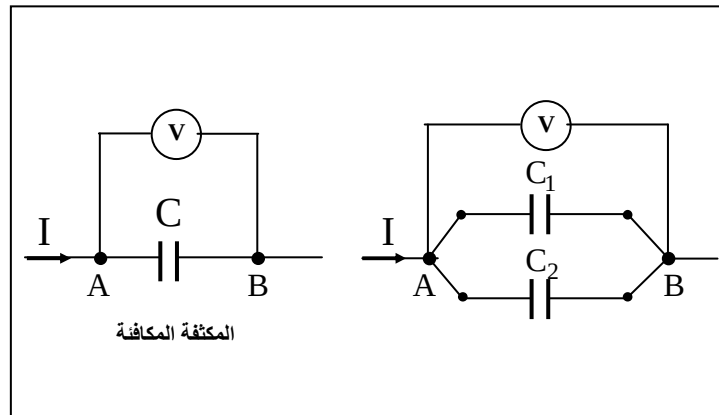


$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

حيث C هي سعة المكثفة المكافئة ، و المكثفة المكافئة هي مكثفة يكون التوتر بين طرفيها مساوي للتوتر بين ثنائي القطب (C_1 , C_2) و شدة التيار الذي يجتازها التيار مساوي لشدة التيار الذي يجتاز ثنائي القطب (C_1 , C_2) .

- سعة المكثفة المكافئة في الربط على التسلسل تكون أصغر المكثفات أي : $C < C_1$ ، $C < C_2$ ، يمكن القول بأن جمع المكثفات على التسلسل يجعل السعة المكافئة تصغر .

- جمع المكثفات على التسلسل يسمح أيضا باستخدام توتر أعلى من التوتر الذي تتحمله كل مكثفة على حدة .
على التفرع :



$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

- السعة المكافئة تكون أكبر السعات أي $C > C_1$ ، $C > C_2$ ، $C > C_3$ ، يمكن القول أن الربط على التفرع يجعل المكثفة المكافئة تكبر .
- جمع المكثفات على التفرع يسمح أيضا باستخدام توتر ضعيف للحصول على شحنة كبيرة لا توفرها كل مكثفة على حدة .

مثال :

- لدينا مجموعة مكثفات متماثلة سعة كل منها $C_1 = 0.2 \text{ mF}$.
- 1- عين طريقة تجميع عدد من هذه المكثفات للحصول على مكثفة مكافئة سعتها 5 mF .
 - 2- حدد عدد المكثفات المستعملة .

الجواب :

- 1- طريقة تجميع المكثفات :
سعة المكثفة المكافئة أكبر من سعة مكثفة واحدة من المكثفات المتماثلة ($C > C_1$) و هذا يتحقق فقط في الربط على التفرع .
- 2- عدد المكثفات المستعملة :
إذا اعتبرنا n هو عدد المكثفات المتتالية يكون :

$$C = \underbrace{C_1 + C_1 + \dots\dots\dots C_1}_{n \text{ مرة}}$$

$$C = nC_1 \rightarrow n = \frac{C}{C_1}$$

$$n = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0.2 \cdot 10^{-3}} = 25$$

• آلية شحن و تفريغ مكثفة :

نحقق الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل) و المتكونة من : مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R ، مقياس غلفاني (G) و هو مقياس أمبير حساس جدا ، بادلة .

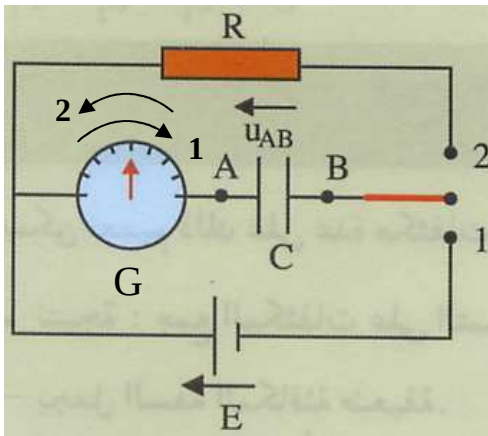
شحن المكثفة :

- عند وضع البادلة في الوضع (1) ينحرف مؤشر المقياس الغلفاني في الاتجاه (1) ثم يعود إلى الصفر ، يدل ذلك على مرور تيار كهربائي لفترة وجيزة ثم انقطع .

- التفسير المجري لما حدث أثناء هو انتقال للإلكترونات من اللبوس A نحو اللبوس B عبر دارة المولد ، و بسبب العازل في المكثفة يحدث تراكم لهذه الإلكترونات في اللبوس B فيشحن هذا الأخير سلبيًا في حين يشحن اللبوس A إيجابًا ، و عندما تنتقل كل الإلكترونات من اللبوس A إلى اللبوس B يتوقف سير الإلكترونات و ينقطع التيار الكهربائي

تفريغ المكثفة :

- عند وضع البادلة في الوضع (2) ، نلاحظ انحراف مؤشر المقياس الغلفاني في الاتجاه (2) ثم يعود إلى الصفر ، يدل ذلك على مرور تيار كهربائي لفترة وجيزة ثم انعدم .
- التفسير المجري لما حدث هو أن الإلكترونات المتراكمة في اللبوس B و التي أتت من اللبوس A أثناء الشحن ، تعود إلى ما كانت عليه إلى اللبوس A حتى يصبح اللبوسين A ، B معتدلين كهربائياً من جديد و عندها يتوقف سير



الالكترونات و ينقطع التيار الكهربائي ، و يفسر الاختلاف في جهة انحراف المؤشر بجهة تيار التفريغ التي تكون معاكسة لجهة تيار الشحن .

ملاحظة :

إن الشحنة الكهربائية الكلية للمكتفة معدومة في كل لحظة لأن المكتفة المشحونة تحمل على لبوسها شحنتين كهربائيتين متساويتين في القيمة و متعاكستين في الإشارة ، لذا عندما نتكلم عن شحنة المكتفة نقصد بها الشحنة الموجودة على إحدى اللبوسين .

بعض خواص الدالتن اللوغارتمية و الأسية

• تذكير ببعض خواص الدالة اللوغارتمية و الأسية :

- $\ln(A.B) = \ln A + \ln B$
- $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$
- $\ln\left(\frac{1}{A}\right) = -\ln A$
- $\ln(A^n) = n.\ln A$

- $e^{A+B} = e^A . e^B$
- $e^{A-B} = \frac{e^A}{e^B}$
- $e^{-A} = \frac{1}{e^A}$
- $(e^{f(x)})' = f'(x) . e^{f(x)}$

- $A = B \Leftrightarrow \ln A = \ln B$
- $A = B \Leftrightarrow e^A = e^B$
- $\ln e^x = x$
- $e^{\ln x} = x$

حل المعادلات :

- $e^x = a \rightarrow \ln e^x = \ln a \rightarrow x = \ln a$
- $\ln x = a \rightarrow e^{\ln x} = e^a \rightarrow x = e^a$



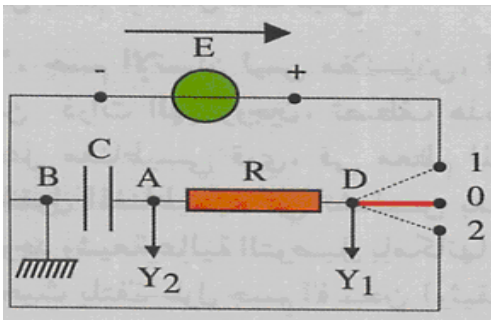
$$\ln 1 = 0 , \ln 2 = 0.69 , e^2 = 7.39 , e^{-2} = 0.13$$

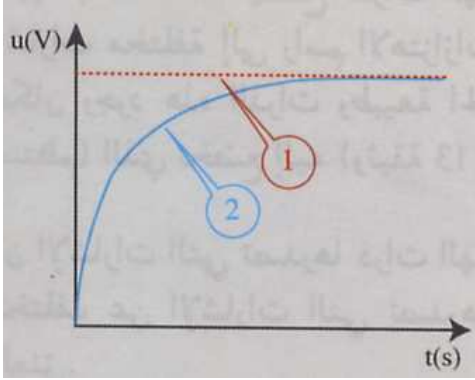
أمثلة :

3 - تطور التوتر بين طرفي مكتفة

• الدراسة التجريبية :

نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل و المكونة من العناصر التالية : مولد توتر ثابت قوته المحركة الكهربائية E، مكتفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R ، راسم اهتزاز ذو ذاكرة ، بادلة .



عند الشحن :

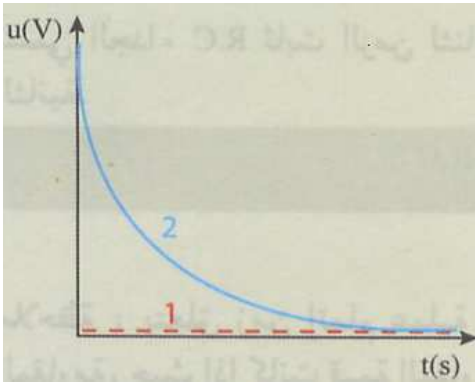
- عندما نضع البادلة في الوضع (1) تشحن المكثفة و يظهر على شاشة راسم الاهتزاز المنحنيين (1) و (2) كما في الشكل التالي :

- المنحنيين الذين يظهران على شاشة راسم الاهتزاز ، أحدهما يمثل تطور التوتر u_{DB} بين طرفي المولد ، و الثاني يمثل تطور التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة .

- بما أن التوتر بين طرفي المولد ثابت (مولد توتر) ، من المؤكد أن المنحنى (1) يمثل تطور التوتر بين طرفي المولد u_{DB} ، و من ثم يمثل المنحنى (2) تطور التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة .

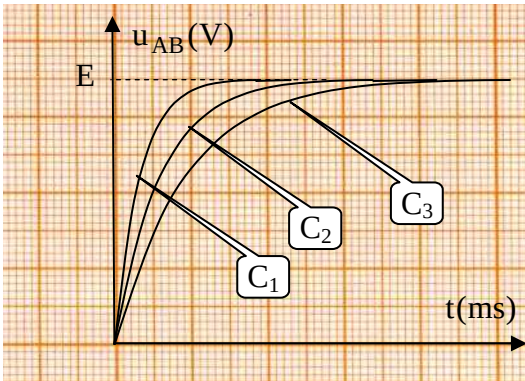
- من المنحنى (2) ، نلاحظ أن التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة يزداد خلال عملية الشحن حتى يصل إلى قيمة ثابتة تساوي E عند نهاية عملية الشحن و يثبت عندها .

- تسمى المرحلة التي يزداد التوتر u_{AB} بالنظام الانتقالي و المرحلة التي يثبت فيها هذا التوتر بالنظام الدائم .

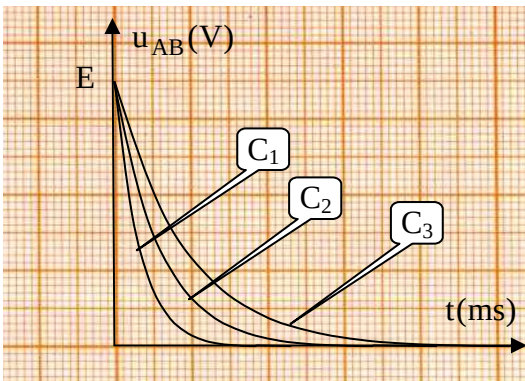
عند التفريغ :

- عندما نضع البادلة في الوضع (2) يظهر على شاشة راسم الاهتزاز المنحنيين (1) ، (2) المبيينين في الشكل التالي :

- يمثل المنحنى (1) التوتر u_{DB} بين طرفي المولد و هو منعدم لأن المولد خارج الدارة ، بينما يمثل المنحنى (2) التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة حيث يتناقص هذا التوتر تدريجيا خلال عملية التفريغ (نظام انتقالي) حتى يصل إلى قيمة معدومة يثبت عندها (نظام دائم) .

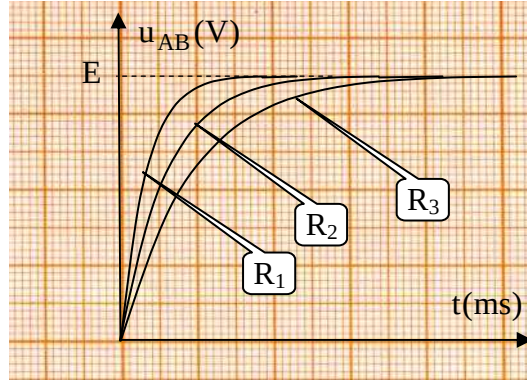
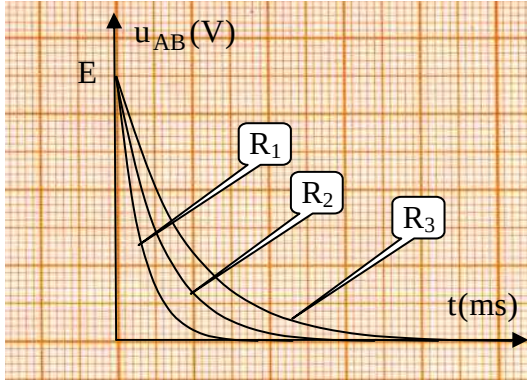
• ثابت الزمن للدارة (R , C) :

- عندما نعيد الدراسة التجريبية السابقة 3 مرات باستعمال نفس الناقل الأومي و مكثفات ذات سعات مختلفة $C_1 = C$ ، $C_2 = 2C$ ، $C_3 = 3C$ ، ثم ندون المنحنيات $u_{AB}(t)$ المتحصل عليها بواسطة راسم الاهتزاز في بيان واحد نحصل على ما يلي :



- من المنحنيات المتحصل عليها نلاحظ أن زمن اتمام الشحن يزداد بازدياد سعة المكثفة ، و بالمثل فإن زمن إتمام التفريغ في حالة تفريغ المكثفة يزداد أيضا بازدياد سعة المكثفة ، و تكون المنحنيات كما يلي :

- عندما نعيد الدراسة التجريبية السابقة 3 مرات باستعمال نفس المكثفة و مقاومات مختلفة $R_1 = R$ ، $R_2 = 2R$ ، $R_3 = 3R$ ، نلاحظ أن زمن اتمام الشحن و التفريغ يزداد بازدياد المقاومة R ، و تكون المنحنيات التي تظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي كما يلي :

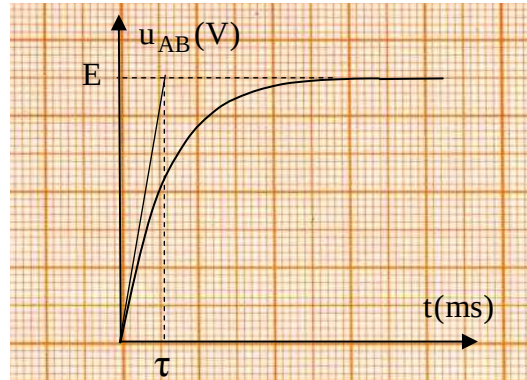
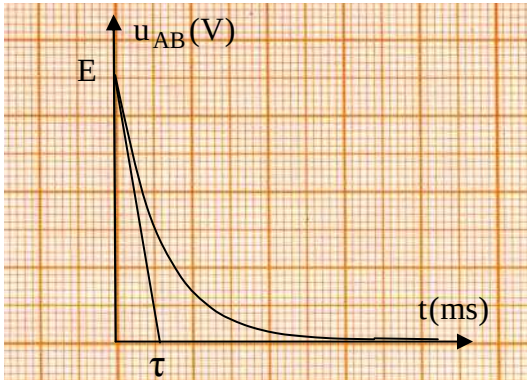


نتيجة :

- زمن إتمام الشحن و التفريغ يزداد بازدياد المقاومة و بازدياد سعة المكثفة ، فهو يزداد بازدياد الجداء $R.C$.
- المقدار $R.C$ هو ثابت يميز الدارة (R,C) يدعى ثابت الزمن لهذه الدارة ، يرمز له بـ τ و وحدته الثانية و نكتب :

$$\tau = R . C$$

- يمكن إثبات أن زمن اتمام الشحن و زمن اتمام التفريغ هو $t = 5\tau$ ، و بالتالي يمكن القول أن ثابت الزمن τ يمثل خمس (20%) من زمن اتمام الشحن أو زمن اتمام التفريغ .
- نحصل على قيمة ثابت الزمن τ من البيان $u_{AB} = f(t)$ المعبر عن تغيرات التوتر بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن ، من خلال تقاطع مماس منحنى هذا البيان عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_{AB} = E$ في حالة الشحن و مع محور الأزمنة في حالة التفريغ ، كما مبين في الشكل التالي :



• الدراسة النظرية :

■ المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة :

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{DA} + u_{AB} = u_{DB}$$

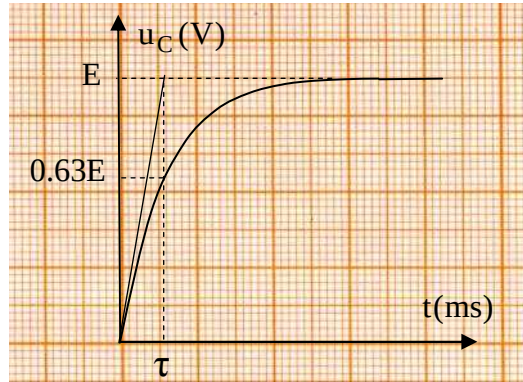
$$R i + u_C = E \rightarrow R \frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C = E \rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، حلها :

$$u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$$

حيث $\tau = RC$ هو ثابت الزمن للدارة RC .
- لتحديد قيمة τ يمكن إتباع طريقتين :



الطريقة الأولى :

من نقطة تقاطع مماس المنحنى $u_C(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_C = E$ (الشكل) .

الطريقة الثانية :

من العبارة الزمنية $u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$ ، نحسب قيمة التوتر u_C بين طرفي المكثفة عند اللحظة $t = \tau$ فنجد $u_C = 0.63E$ ، ثم نقوم بإسقاط النتيجة المتحصل عليها في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار (الشكل) .

■ عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$$

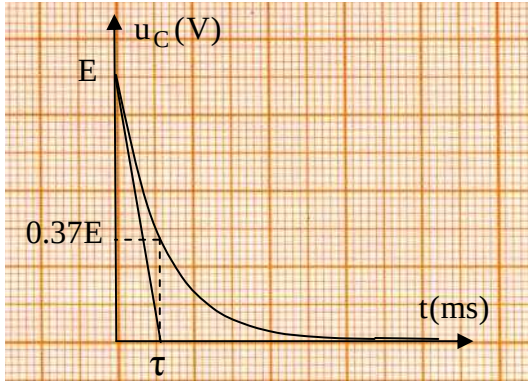
$$0 = R i + u_C \rightarrow R \frac{dq}{dt} + u_C = 0 \rightarrow R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C = 0 \rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ، حلها دون برهان كما يلي :

$$u_C = E e^{-\frac{1}{RC} t} = E e^{-t/\tau}$$

حيث $\tau = RC$ هو ثابت الزمن للدارة RC .
- لتحديد قيمة τ يمكن إتباع طريقتين :



الطريقة الأولى :

من نقطة تقاطع مماس المنحنى $u_C(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع محور الأزمنة (الشكل).

الطريقة الثانية :

من العبارة الزمنية $u_C = E e^{-t/\tau}$ ، نحسب قيمة التوتر u_C بين طرفي المكثفة عند اللحظة $t = \tau$ فنجد $u_C = 0.37 E$ ، ثم نقوم بإسقاط النتيجة المتحصل عليها في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار (الشكل).

4- طاقة مكثفة

• الطاقة المخزنة في مكثفة :

■ العبارة العامة :

- عندما تشحن المكثفة تخزن في لحظة t أثناء شحنها طاقة كهربائية يعبر عنها بالعلاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

و من ثم يمكن كتابة العبارة التالية :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q u_C$$

حيث : u_C ، q هي التوتر و الشحنة عند اللحظة t .

- في اللحظة t من تفريغ المكثفة تقدم المكثفة للدائرة كهربائية يعبر عن بالعلاقة :

$$E_{(C)lib} = E_{(C)0} - E_{(C)}$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الابتدائية عند $t = 0$.

■ العبارة اللحظية :

عند الشحن :

عند شحن المكثفة لدينا :

$$u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$$

و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C (E (1 - e^{-t/\tau}))^2$$

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 = E_{(C)0} (1 - e^{-t/\tau})^2$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .
عند التفريغ :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

عند تفريغ المكثفة لدينا :

$$u_C = E e^{-t/\tau}$$

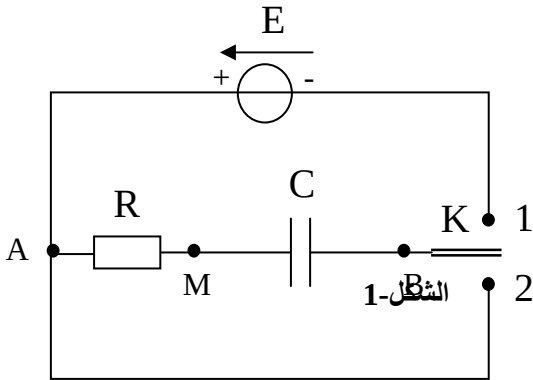
و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C (E e^{-t/\tau})^2$$

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} = E_{(C)0} e^{-2t/\tau}$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .

التمرين (2) : (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)



نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) المقابل و التي تتألف من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E ،

مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته $R = 100 \Omega$.

1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية الشحن .

أ- بين ماذا يحدث على المستوى المجهرى .

ب- بين على الدارة كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي حتى نحصل على المنحنى الممثل لتطور التوتر u_C بين طرفي المكثفة .

ج- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

د- بين أن العبارة $u_C = E (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$ هو حل لهذه المعادلة .

هـ- أرسم بشكل كيفي المنحنى $u_C(t)$ مبينا عليه كيفية تحديد τ .

و- قارن بين قيمة التوتر u_C في اللحظة $t = 5\tau$ و E . ماذا تستنتج ؟

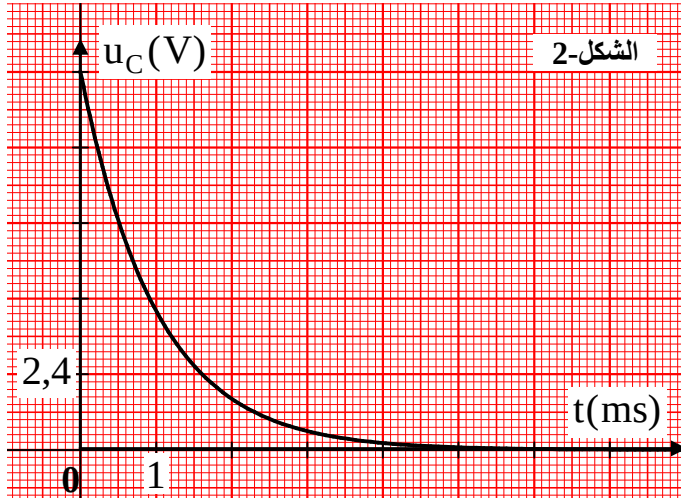
ي- ما هو المدلول الفيزيائي لثابت الزمن τ . بين بالتحليل البعدي أنه متجانس مع الزمن .

2- نضع البادلة في الوضع (2) ، فتبدأ عملية التفريغ :

أ- بين ماذا يحدث على المستوى المجهرى .

ب- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C = f(t)$ بين طرفي المكثفة .

ج- حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل $u_C = E e^{-\frac{t}{A}}$ ، حيث A هو ثابت يطلب التعبير عنه .



الشكل-2

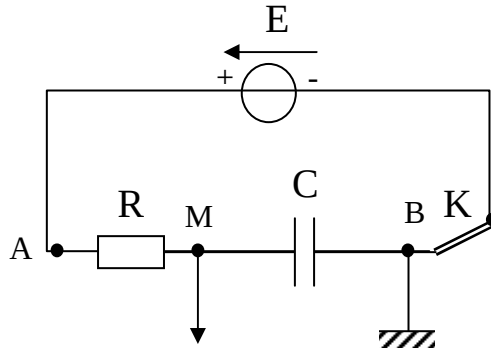
- د- الدراسة التجريبية لتطور التوتر بين طرفي المكثفة أعطت بيان (الشكل-2) :
- اعتمادا على البيان أوجد :
 - القوة المحركة للمولد E .
 - ثابت الزمن τ .
 - سعة المكثفة C .
 - طاقة المكثفة الأعظمية $E_{(C)0}$.

الأجوبة :

1- أ- ما يحدث على المستوى المجهرى :

عندما توضع البادلة في الوضع (1) تشحن المكثفة و على المستوى المجهرى يعمل المولد على نقل الإلكترونات من اللبوس M إلى اللبوس B عبر دارة المولد ، حيث تتراكم الإلكترونات عند هذا اللبوس بسبب وجود العازل .

ب- كيفية وصل الدارة براسم الإهتزاز المهبطي حتى نحصل على المنحنى u_{AB} :



ج- المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$$

$$E = R i + u_C$$

$$R \frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C = E \rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

د- التحقق من الحل :

لدينا :

$$u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

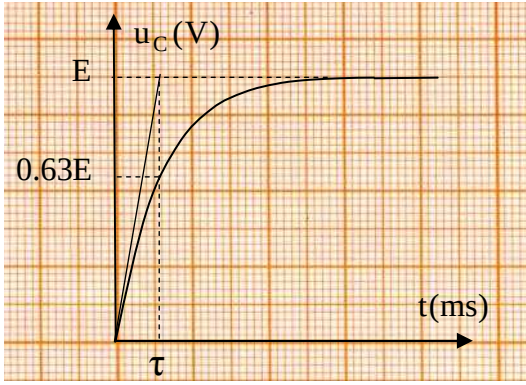
$$\frac{du_C}{dt} = E(0 - (-\frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t})) = \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC} (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{E}{R} = \frac{E}{RC}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .



هـ- المنحنى $u_C(t)$:
لدينا معادلة المنحنى :

$$u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$$

- $t = 0 \rightarrow u_C = 0$
- $t = \infty \rightarrow u_C = E$
- $t = \tau \rightarrow u_C = 0.63E$

و- المقارنة بين u_C عند اللحظة $t = 5\tau$ و E :
لدينا :

بتعويض $t = 5\tau$ نجد :

$$u_{C(t=5\tau)} = E (1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}) = E \underbrace{(1 - e^{-5})}_{0.99} \rightarrow u_{C(t=5\tau)} = E$$

نستنتج أن عملية الشحن ، تنتهي عند اللحظة $t = 5\tau$.
ي- المدلول الفيزيائي :

ثابت الزمن هو الزمن اللازم لشحن المكثفة بنسبة 63% أو الزمن اللازم لتفريغ المكثفة إلى نسبة 37% ، كما يمثل خمس (أو 20%) من زمن إتمام الشحن أو التفريغ .

▪ إثبات أن τ متجانس مع الزمن :

$$[\tau] = [R][C]$$

لدينا :

$$u_R = R.i \rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$$

$$u_C = \frac{q}{c} \rightarrow [U] = \frac{[Q]}{[C]} \rightarrow [C] = \frac{[Q]}{[U]}$$

و منه يصبح :

$$[\tau] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]}$$

- لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow [I] = \frac{[Q]}{[T]} \rightarrow [Q] = [I][T] \rightarrow [\tau] = \frac{[I][T]}{[I]} \rightarrow [\tau] = [T] = s$$

إذن τ متجانس مع الزمن .

2- أ- ما يحدث على المستوى المجهري :

عند وضع البادلة في الوضع (2) تتفرغ المكثفة و على المستوى المجهري تعود الإلكترونات المتراكمة عند اللبوس B و التي أتت من اللبوس M أثناء عملية الشحن ، إلى وضعها الأصلي عند اللبوس M عبر دائرة المقاومة .

ب- المعادلة التفاضلية بدلالة u_C :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$$

$$0 = R i + u_C$$

$$R \frac{dq}{dt} + u_C = 0 \rightarrow R \frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = 0 \rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

ج - عبارة A :
لدينا :

$$\begin{aligned} \bullet u_C &= E e^{-\frac{t}{A}} \\ \bullet \frac{du_C}{dt} &= -\frac{E}{A} e^{-\frac{t}{A}} \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{E}{A} e^{-\frac{t}{A}} + \frac{1}{RC} . E e^{-\frac{t}{A}} = 0 \rightarrow \left(-\frac{E}{A} + \frac{E}{RC}\right) e^{-\frac{t}{A}} = 0$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$-\frac{E}{A} + \frac{E}{RC} = 0 \rightarrow \frac{E}{A} = \frac{E}{RC} \rightarrow A = RC$$

د- قيمة E :

- من البيان :

$$t = 0 \rightarrow u_C = 2.4 \cdot 5 = 12V$$

و من معادلة المنحنى : $u_C = E e^{-t/\tau}$ يكون :

$$t = 0 \rightarrow u_C = E$$

إذن : $E = 12 V$.

■ قيمة τ :

$$t = \tau \rightarrow u_C = 0.37 E \rightarrow u_C = 0.37 \cdot 12 = 4.44 V$$

بالقسمة على السلم (2.4V) نجد : 1.85 cm بإسقاط نجد : $\tau = 1 ms$.

■ قيمة C :

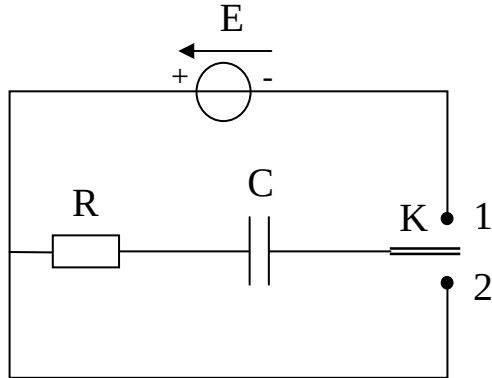
$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} \rightarrow C = \frac{10^{-3}}{100} = 10^{-5} F$$

■ طاقة المكثفة الأعظمية $E_{(C)0}$:

$$E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2 \rightarrow E_{(C)0} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} (12)^2 = 7,2 \cdot 10^{-4} J$$

التمرين (3) : (التمرين : 007 في بنك التمارين على الموقع)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في الشكل المقابل و التي تتألف مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R .



1- أكتب العبارات اللحظية للمقادير التالية في حالة الشحن و التفريغ ، مع

رسم المنحنيات الموافقة بشكل كيفي :

أ- شدة التيار الكهربائي المار في الدارة $i(t)$.

ب- شحنة المكثفة $q(t)$.

ج- التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي .

د- طاقة المكثفة $E_C(t)$. .

2- أكتب المعادلة التفاضلية في الحالات التالية عند الشحن و التفريغ .

أ- بدلالة شحنة المكثفة $q(t)$ المار بالدارة .

ب- بدلالة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار بالدارة .

ج- بدلالة التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي .

الأجوبة :

1-أ- العبارة اللحظية لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة :

عند الشحن :

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C u_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

عند الشحن لدينا :

$$u_C = E (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$\frac{du_C}{dt} = E (0 - (-\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t})) = \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

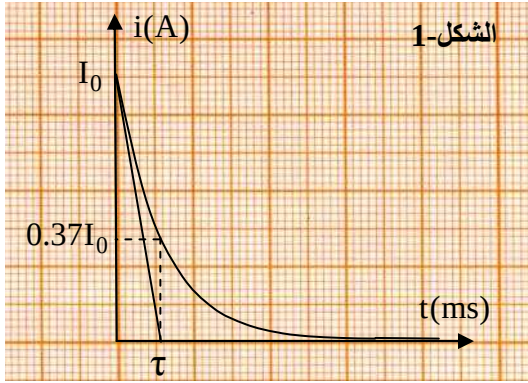
و منه تصبح عبارة شدة التيار :

$$i = C (\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = I_0 e^{-t/\tau}$$

حيث $I_0 = \frac{E}{R}$ هي الشدة العظمى للتيار الكهربائي .

بيانيا :



$$\square t = 0 \rightarrow i = I_0$$

$$\square t = \infty \rightarrow i = 0$$

$$\square t = \tau \rightarrow i = 0.37 I_0$$

و منه المنحنى $i(t)$ الممثل لتطور شدة التيار المار بالدائرة عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-1) .

عند التفريغ :

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C u_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

عند التفريغ لدينا :

$$\square u_C = E e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$\square \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

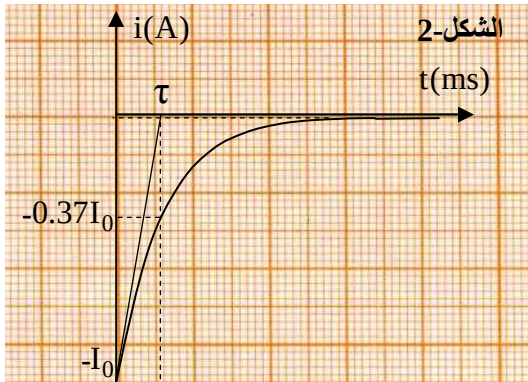
$$i = C \left(-\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$$

و منه تصبح عبارة شدة التيار :

$$i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = -I_0 e^{-t/\tau}$$

حيث $I_0 = \frac{E}{R}$ هي الشدة العظمى للتيار الكهربائي .

بيانيا :



$$\square t = 0 \rightarrow i = -I_0$$

$$\square t = \infty \rightarrow i = 0$$

$$\square t = \tau \rightarrow i = -0.37 I_0$$

و منه المنحنى $i(t)$ الممثل لتطور شدة التيار المار بالدائرة تفريغ المكثفة يكون كما في (الشكل-2) .

ب- العبارة اللحظة شحنة المكثفة $q(t)$:

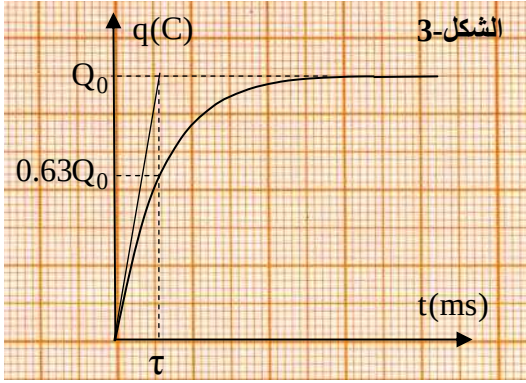
عند الشحن :

لدينا : $q = C u_C$ و عند الشحن لدينا $u_C = E (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$ ، بالتعويض نجد :

$$q = CE(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = Q_0(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

حيث $Q_0 = CE$ هي شحنة المكثفة الأعظمية .

بيانيا :



- $t = 0 \rightarrow q = 0$
- $t = \infty \rightarrow q = Q_0$
- $t = \tau \rightarrow q = 0.63 Q_0$

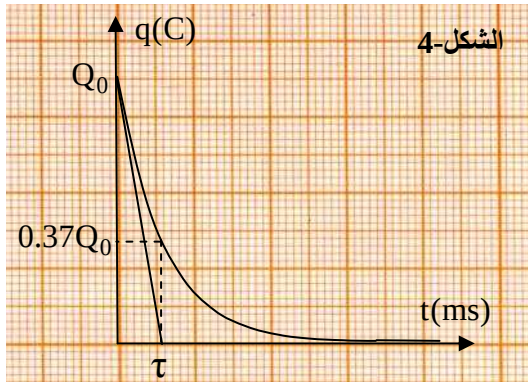
و منه المنحنى $q(t)$ الممثل لتطور شحنة المكثفة عند شحن المكثفة يكون كما في (الشكل-3).

عند التفريغ :

لدينا : $q = Cu_C$

عند التفريغ لدينا $u_C = Ee^{-\frac{t}{RC}}$ ، بالتعويض نجد :

$$q = CEe^{-\frac{1}{RC}t} = Q_0e^{-\frac{1}{RC}t}$$



حيث $Q_0 = CE$ هي شحنة المكثفة الأعظمية :
بيانيا :

- $t = 0 \rightarrow q = Q_0$
- $t = \infty \rightarrow q = 0$
- $t = \tau \rightarrow q = 0,37 Q_0$

و منه المنحنى $q(t)$ الممثل لتطور شحنة المكثفة عند فتح القاطعة يكون في (الشكل-4).

جـ- العبارة اللحظية للتوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي :

عند الشحن :

الطريقة الأولى :

لدينا :

$$u_R = R.i = R \frac{dq}{dt} = R \frac{d(C u_C)}{dt} = RC \frac{du_C}{dt}$$

عند الشحن :

$$u_C = E (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$\frac{du_C}{dt} = E (0 - (-\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t})) = \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

و منه تصبح عبارة $u_R(t)$:

$$u_R = RC (\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$u_R = E e^{-\frac{1}{RC}t} = E e^{-t/\tau}$$

الطريقة الثانية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E \rightarrow u_R = E - u_C$$

عند الشحن لدينا :

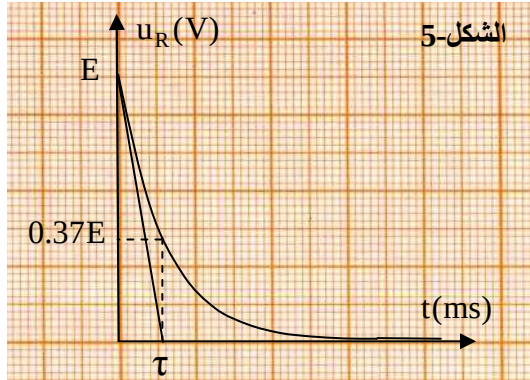
$$u_C = E (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

و منه يصبح :

$$u_R = E - E (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \rightarrow u_R = E - E + E e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_R = E e^{-\frac{1}{RC}t} = E e^{-t/\tau}$$

بيانيا :



$$\square t = 0 \rightarrow u_R = E$$

$$\square t = \infty \rightarrow u_R = 0$$

$$\square t = \tau \rightarrow u_R = 0.37 E$$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند شحن المكثفة يكون في (الشكل-5) .عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = 0$$

$$u_R = -u_C$$

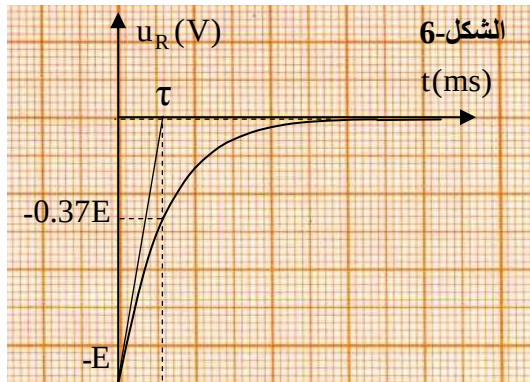
عند التفريغ لدينا :

$$u_C = E e^{-\frac{1}{RC}t}$$

و منه يصبح :

$$u_R = -E e^{-\frac{1}{RC}t} = -E e^{-t/\tau}$$

بيانيا :



$$\square t = 0 \rightarrow u_R = -E$$

$$\square t = \infty \rightarrow i = 0$$

$$\square t = \tau \rightarrow i = -0.37 E$$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-6) .

د- العبارة اللحظة لطاقة المكثفة $E_{(C)}(t)$:
عند الشحن :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

عند شحن المكثفة لدينا :

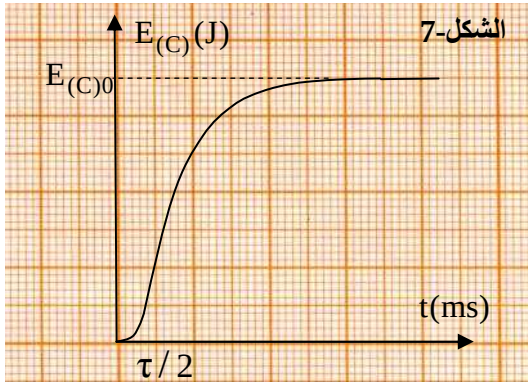
$$u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$$

و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C (E (1 - e^{-t/\tau}))^2$$

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 = E_{(C)0} (1 - e^{-t/\tau})^2$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .
- بيانها :



$$t = 0 \rightarrow E_{(C)} = 0$$

$$t = \infty \rightarrow E_{(C)} = E_{(C)0}$$

و منه المنحنى $E_{(C)}(t)$ الممثل لتطور طاقة المكثفة عند الشحن يكون كما في (الشكل-7) .
عند التفريغ :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

عند تفريغ المكثفة لدينا :

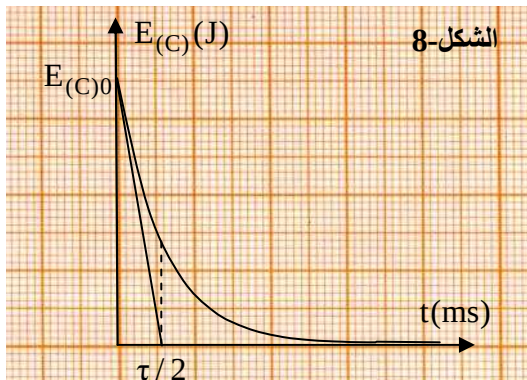
$$u_C = E e^{-t/\tau}$$

و منه تصبح عبارة الطاقة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C (E e^{-t/\tau})^2$$

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} = E_{(C)0} e^{-2t/\tau}$$

حيث $E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2$ هي طاقة المكثفة الأعظمية .
- بيانها :



$$t = 0 \rightarrow E_{(C)} = E_{(C)0}$$

$$t = \infty \rightarrow E_{(C)} = 0$$

و منه المنحنى $E_{(C)}(t)$ الممثل لتطور طاقة المكثفة عند التفريغ يكون كما في (الشكل-8) .

2-أ. المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$R i + u_C = E \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R}$$

■ عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = 0$$

$$R i + u_C = 0 \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$$

ب- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$:

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$R i + u_C = E \rightarrow R i + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

لدينا : $\frac{dq}{dt} = i$ و منه :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$$

■ عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = 0$$

$$R i + u_C = 0 \rightarrow R i + \frac{q}{C} = 0$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$$

جـ- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_R(t)$:

- عند الشحن :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E \rightarrow u_R + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

و نعلم أن : $\frac{dq}{dt} = i$ و منه يصبح :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

لدينا :

$$u_R = R.i \rightarrow i = \frac{u_R}{R}$$

يصبح :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0$$

- عند التفريغ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$$

$$0 = u_R + u_C \rightarrow u_R + \frac{q}{C} = 0$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

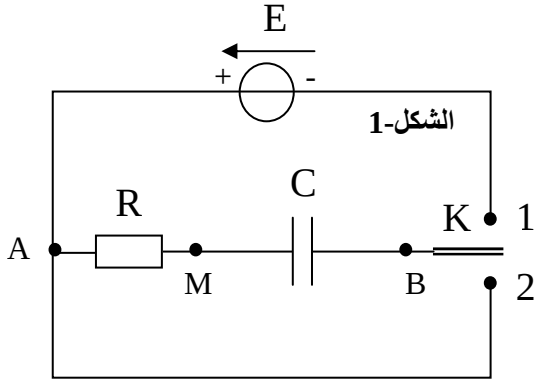
$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

لدينا :

$$u_R = R.i \rightarrow i = \frac{u_R}{R}$$

يصبح :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0$$

التمرين (4) : (التمرين : 008 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) و التي تتألف من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 12 \text{ V}$ ، مكثفة غير مشحونة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R .

1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية الشحن . أ- أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة شحنة المكثفة $q(t)$.

ب- أثبت أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو $q = A + Be^{-\alpha t}$ حيث A و B و α ثوابت يطلب كتابة عباراتها .

ج- بتطبيق قانون جمع التوترات ، أثبت أن شدة التيار الأعظمية يعبر

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

د- عند نهاية الشحن تبلغ طاقة المكثفة قيمة أعظمية $E_{(C)0}$ ، عبر عنها بدلالة E ، C .

هـ- منحنى (الشكل-2) يمثل تغيرات شحنة المكثفة q بدلالة الزمن .

اعتمادا على هذا البيان أوجد :

• سعة المكثفة C .

• ثابت الزمن τ .

• مقاومة الناقل الأومي R .

• شدة التيار الأعظمية I_0 .

• طاقة المكثفة في النظام الدائم .

2- نضع البادلة في الوضع (2) :

أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة شحنة المكثفة $q = f(t)$ مبينا حلها دون برهان .

ب- نعتبر المكثفة تفرغت من شحنتها تماما عندما تصبح شحنتها تساوي 1% من شحنتها الأعظمية ، عبر عن الزمن اللازم لتفريغ المكثفة بدلالة ثابت الزمن τ ، ثم احسب قيمته .

الاجوبة :

1- أ- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$$

$$E = Ri + \frac{q}{C} \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E \rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R}$$

ب- إثبات أن $q = Q_0 (1 - e^{-t/\tau})$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$q = A + Be^{-\alpha t}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\alpha Be^{-\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\alpha Be^{-\alpha t} + \frac{1}{RC} (A + Be^{-\alpha t}) = \frac{E}{R}$$

$$-\alpha Be^{-\alpha t} + \frac{A}{RC} + \frac{B}{RC} e^{-\alpha t} = \frac{E}{R}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$-\alpha + \frac{B}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{B}{RC}$$

$$\frac{B}{RC} = \frac{E}{R} \rightarrow B = EC$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow q = 0$$

بالتعويض في العلاقة $q = A + Be^{-\alpha t}$:

$$0 = A + B \rightarrow A = -B = -EC$$

ج- إثبات أن شدة التيار الأعظمية يعبر عنها بالعلاقة $I_0 = \frac{E}{R}$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R(t)} + u_{C(t)} = E$$

$$Ri(t) + U_{C(t)} = E$$

- عند اللحظة $t = 0$ المكثفة غير مشحونة و يكون : $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$RI_0 = E \rightarrow I_0 = \frac{E}{R}$$

د- عبارة طاقة المكثفة الأعظمية $E_{(C)0}$ بدلالة E ، C :

- في لحظة t أثناء الشحن تخزن المكثفة طاقة يعبر عنها بالعلاقة : $E_{(C)} = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2$

- تبلغ الطاقة قيمتها الأعظمية في النظام الدائم (نهاية الشحن) أين يكون $u_C = E$ و عليه تكون عبارة الطاقة

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C \cdot E^2$$

هـ- قيمة C :

- من البيان :

$$Q_0 = 4 \cdot 6 \cdot 10^{-5} = 2.4 \cdot 10^{-4} C.$$

و لدينا :

$$Q_0 = EC \rightarrow C = \frac{Q_0}{E} \rightarrow C = \frac{2.4 \cdot 10^{-4}}{12} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

■ قيمة τ :

$$t = \tau \rightarrow q = 0.63Q_0 = 0.63 \cdot 2.4 \cdot 10^{-4} = 1.512 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

بالقسمة على السلم ($6 \cdot 10^{-5}$) نجد : 2.52 cm ، بالإسقاط نجد : $\tau = 2 \text{ ms}$.■ قيمة R :

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{\tau}{C} \rightarrow R = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-5}} = 100 \Omega$$

■ شدة التيار الأعظمية I_0 :

$$I_0 = \frac{E}{R} \rightarrow I_0 = \frac{12}{100} = 0.12 \text{ A}$$

● طاقة المكثفة عند $t = 0$:عند اللحظة $t = 0$ (بداية التفريغ) تكون طاقة المكثفة أعظمية ، و عليه :

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 \rightarrow E_{(C)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-5} (12)^2 = 1.44 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

2- أ- المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{AM} + u_{MB} = 0$$

$$Ri + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها : $q = Q_0 e^{-t/\tau}$ حيث :

$$\tau = RC$$

$$Q_0 = EC$$

ج- الزمن Δt اللازم لتفريغ المكثفة :

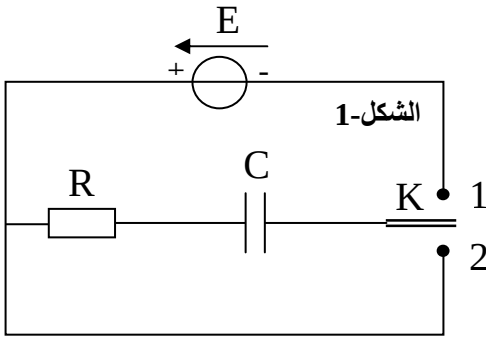
المكثفة تتفرغ من شحنتها تماما عندما تصبح شحنتها تساوي 1% من شحنتها الأعظمية (كما ذكر) ، أي :

$$q = \frac{1}{100}Q_0 \text{ ، بالتعويض في العبارة } q(t) :$$

$$\frac{1}{100}Q_0 = Q_0 e^{-\Delta t/\tau} \rightarrow \frac{1}{100} = e^{-\Delta t/\tau} \rightarrow \ln \frac{1}{100} = -\frac{\Delta t}{\tau}$$

$$-\ln 100 = -\frac{\Delta t}{\tau} \rightarrow \Delta t = -(\ln 100) \cdot \tau \rightarrow \Delta t \approx 5\tau$$

$$\Delta t = 5 \cdot 2 \text{ ms} = 10 \text{ ms}$$

التمرين (5) : (التمرين : 009 في بنك التمارين على الموقع) (**))

تتكون الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 10V$ ، مكثفة سعتها C ، ناقل أومي مقاومته R . نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية الشحن .

1- بين على الشكل جهة التيار الكهربائي المار في الدارة و كذا جهة حاملات الشحن (الإلكترونات) ، ثم مثل بالأسهم التوترين u_R ، u_C .
2- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C = f(t)$ بين طرفي المكثفة .

3- حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $u_C = A(1 - e^{-\frac{t}{B}})$ حيث A و B ثابتين يطلب التعبير عنهما .

4- مثل بشكل كيفي المنحنى $u_C(t)$.

5- على نفس البيان السابق أرسم المنحنى $u_C'(t)$ في الحالتين التاليتين :

▪ لو استبدلنا المكثفة السابقة بمكثفة سعتها $C' = 2C$ و أبقينا على نفس قيمة مقاومة الناقل الأومي R .

▪ لو استبدلنا الناقل الأومي ذو المقاومة R بناقل أومي مقاومته $R' = \frac{R}{2}$ مع الإبقاء على نفس سعة المكثفة C .

6- منحنى (الشكل-2) يمثل تغيرات شدة التيار الكهربائي i بدلالة الزمن .

اعتمادا على هذا البيان أوجد :

أ- مقاومة الناقل الأومي R .

ب- سعة المكثفة C .

8- كيف يتم ربط مكثفة سعتها C' مع المكثفة السابقة لكي يأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau' = 3\tau$ ؟ أحسب قيمة C' .

الأجوبة :

1- جهة التيار و حاملات الشحن و تمثيل u_R ، u_C :

2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$Ri + u_C = E \rightarrow R \frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow$$

$$R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C = E \rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

3- عبارتي A و B :

$$u_C = A(1 - e^{-t/B})$$

$$\frac{du_C}{dt} = A \left(0 - \left(-\frac{1}{B} e^{-t/B} \right) \right) = \frac{A}{B} e^{-t/B}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{A}{B} e^{-t/B} + \frac{A}{RC} (1 - e^{-t/B}) = \frac{E}{RC}$$

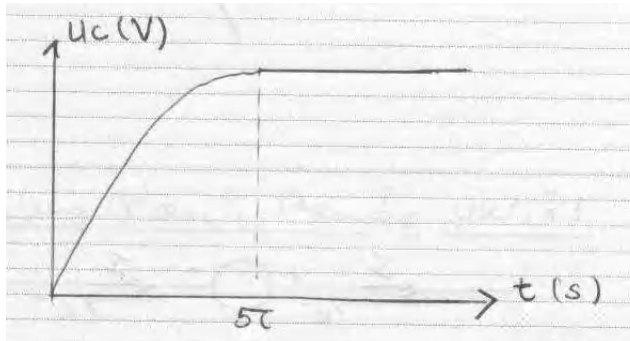
$$\frac{A}{B} e^{-t/B} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC} e^{-t/B} = \frac{E}{RC} \rightarrow \left(\frac{A}{B} - \frac{A}{RC} \right) e^{-t/B} + \frac{A}{RC} = \frac{E}{RC}$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\frac{A}{B} - \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1}{RC} \rightarrow B = RC$$

$$\frac{A}{RC} = \frac{E}{RC} \rightarrow A = E$$

4- تمثيل المنحنى $u_C(t)$:

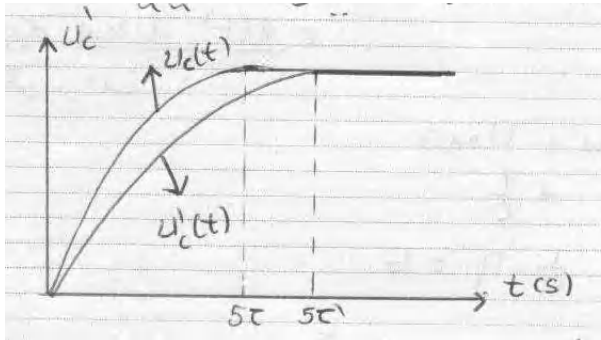


$$u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$$

$$t = 0 \rightarrow u_C = 0$$

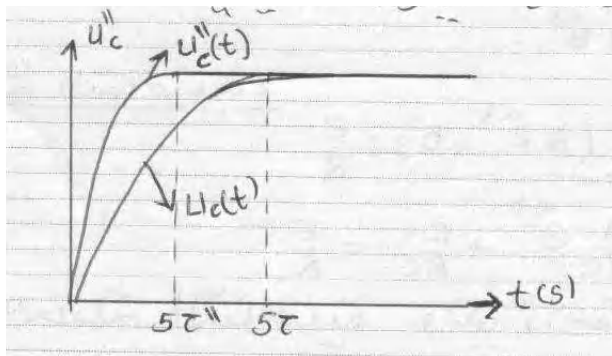
$$t = \infty \rightarrow u_C = E$$

5- المنحنى $u_C'(t)$:



$C' > C$ ← بازدياد سعة المكثفة C مع ثبات مقاومة الناقل الأومي R ، تزداد قيمة ثابت الزمن τ ، و بالتالي يزداد زمن اتمام الشحن 5τ ، و عليه المنحنى $u_C'(t)$ يكون كما يلي :

6- المنحنى $u_C''(t)$:



$R' < R$ ← بنقصان مقاومة الناقل الأومي R مع ثبات سعة المكثفة C ، تنقص قيمة ثابت الزمن τ و بالتالي ينقص زمن اتمام الشحن 5τ و عليه المنحنى $u_C''(t)$ يكون كما يلي :

6- أ- قيمة R :

من البيان :

$$I_0 = 4.5 \cdot 10^{-3} = 0.02 \text{ A}$$

$$\text{و لدينا : } I_0 = \frac{E}{R} \text{ ، إذن :}$$

$$R = \frac{E}{I_0} = \frac{10}{0.02} = 500 \Omega$$

ب- قيمة C :

من البيان $\tau = 1\text{ms}$ و لدينا : $\tau = RC$ ، إذن :

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{10^{-3}}{500} = 2 \cdot 10^{-6} \Omega$$

7- كيفية وصل المكثفة C' مع المكثفة C :

نلاحظ أن :

$$\tau' = 2\tau \rightarrow \tau' > \tau \rightarrow RC_{\text{eq}} > RC \rightarrow C_{\text{eq}} > C$$

و هذا يتحقق عند ربط المكثفة C' على التفرع مع المكثفة C لأن :

$$C_{\text{eq}} = C + C' \rightarrow C_{\text{eq}} > C$$

قيمة C' :

نحسب أولا السعة المكافئة C_{eq} :

$$\tau' = 3\tau = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\tau' = RC_{\text{eq}} \rightarrow C_{\text{eq}} = \frac{\tau'}{R} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{500} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

المكثفتين C ، C' موصولتين على التفرع لذا :

$$C_{\text{eq}} = C + C' \rightarrow C' = C_{\text{eq}} - C$$

$$C' = 6 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

التمرين (6) : (التمرين : 074 في بنك التمارين على الموقع) (**)

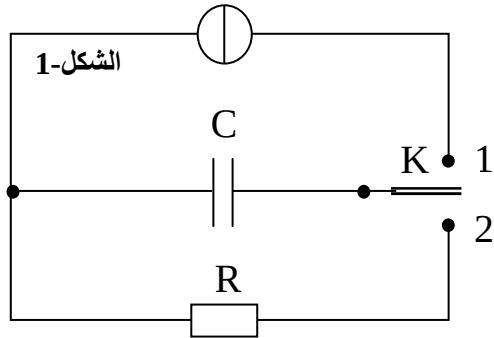
في حصة الأعمال المخبرية ، اقترح الأستاذ على تلاميذه مخطط الدارة الممثل في (الشكل-1) لدراسة ثنائي القطب RC . تتكون الدارة من العناصر التالية :

- مولد التيار يعطي تيار ثابت شدته $I = 10 \text{ mA}$.

- مكثفة (غير مشحونة) سعتها C .

- ناقل أومي مقاومته R .

- بادلة K مقاومتها مهملة .



1- نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية شحن

المكثفة ، بواسطة جهاز ExAO تمكنا من مشاهدة المنحنى البياني الممثل

لتطور التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن t (الشكل-2- أ) .

أ- أكتب عبارة التوتر u_C بدلالة الزمن t و سعة المكثفة C و شدة التيار I

الذي يجريه المولد في الدارة .

ب- اعتمادا على (الشكل-2- أ) ، بين أن $C = 10^{-5} \text{ F}$ ثم أحسب طاقة المكثفة الأعظمية $E_{C\text{max}}$.

2- نضع البادلة K في الوضع (2) في لحظة نعتبرها من جديد $t = 0$ ، فيتم تفريغ المكثفة في الناقل الأومي ، سمح

جهاز ExAO من متابعة تطور التوتر الكهربائي u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن t . بواسطة برمجية تمكنا من

الحصول على المنحنى البياني (الشكل-2- ب) .

أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

ب- حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $u_C = Ae^{-t/B}$ ، عبر عن A و B بدلالة المقادير المميزة للدارة ، بين

أن الثابت B متجانس مع الزمن .

ج- اعتمادا على منحنى (الشكل-2- ب) عين قيمة ثابت الزمن τ ثم أحسب مقاومة الناقل الأومي R .

3- أ- أكتب العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في المكثفة $E_C(t)$ بدلالة الزمن t و ثابت الزمن τ و طاقة المكثفة

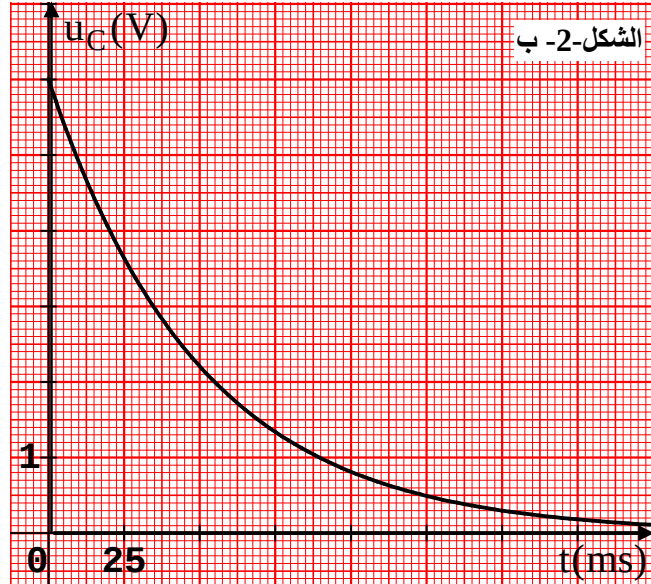
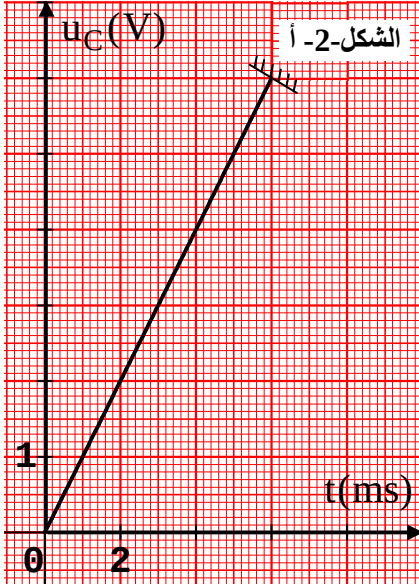
الأعظمية E_{C0} .

ب- في أي لحظة يكون $E_C = \frac{E_{C0}}{e^2}$ حيث E_{C0} هي طاقة المكثفة الأعظمية و e هو أساس اللوغاريتم النيبيري

4- نريد أن نسرع عملية التفريغ ليصبح زمن إتمام التفريغ نصف زمن إتمام التفريغ السابق ، لذلك نصل ناقل أومي آخر مقاومته R' مع الناقل الأومي السابق .

أ- بين كيف يجب ربط هذا الناقل الأومي مع الناقل الأومي R حتى يتم ذلك .

ب- أحسب قيمة المقاومة R' .



الاجوبة :

1- العلاقة النظرية بين U_C و t :

$$U_C = \frac{q}{C}$$

لدينا :

مود التوتّر يعطي تيار شدته ثابتة لذلك يكون :

$$I = \frac{q}{t} \rightarrow q = It$$

$$U_C = \frac{It}{C}$$

يصبح لدينا :

ب- سعة المكثفة من البيان :

- بيانياً المنحنى $U_C(t)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$$U_C = \theta t$$

- نظرياً ومن خلال العلاقة النظرية السابقة

$$U_C = \frac{I}{C} t$$

- بالمطابقة :

$$\frac{I}{C} = \theta \rightarrow C = \frac{I}{\theta}$$

- من البيان :

$$\theta = \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} = 1000$$

$$C = \frac{10 \times 10^{-3}}{1000} = 10^{-5} F$$

اذن :

- طاقة المكثفة الاعظمية E_{cmex} :

$$E_{cmex} = \frac{1}{2} C U_{cmex}^2$$

من البيان $U_{cmex} = 6V$ ومنه :

$$E_{cmex}(C) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} (6)^2 = 1,8 \cdot 10^{-4} J$$

4- الف - المعادلة التفاضلية بدلالة $U_c(t)$:
حسب قانون جمع التؤثرات

$$U_R + U_C = 0$$

$$Ri + U_C = 0$$

$$R \frac{dq}{dt} + U_C = 0$$

$$R \frac{d(CU_C)}{dt} + U_C = 0$$

$$RC \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \rightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0$$

ج - عبارتي A و B :

$$U_C = A e^{-t/B}$$

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{A}{B} e^{-t/B}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$-\frac{A}{B} e^{-t/B} + \frac{1}{RC} A e^{-t/B} = 0$$

$$A e^{-t/B} \left(-\frac{1}{B} + \frac{1}{RC} \right) = 0$$

لكي نتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$-\frac{1}{B} + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow B = RC$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow U_C = U_{cmex}$$

بالتعويض في العبارة $U_C = A e^{-t/B}$ نجد :

$$E = A e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow A = U_{cmex}$$

إثبات أن B متجانس مع الزمن :

$$B = RC \rightarrow [B] = [R][C]$$

$$U_R = Ri \rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$$

$$U_C = \frac{q}{C} \rightarrow [U] = \frac{[q]}{[C]} = \frac{[I][t]}{[C]} \rightarrow [C] = \frac{[I][t]}{[U]}$$

بالتقويض :

$$[B] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{[I][T]}{[U]} \rightarrow [B] = [T]$$

اذن B متجانس مع الزمن

→ قيمة τ :

$$t = \tau \rightarrow U_c = 0,37 U_c = 0,37 \times 6 = 2,22V$$

بالاستقار نجد : $\tau = 50ms$

- قيمة R :

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{\tau}{C}$$

$$R = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{10^{-5}} = 5 \cdot 10^3 \Omega$$

3- عبارة $E_c(t)$ دلالة $t < \tau$ و E_{c0} :

$$E_c = \frac{1}{2} C U_c^2$$

ومنه :

$$U_c = U_{cmax} e^{-t/\tau}$$

$$E_c = \frac{1}{2} C (U_{cmax} e^{-t/\tau})^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} C U_{cmax}^2 e^{-2t/\tau}$$

وكون أن $E_{c0} = \frac{1}{2} C U_{cmax}^2$ يصبح :

$$U_{cmax} = E_{c0} e^{-2t/\tau}$$

الخطوة التي يصبح فيها $E_c = \frac{E_{c0}}{e^2}$ بالتقويض $E_c = \frac{E_{c0}}{e^2}$ و عبارة الطاقة السابقة نجد :

$$\frac{E_{c0}}{e^2} = E_{c0} e^{-2t/\tau}$$

$$\frac{1}{e^2} = e^{-2t/\tau} \rightarrow \ln \frac{1}{e^2} = -\frac{2t}{\tau}$$

$$-\ln e^2 = -\frac{2t}{\tau} \rightarrow \ln e^2 = \frac{2t}{\tau}$$

$$2 = \frac{2t}{\tau} \rightarrow t = \tau = 50ms$$

4- أ- كيفية وصل الناقل الأومي R' :

زمن اتمام الشحن يصبح نصف زمن اتمام الشحن السابق يعني :

$$5\tau' = \frac{5\tau}{2} \rightarrow \tau' = \frac{\tau}{2}$$

$$\tau = RC$$

$$\tau' = R_{eq}C$$

$$\tau' = \frac{\tau}{2} \rightarrow R_{eq}C = \frac{RC}{2} \rightarrow R_{eq} = \frac{R}{2} \rightarrow R_{eq} < R$$

و هذا يتحقق عند ربط الناقل الأومي R' على التفرع مع الناقل الأومي R .

قيمة R' :نحسب R_{eq} :

$$\tau' = \frac{\tau}{2} = \frac{50 \text{ ms}}{2} = 25 \text{ ms}$$

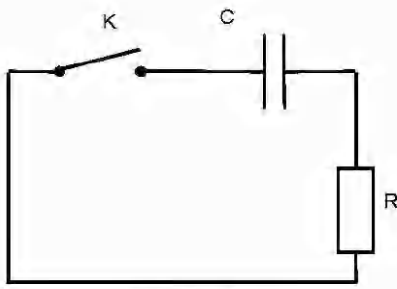
و لدينا :

$$\tau' = R_{eq} C \rightarrow R' = \frac{\tau'}{C} = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{10^{-5}} = 2500 \Omega = 2,5 \cdot 10^3 \Omega$$

لدينا في الربط على التفرع :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{eq}} - \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2,5 \cdot 10^3} - \frac{1}{5 \cdot 10^3} = \frac{2-1}{5 \cdot 10^3} = \frac{1}{5 \cdot 10^3} \rightarrow R' = 5 \cdot 10^3 \Omega$$

التمرين (7) : (بكالوريا 2013 - رياضيات) (التمرين : 050 في بنك التمارين على الموقع) (**)

الشكل -2

مكثفة سعتها C شحنت كلياً تحت توتر كهربائي ثابت : $E = 12V$. لمعرفة سعتها C نحقق الدارة الكهربائية (الشكل-2) ، حيث $R = 1k\Omega$.

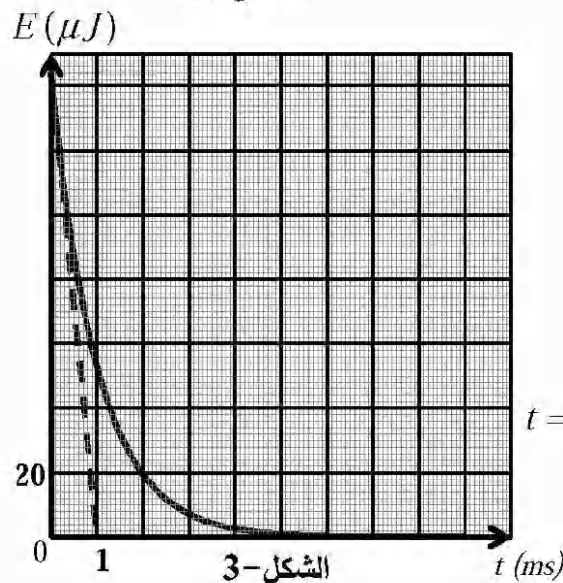
1- نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0 \text{ ms}$.
أ- بتطبيق قانون جمع التوترات ، جد المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

ب- حل المعادلة التفاضلية السابقة يعطى من الشكل : $u_C(t) = Ae^{\alpha t}$ ،

حيث : A و α ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما .

2- أكتب العبارة اللحظية $E_C(t)$ للطاقة المخزنة في المكثفة .

3- (الشكل-3) يمثل تطور $E_C(t)$ ، الطاقة المخزنة في المكثفة بدلالة الزمن . $ukklm$



الشكل -3

أ- استنتج قيمة E_{C0} الطاقة المخزنة العظمى في المكثفة .

- ب- من (الشكل-3) ، بين أن مماس للمنحنى في اللحظة : $t = 0 \text{ ms}$ يقطع محور الأزمنة في اللحظة : $t = \frac{\tau}{2}$.
ج- أحسب τ ثابت الزمن ، ثم استنتج سعة المكثفة C .

4- أثبت أن زمن تناقص الطاقة إلى النصف هو : $t_{1/2} = \frac{\tau}{2} \ln 2$.

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:
حسب قانون جمع التوترات :

$$U_R + U_C = 0$$

$$Ri + U_C = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{لدينا :}$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + U_C = 0 \quad \text{و منه :}$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0$$

ب- عياري A و α :

$$u_C = A e^{\alpha t}$$

$$\frac{du_C}{dt} = A \alpha e^{\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$A \alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC} A e^{\alpha t} = 0$$

$$A \alpha e^{\alpha t} + \frac{A}{RC} e^{\alpha t} = 0$$

$$e^{\alpha t} \left(A \alpha + \frac{A}{RC} \right) = 0$$

الآن المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية ولكي نتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

عند اللحظة $t=0$ (بداية التفرغ) يكون التوتر بين طرفي المكثفة مساوياً لـ E (المعطى) ، بالتعويض في العبارة $u_C(t) = u_C(0)$

$$E = A e^{\alpha(0)} \rightarrow A = E$$

9- العبارة الدخية للطاقة المخزنة في المكثف ؟

$$E_{cc} = \frac{1}{2} C U_c^2$$

عند التفريغ لدينا :

$$U_c = E e^{-t/\tau}$$

$$E_{cc} = \frac{1}{2} C E^2 (e^{-t/\tau})^2$$

ومنه :

$$E_{cc} = \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} = E_{cc0} e^{-2t/\tau}$$

حيث : $E_{cc0} = \frac{1}{2} C E^2$ وهي الطاقة الابتدائية في المكثف .

9- قيمة E_{cc0} :

$$E_{cc0} = 7 \times 20 \times 10^6 = 1,4 \times 10^4 \text{ J}$$

من البيان :

ب- اثبات أن معادلات المنحنى $E_{cc}(t)$ عند $t=0$ يقطع محور الزمن

عند $t = \frac{\tau}{2}$:

نكتب معادلة المماس :

$$E_{cc} = at + b$$

$$b = (E_{cc})_{t=0} = (E_{cc0} e^{-2t/\tau})_{t=0} = E_{cc0}$$

$$a = \left(\frac{dE_{cc}}{dt} \right)_{t=0} =$$

$$E_{cc} = E_{cc0} e^{-2t/\tau} \rightarrow \frac{dE_{cc}}{dt} = \left(\frac{-2E_{cc0}}{\tau} e^{-2t/\tau} \right)_{t=0}$$

$$a = \left(\frac{-2E_{cc0}}{\tau} e^{-2t/\tau} \right)_{t=0} = \frac{-2E_{cc0}}{\tau}$$

اذن :

ومنه تكون معادلة المماس كما يلي :

$$E_{cc} = -\frac{2E_{cc0}}{\tau} t + E_{cc0}$$

عند تقاطع المماس مع محور الزمن يكون $E_{cc}=0$ ومنه

$$0 = -\frac{2E_{cc0}}{\tau} t + E_{cc0}$$

$$\frac{2E_{cc0}}{\tau} t = E_{cc0}$$

$$\frac{2t}{\tau} = 1 \rightarrow t = \frac{\tau}{2}$$

ج- قيمة τ :

من البيان :

$$\frac{\tau}{2} = 10^{-3} \text{ s} \rightarrow \tau = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{2 \times 10^{-3}}{10^3} = 2 \times 10^{-6} \text{ F} = 2 \mu\text{F}$$

4- اثبات أن لدينا :

$$E_{cc}(t) = E_{cc}(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

في $t = t_{r2} \rightarrow E_{cc}(t) = \frac{E_{cc}(0)}{2}$

بالتعويض :

$$\frac{E_{cc}(0)}{2} = E_{cc}(0) e^{-\frac{t_{r2}}{\tau}}$$

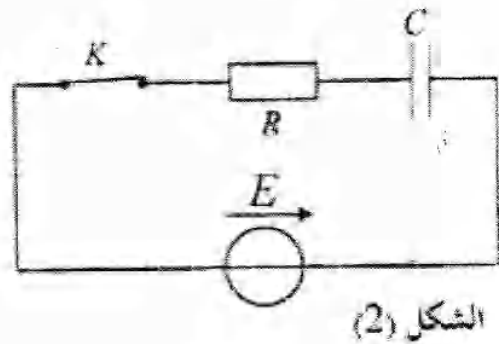
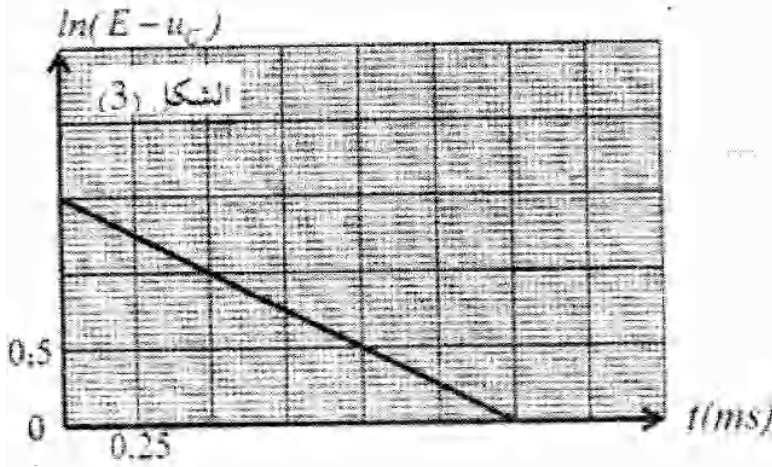
$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t_{r2}}{\tau}}$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{t_{r2}}{\tau}$$

$$-\ln 2 = -\frac{t_{r2}}{\tau} \rightarrow t_{r2} = \frac{\tau}{2} \ln 2$$

التمرين (8) : (بكالوريا 2015 - رياضيات) (التمرين : 028 في بنك التمارين على الموقع) (**))

تستعمل المكثفات في عدة تراكيب كهربائية ذات فائدة علمية في الحياة اليومية .
بغرض حساب سعة مكثفة غير مشحونة مسبقا ، نحقق التركيب الموضح بالشكل (2) حيث $R = 100 \Omega$ و المولد ثابت التوتر قوته المحركة الكهربائية E .



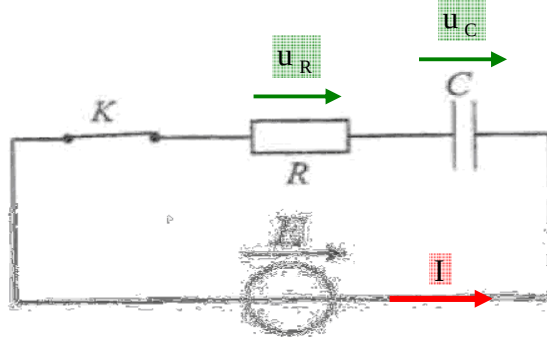
- 1- أعد رسم الدارة موضحا عليها التوترات بأسهم وجهة التيار الكهربائي .
- 2- بتطبيق قانون جمع التوترات ، جد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .
- 3- بين ان العبارة $u_C(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ هي حل للمعادلة التفاضلية ، حيث A و τ ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما .
- 4- بين أن : $\ln(E - u_C) = -\frac{1}{\tau} t + \ln E$.
- 5- بيان الشكل (3) يمثل تغيرات $\ln(E - u_C)$ بدلالة الزمن ، استنتج من البيان :
 - أ- قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد .
 - ب- قيمة ثابت الزمن τ ، و قيمة سعة المكثفة C .
- 6- أ- اكتب العبارة اللحظية لطاقة المكثفة في اللحظة $E_C(t)$.
 ب- نرسم بـ $E_C(\tau)$ للطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = \tau$ و بـ $E_C(\infty)$ للطاقة العظمى .

- احسب النسبة $\frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)}$

7- كيف يتم ربط مكثفة سعتها C' مع المكثفة السابقة لكي يأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau' = \frac{\tau}{4}$ ؟ و احسب قيمة C' .

الأجوبة :

1- رسم الدارة :



2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:
حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$R.i + u_C = E$$

$$R \frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R \frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

3- عبارتي A و τ :

$$u_C = A (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\frac{du_C}{dt} = A (0 - (-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau})) = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC} A (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{E}{RC}$$

$$Ae^{-t/\tau} (\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}) + \frac{A}{RC} = \frac{E}{RC}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \rightarrow \tau = RC$$

$$\frac{A}{RC} = \frac{E}{RC} \rightarrow A = E$$

4- إثبات العلاقة $\ln(E - u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E$:

$$u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_C = E - Ee^{-t/\tau} \rightarrow u_C = E - Ee^{-t/\tau} \rightarrow Ee^{-t/\tau} = E - u_C \rightarrow E - u_C = Ee^{-t/\tau}$$

$$\ln(E - u_C) = \ln(Ee^{-t/\tau}) \rightarrow \ln(E - u_C) = \ln E + \ln e^{-t/\tau}$$

$$\ln(E - u_C) = \ln E - \frac{t}{\tau} \rightarrow \ln(E - u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E$$

5- أ- قيمة E :

- بيان المنحنى $\ln(E - u_C) = f(t)$ عبارة عن مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$$\ln(E - u_C) = a t + b \quad \dots\dots\dots (1)$$

نظريا و مما سبق :

$$\ln(E - u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E \quad \dots\dots\dots (2)$$

بمطابقة العلاقتين (1) ، (2) :

$$\ln E = b \rightarrow E = e^b$$

من البيان :

$$\bullet b = 1.5 \rightarrow E = e^{1.5} \rightarrow E = 4.5 \text{ V}$$

ب- قيمة τ :

بالمطابقة السابقة أيضا :

$$-\frac{1}{\tau} = a \rightarrow \tau = -\frac{1}{a}$$

من البيان :

$$\bullet a = -\frac{1.5}{6 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3}} = -10^3$$

إذن :

$$\tau = -\frac{1}{-10^3} = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$$

- قيمة C :

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} \rightarrow C = \frac{10^{-3}}{100} = 10^{-5} \text{ F} = 10 \mu\text{F}$$

6- أ- عبارة الطاقة المخزنة اللحظية :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

و حيث أن : $u_C = E (1 - e^{-t/\tau})$ يكون :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 \rightarrow E_{(C)} = E_{(C)0} (1 - e^{-t/\tau})^2$$

$$\text{ب- النسبة} \quad \frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)}$$

من العبارة $E_{(C)}(t)$ السابقة :

$$E_{(C)}(\infty) = E_{(C)0}$$

بقسمة عبارة $E_{(C)}(t)$ على عبارة $E_{(C)}(\infty)$ نجد :

$$\frac{E_{(C)}(t)}{E_{(C)}(\infty)} = \frac{E_{(C)0}(1 - e^{-t/\tau})^2}{E_{(C)0}} \rightarrow \frac{E_{(C)}(t)}{E_{(C)}(\infty)} = (1 - e^{-t/\tau})^2$$

$$t = \tau \rightarrow \frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)} = (1 - e^{-\tau/\tau})^2 = (1 - e^{-1}) \rightarrow \frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)} \approx 0.4$$

7- كيفية وصل المكثفة C' مع المكثفة C :
نلاحظ أن :

$$\tau' = \frac{\tau}{4} \rightarrow \tau' < \tau \rightarrow RC_{\text{éq}} < RC \rightarrow C_{\text{éq}} < C$$

و هذا يتحقق عند ربط المكثفة C' على التسلسل مع المكثفة C لأن :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \rightarrow C_{\text{éq}} < C$$

قيمة C' :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{1}{C_{\text{éq}}} - \frac{1}{C} \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{C - C_{\text{éq}}}{C_{\text{éq}} \cdot C} \rightarrow C' = \frac{C_{\text{éq}} C}{C - C_{\text{éq}}}$$

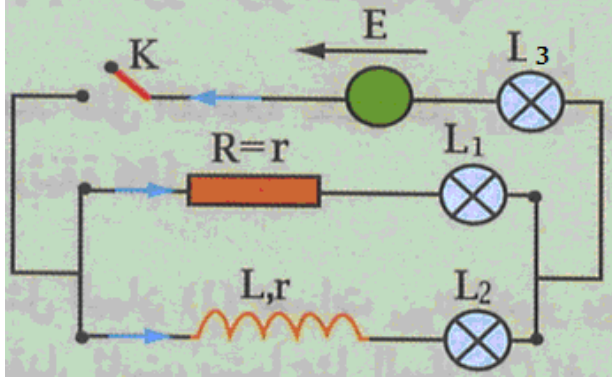
$$\tau' = RC_{\text{éq}} \rightarrow C_{\text{éq}} = \frac{\tau'}{R} = \frac{\frac{\tau}{4}}{R} = \frac{\tau}{4R} \rightarrow C_{\text{éq}} = \frac{10^{-3}}{4 \cdot 100} = 2.5 \cdot 10^{-6}$$

$$C' = \frac{2.5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-5}}{10^{-5} - 2.5 \cdot 10^{-6}} \rightarrow C' = 3.33 \cdot 10^{-6} = 3.33 \mu F$$

III - ثنائي القطب RL

1- خاصة الوشعة

• الخاصية التحريضية للوشعة :



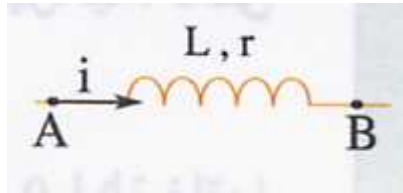
- نحقق التركيب المبين في الشكل التالي و المتكون من : مولد قوته المحركة الكهربائية E ، ناقل أومي ، و شبيعة ، مصابيح (L_1) ، (L_2) ، (L_3) قاطعة (K) :

- عند غلق القاطعة تتغير شدة التيار الكهربائي المار بالدائرة من القيمة 0 لحظة غلقها إلى القيمة (i) ، و عندها نلاحظ اشتعال المصباحين (L_1) ، (L_3) في الحين و تأخر اشتعال المصباح (L_2) مما يدل على نشوء تيار آخر في الجزء الخاص بالوشعة ، قام بعرقلة التيار الكهربائي الناشئ عن المولد .

- عند فتح القاطعة تتغير شدة التيار الكهربائي المار بالدائرة من القيمة (i) إلى القيمة 0 ، نلاحظ انطفاء المصباح (L_3) في الحين و تأخر انطفاء المصباحين (L_1) ، (L_2) مما يدل على نشوء تيار حل محل التيار المنقطع و الناشئ عن المولد في الجزء من الدارة الذي يحتوي على الوشعة .
- نستنتج أن الوشعة يمكنها توليد تيار كهربائي ، تسمى هذه الظاهرة بالتحريض الكهرومغناطيسي و نقول للوشعة خاصية تحريضية .

• التوتر بين طرفي وشعة :

- لكل وشعة ميزتين : مقاومة داخلية (r) تقدر بالأوم (Ω) ، ذاتية (L) تقدر بالهنري (H) .
- الذاتية L هي مقدار موجب تتعلق قيمتها بالشكل الهندسي للوشعة (الطول ℓ ، نصف القطر R ، عدد اللفات) ، كما أن وجود النواة الحديدية داخل الوشعة يؤثر على قيمة الذاتية كذلك .
- يرمز للوشعة في الدارة الكهربائية كما يلي :



- تعطى عبارة التوتر بين طرفي وشعة مقاومتها الداخلية r و ذاتيتها L و يجتازها تيار متغير بدلالة الزمن i كالتالي :

$$u_b = L \frac{di}{dt} + ri$$

- إذا كانت شدة التيار الكهربائي المار عبر الوشعة ثابتة ، يكون $\frac{di}{dt} = 0$ و يصبح :

$$u_b = ri$$

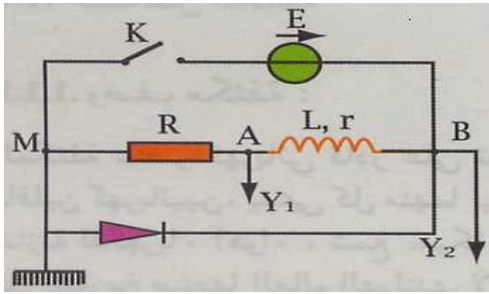
نقول عن الوشعة في هذه الحالة أنها سلكت سلوك ناقل أومي .

- إذا كانت مقاومة الوشيعية مهملة ($r = 0$) ، يقال عن الوشيعية أنها صافية (مثالية أو صرفة) ، و إذا اجتازها تيار كهربائي متغير بدلالة الزمن فإنه يعبر عن التوتر الكهربائي بين طرفيها في هذه الحالة بالعلاقة :

$$u_b = L \frac{di}{dt}$$

2- دراسة تطور شدة التيار المار بالوشيعية

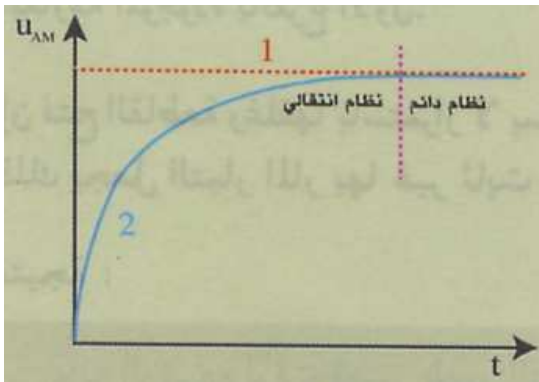
• الدراسة التجريبية : (تطور شدة التيار المار في الوشيعية)



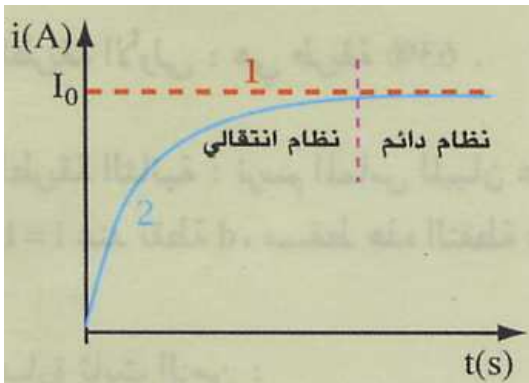
- التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي يتناسب طرديا مع شدة التيار $i(t)$ وفق العلاقة $u_R = R i$ ، لذلك يكون تطور $u_R(t)$ مماثل لتطور $i(t)$ و لهما نفس شكل المنحنى ، إذن لدراسة تطور شدة التيار المار بالوشيعية ندرس تطور التوتر $u_R(t)$ بين طرفي ناقل أومي موصول على التسلسل مع هذه الوشيعية .

- نحقق الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و التي تتكون من : مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r ، ناقل أومي مقاومة R ، صمام ثنائي (يسمح بمرور التيار في جهة واحدة فقط) ، راسم اهتزاز مهبطي ذو ذاكرة ، قاطعة (K) .

- عند غلق القاطعة :



على شاشة راسم الاهتزازات يظهر على المدخل Y_1 المنحني البياني التالي و الذي يمثل تطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_{AM}(t) = u_R(t)$.

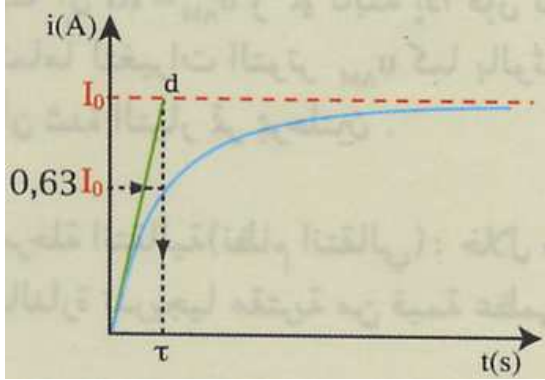


- كون أن تطور التوتر u_{AM} بين طرفي الناقل الأومي مماثل لتطور شدة التيار الكهربائي المار بالدائرة كما ذكرنا سابقا و بالتالي يكون لهما نفس شكل المنحنى ، و بالتالي يكون المنحنى $i(t)$ كما يلي :
نلاحظ أن شدة التيار المار بالوشيعية عند غلق القاطعة ، يتزايد تدريجا في البداية (نظام انتقالي) ، و بعدها تصبح قيمته ثابتة (نظام دائم) .

• ثابت الزمن لثنائي القطب RL :

- ثابت الزمن τ الذي ووحدته الثانية s في ثنائي القطب (RL) ، هو الزمن اللازم لبلوغ شدة التيار الكهربائي المار بهذه الدارة عند غلق القاطعة قيمة تساوي 63% من قيمتها العظمى ، يعبر عنه بالعلاقة :

$$\tau = \frac{L}{R + r}$$



- نلاحظ أن ثابت الزمن τ يزداد بازدياد ذاتية الوشيعية L و بنقصان المقاومة (R+r) .

- يعين ثابت الزمن τ بيانيا من خلال مماس المنحنيات $i(t)$ ، $u(t)$ عند اللحظة $t = 0$ حيث يمثل لحظة بلوغ المماس القيمة العظمى أو القيمة المعدومة (الشكل) .

• الدراسة النظرية : (تطور شدة التيار المار في الوشيعية)**■ المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$ ($r \neq 0$) :****عند غلق القاطعة :**

حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = E$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + Ri = E \rightarrow L \frac{di}{dt} + (r + R) i = E$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R + r}{L} i = \frac{E}{L}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ن حلها :

$$i(t) = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

حيث :

$$I_0 = \frac{E}{R + r} , \quad \tau = \frac{L}{R + r}$$

3- طاقة وشعة

• عبارة طاقة الوشعة :

عندما يجتاز الوشعة تيار كهربائي شدته i في لحظة t فإنها تخزن في هذه اللحظة طاقة يعبر عنها بالعلاقة :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

• العبارة اللحظية :

لدينا عند غلق القاطعة : $i = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$ بالتعويض في عبارة $E_{(L)}$:

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 = E_{(L)0} (1 - e^{-t/\tau})$$

حيث : $E_{(L)0} = \frac{1}{2} L I_0^2$ هي طاقة الوشعة الأعظمية .

التمرين (9) : (التمرين : 014 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) و التي تتكون من مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، قاطعة K ، ناقل أومي مقاومته $R = 90 \Omega$ ، وشعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r .
نغلق القاطعة فيظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) ، حيث يمثل المنحنى (1) تغيرات التوتر بين طرفي المولد ، و المنحنى (2) يمثل تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي .
1- أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$.

ب- أثبت $i = \frac{E}{R+r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$ هو حل لهذه المعادلة .

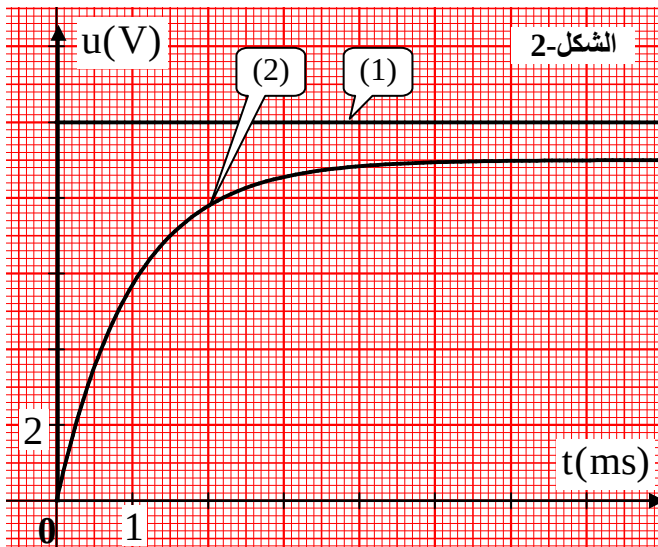
ج- اعتمادا على المعادلة التفاضلية ، أثبت أن شدة التيار

$I_0 = \frac{E}{R+r}$ المار بالدراة يعبر عنه بالعلاقة I_0 الأعظمية

2- بين على الدارة كيف تم ربط راسم الاهتزاز المهبطي بالدراة حتى تمكنا من الحصول على المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) .

3- اعتمادا على هذين المنحنيين أوجد :

- القوة المحركة الكهربائية E للمولد .
- شدة التيار الكهربائي الأعظمية I_0 و كذلك ثابت الزمن τ للدراة .
- المقاومة الداخلية للوشعة .
- ذاتية الوشعة .
- طاقة الوشعة في النظام الدائم .



4- نفتح الآن القاطعة .

أ- اكتب المعادلة التفاضلية التي تعبر عن شدة التيار $i = f(t)$ المار بالدائرة .

ب- حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $i = I_0 e^{-\frac{R+r}{L}t}$ ، حيث A ثابت يطلب التعبير عنهما .

ج- ماذا يمثل A و ما هو مدلوله الفيزيائي و بين أنه متجانس مع الزمن (وحدته الثانية) .

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$:

$$\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = \frac{E}{L}$$

ب- التحقق من الحل :

لدينا :

$$i = \frac{E}{R+r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{(R+r)}{L} \frac{E}{R+r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{E}{L} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{E}{L} - \frac{E}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t} = \frac{E}{L} \rightarrow \frac{E}{L} = \frac{E}{L}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

$$\text{ج- إثبات أن } I_0 = \frac{E}{R+r}$$

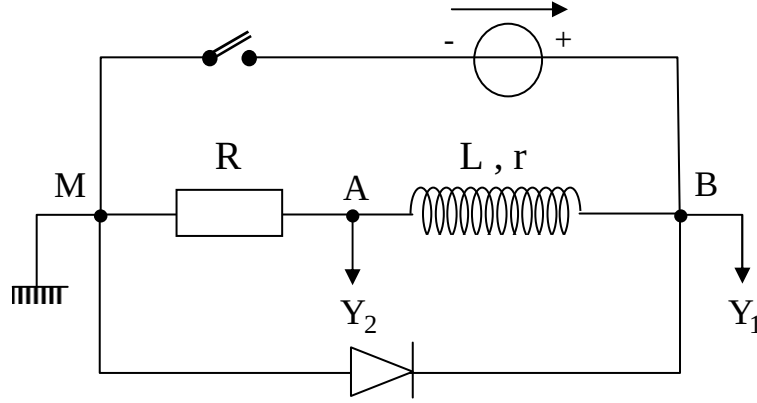
لدينا :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L}$$

في النظام الدائم يكون : $i = I_0$ ، $\frac{di}{dt} = 0$ ، بالتعويض نجد :

$$0 + \frac{R+r}{L}I_0 = \frac{E}{L} \rightarrow (R+r)I_0 = E \rightarrow I_0 = \frac{E}{R+r}$$

2- كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي :



3- القوة المحركة الكهربائية للمولد :

- التوتر بين طرفي المولد ثابت و مساوي للقوة المحركة الكهربائية له E و اعتاداً على المنحنى (1) يكون $E = 10 \text{ V}$

■ شدة التيار الكهربائي الأعظمية I_0 :
لدينا : $u_R = Ri$ و في النظام الدائم نكتب :

$$u_{R(t=\infty)} = RI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R(t=\infty)}}{R}$$

من المنحنى (2) لدينا : $u_{R(t=\infty)} = 9 \text{ V}$ ، إذن :

$$I_0 = \frac{9}{90} = 0,1 \text{ A}$$

■ ثابت الزمن τ :

$$t = 0 \rightarrow u_R = 0,63 u_{R_{\max}} = 0,63 (4,5 \cdot 2) = 5,67 \text{ V} \quad (2,83 \text{ cm})$$

بالإسقاط مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار نجد : $\tau = 1 \text{ ms}$.

■ المقاومة الداخلية للوشيجة r :

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow R+r = \frac{E}{I_0} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{10}{0,1} - 90 = 10 \Omega$$

■ ذاتية الوشيجة L :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = (R+r)\tau$$

$$L = (90 + 10) \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ H}$$

■ طاقة الوشيجة في النظام الدائم :

في النظام الدائم تكون طاقة الوشيجة أعظمية :

$$E_{(b)} = E_{(b)0} = \frac{1}{2} LI_0^2$$

$$E_{(b)} = E_{(b)0} = \frac{1}{2} \cdot 0,1 (0,1)^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

4-أ- المعادلة التفاضلية بدلالة شدة التيار :
حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{BM} = u_{BA} + u_{AM}$$

$$0 = L \frac{di}{dt} + ri + Ri$$

$$L \frac{di}{dt} + (R + r)i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R + r}{L} i = 0$$

ب- عبارة A :

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{A}}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{A}}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$-\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{A}} + \frac{R + r}{L} (I_0 e^{-\frac{t}{A}}) = 0 \rightarrow \left(\frac{-1}{A} + \frac{R + r}{L} \right) I_0 e^{-\frac{t}{A}} = 0$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكل تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\frac{-1}{A} + \frac{R + r}{L} = 0 \rightarrow \frac{R + r}{L} = \frac{1}{A} \rightarrow A = \frac{L}{R + r}$$

ج- يمثل A ثابت الزمن للدارة RL و مدلوله الفيزيائي هو أنه يمثل الزمن اللازم لبلوغ شدة التيار المار بالوشيعة 63% من قيمته الأعظمية .

■ إثبات أن $A = \tau$ (ثابت الزمن) أنه متجانس مع الزمن :
لدينا :

$$A = \frac{L}{R + r} \rightarrow [A] = \frac{[L]}{[R_T]}$$

و حيث لأن :

$$u_b = L \frac{di}{dt} \rightarrow [U] = [L] \frac{[I]}{[T]} \rightarrow [L] = \frac{[U][T]}{[I]}$$

$$u_R = RI \rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$$

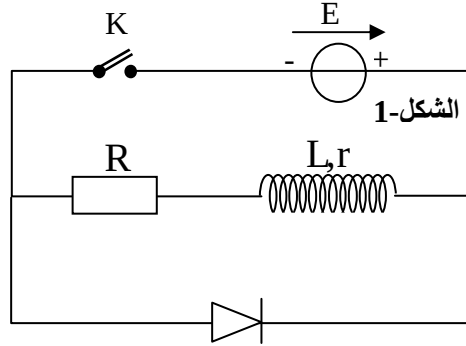
يكون بالتعويض في عبارة $[\tau]$ نجد :

$$[A] = \frac{\frac{[U][T]}{[I]}}{\frac{[U]}{[I]}} = \frac{[U][T]}{[I]} \cdot \frac{[I]}{[U]} \rightarrow [A] = [T] = s$$

إذن الثابت A (ثابت الزمن τ) متجانس مع الزمن .

التمرين (10) : (التمرين : 015 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و التي تتكون على التسلسل من مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، قاطعة ، ناقل أومي مقاومته R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r .



- 1- أكتب العبارات اللحظية مع رسم المنحنى البياني الموافق بشكل كيفي لكل من المقادير التالية عند غلق القاطعة و عند فتحها و ذلك باهمال المقاومة الداخلية للوشيعة ($r = 0$) :
 - التوتر بين طرفي الناقل الأومي .
 - التوتر بين طرفي الوشيعة .
- 2- أعد نفس الأسئلة من أجل ($r \neq 0$) .
- 3- أكتب العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في الوشيعة مع رسم المنحنى البياني الموافق بشكل كيفي من أجل ($r \neq 0$)
- 4- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي من أجل ($r \neq 0$) عند غلق القاطعة و فتحها .
- 5- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة من أجل ($r = 0$) عند غلق القاطعة و فتحها .

الأجوبة :

- 1- العبارات اللحظية من أجل ($r = 0$) :
 - العبارة اللحظية للتوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي ($r = 0$) :
 - عند غلق القاطعة :

$$u_R = R i$$

عند غلق القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

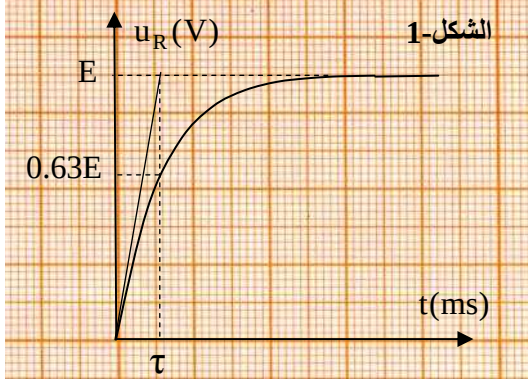
$$i(t) = I_0 (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

بالتعويض في عبارة u_R نجد :

$$u_R = R \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_R = E (1 - e^{-t/\tau})$$

- بيانيا :



- $t = 0 \rightarrow u_R = 0$
- $t = \infty \rightarrow u_R = E$
- $t = \tau \rightarrow u_R = 0.63 E$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-1) :

- عند فتح القاطعة :

عند فتح القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

بالتعويض في عبارة u_R :

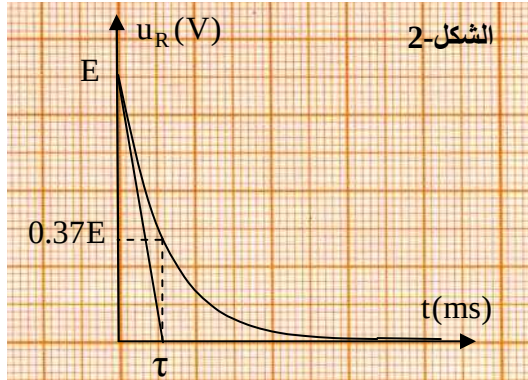
$$u_R = R i$$

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$u_R = R \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$u_R = E e^{-t/\tau}$$

- بيانيا :



- $t = 0 \rightarrow u_R = E$
- $t = \infty \rightarrow u_R = 0$
- $t = \tau \rightarrow u_R = 0.37 E$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-2) .

• العبارة اللحظية للتوتر $u_b(t)$ بين طرفي الناقل الوشيعة ($r = 0$) :

- عند غلق القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

$$u_b = E - u_R \rightarrow u_b = E - R.i$$

عند غلق القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

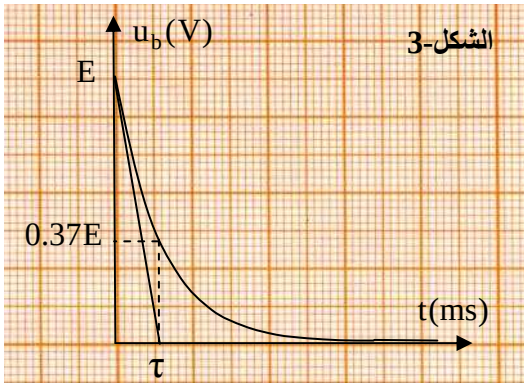
$$i = I_0 (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

بالتعويض :

$$u_b = E - R \cdot \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow u_b = E - E (1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow u_b = E - E + E e^{-t/\tau}$$

$$u_b = E e^{-t/\tau}$$

- بيانيا :



- $t = 0 \rightarrow u_b = E$
- $t = \infty \rightarrow u_b = 0$
- $t = \tau \rightarrow u_b = 0.37 E$

و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الوشيعية عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-3) :

- عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = 0$$

$$u_b = -u_R \rightarrow u_b = -R.i$$

عند فتح القاطعة و من أجل $r = 0$ لدينا :

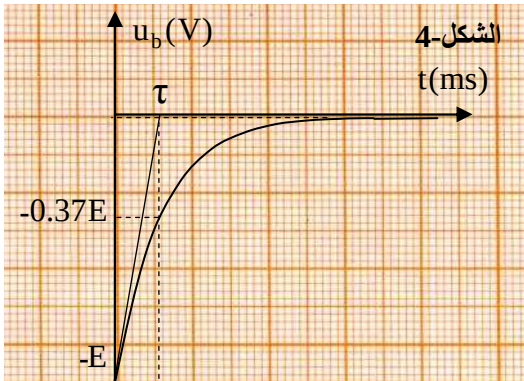
$$i = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

بالتعويض :

$$u_b = -R \cdot \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$u_b = E e^{-t/\tau}$$

-> بيانيا :



- $t = 0 \rightarrow u_b = -E$
- $t = \infty \rightarrow u_b = 0$
- $t = \tau \rightarrow u_b = -0.37 E$

و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الوشيعية عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-4) :

2- العبارات اللحظية من أجل $r \neq 0$:● العبارة اللحظية للتوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي ($r \neq 0$) :

- عند غلق القاطعة :

$$u_R = R i$$

عند غلق القاطعة :

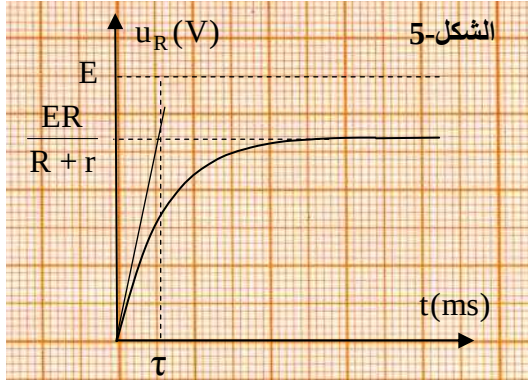
$$i = I_0 (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R + r} (1 - e^{-t/\tau})$$

بالتعويض في عبارة u_R نجد :

$$u_R = R \cdot \frac{E}{R + r} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_R = \frac{ER}{R + r} (1 - e^{-t/\tau})$$

- بيانيا :



$$\square t = 0 \rightarrow u_R = 0$$

$$\square t = \infty \rightarrow u_R = \frac{ER}{R+r} < E$$

$$\square t = \tau \rightarrow u_R = 0.63 u_{Rmax}$$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-5) :

- عند فتح القاطعة :

$$u_R = R i$$

عند فتح القاطعة لدينا :

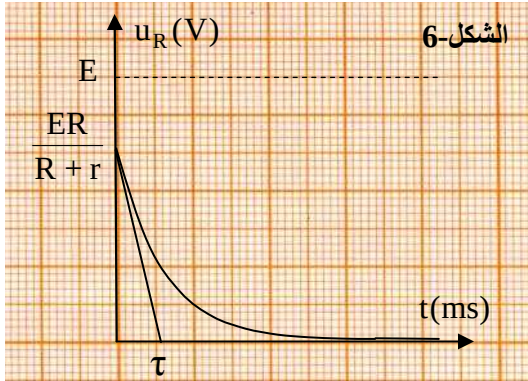
$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{E}{R+r} e^{-t/\tau}$$

$$u_R = R \cdot \frac{E}{R+r} e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في عبارة u_R نجد :

$$u_R = \frac{ER}{R+r} e^{-t/\tau}$$

- بيانيا :



$$\square t = 0 \rightarrow u_R = \frac{ER}{R+r} < E$$

$$\square t = \infty \rightarrow u_R = 0$$

$$\square t = \tau \rightarrow u_R = 0.37 u_{R0}$$

و منه المنحنى $u_R(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-6) :

2- العبارات اللحظية من أجل $(r \neq 0)$:• العبارة اللحظية للتوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعية $(r \neq 0)$:

- عند غلق القاطعة :

طريقة أولى :

$$u_b = L \frac{di}{dt} + ri$$

عند غلق القاطعة لدينا :

$$\square i = I_0 (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R+r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

$$\square \frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r} (1 - (-\frac{R+r}{L} e^{-\frac{R+r}{L}t})) \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = L \cdot \frac{E}{L} e^{-t/\tau} + r \cdot \frac{E}{R+r} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_b = L \cdot \frac{E}{L} e^{-t/\tau} + \frac{E \cdot r}{R+r} - \frac{E \cdot r}{R+r} e^{-t/\tau} \rightarrow u_b = E e^{-t/\tau} + \frac{E \cdot r}{R+r} - \frac{E \cdot r}{R+r} e^{-t/\tau}$$

$$u_b = \frac{E \cdot r}{R+r} + (E - \frac{E \cdot r}{R+r}) e^{-t/\tau} \rightarrow u_b = \frac{E \cdot r}{R+r} + (\frac{E \cdot R + E \cdot r - E \cdot r}{R+r}) e^{-t/\tau}$$

$$u_b = \frac{E \cdot r}{R+r} + \frac{E \cdot R}{R+r} e^{-t/\tau}$$

طريقة ثانية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{BM} = u_{BA} + u_{AM}$$

$$E = u_b + u_R \rightarrow u_b = E - u_R \rightarrow u_b = E - Ri$$

عند غلق القاطعة لدينا :

$$i = I_0 (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R+r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

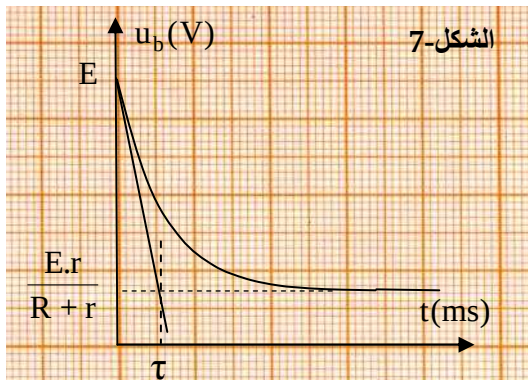
بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = E - R \cdot \frac{E}{R+r} (1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow u_b = E - \frac{ER}{R+r} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_b = E - \frac{ER}{R+r} + \frac{ER}{R+r} e^{-t/\tau} \rightarrow u_b = \frac{ER + ER - ER}{R+r} + \frac{ER}{R+r} e^{-t/\tau}$$

$$u_b = \frac{E \cdot r}{R+r} + \frac{E \cdot R}{R+r} e^{-t/\tau}$$

- بيانيا :



$$\bullet t = 0 \rightarrow u_b = \frac{E \cdot r}{R+r} + \frac{E \cdot R}{R+r} = \frac{E(R+r)}{R+r} = E$$

$$\bullet t = \infty \rightarrow u_b = \frac{E \cdot r}{R+r}$$

و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الوشيعية عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-7) :

- عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{BM} = u_{BA} + u_{AM}$$

$$0 = u_b + u_R \rightarrow u_b = -u_R \rightarrow u_b = -Ri$$

عند فتح القاطعة لدينا :

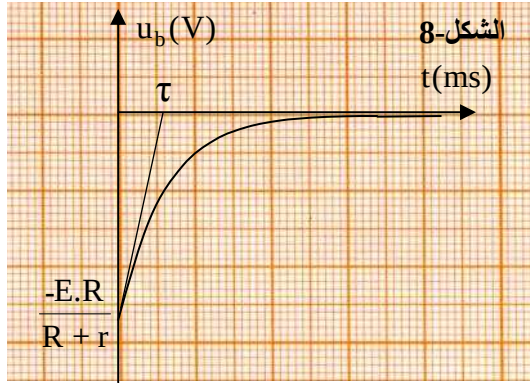
$$i = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{E}{R+r} e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = - R \cdot \frac{E}{R+e} e^{-t/\tau}$$

$$u_b = - \frac{ER}{R+e} e^{-t/\tau}$$

- بيانيا :



$$\bullet t = 0 \rightarrow u_b = - \frac{E.R}{R+r}$$

$$\bullet t = \infty \rightarrow u_b = 0$$

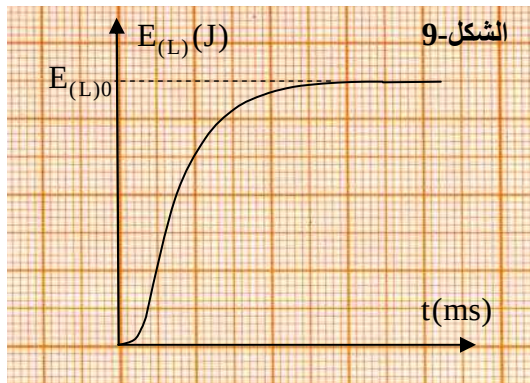
و منه المنحنى $u_b(t)$ الممثل لتطور التوتر بين طرفي الوشيعية عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-8) :

3- العبارة اللحظية لطاقة الوشيعية $E_{(L)}(t)$ بين طرفي الوشيعية : عند غلق القاطعة :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} Li^2$$

لدينا عند غلق القاطعة : $i = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$ بالتعويض في عبارة $E_{(L)}$:

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} LI_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 = E_{(L)0} (1 - e^{-t/\tau})$$



حيث : $E_{(L)0} = \frac{1}{2} LI_0^2$ هي طاقة الوشيعية الأعظمية .

بيانيا :

$$t = 0 \rightarrow E_{(L)} = 0$$

$$t = \infty \rightarrow E_{(L)} = E_{(L)0}$$

و منه المنحنى $E_{(L)}(t)$ الممثل لتطور طاقة الوشيعية عند غلق القاطعة يكون كما في (الشكل-9) :

عند فتح القاطعة :

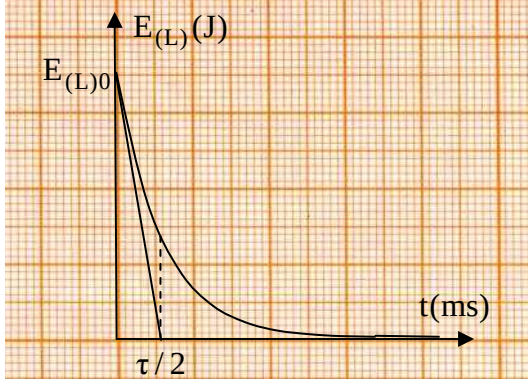
$$E_{(L)} = \frac{1}{2} Li^2$$

لدينا عند فتح القاطعة : $i = I_0 e^{-t/\tau}$ بالتعويض في عبارة $E_{(L)}$:

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2 (e^{-t/\tau})^2$$

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2 e^{-2t/\tau}$$

الشكل



بيانيا :

$$t = 0 \rightarrow E_{(L)} = E_{(L)0}$$

$$t = \infty \rightarrow E_{(L)} = 0$$

و منه المنحنى $E_{(L)}(t)$ الممثل لتطور طاقة الوشيعية عند فتح القاطعة يكون كما في (الشكل-10) :

4- المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي $(r \neq 0)$:
- عند غلق القاطعة :
حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = E$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + Ri = E \rightarrow L \frac{di}{dt} + (R + r) i = E$$

لدينا :

$$u_R = R i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_R}{dt}$$

بالتعويض :

$$L \frac{d}{dt} \left(\frac{u_R}{R} \right) + (R + r) \frac{u_R}{R} = E \rightarrow \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{(R + r)}{R} u_R = E$$

بضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$ نجد :

$$\frac{R}{L} \cdot \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L} \frac{(R + r)}{R} u_R = \frac{R}{L} \cdot E$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{(R + r)}{L} u_R = \frac{ER}{L}$$

- عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + Ri = E \rightarrow L \frac{di}{dt} + (R + r) i = 0$$

لدينا :

$$u_R = R i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_R}{dt}$$

بالتعويض u_R :

$$L \left(\frac{1}{R} \frac{du_R}{dt} \right) + (R + r) \frac{u_R}{R} = 0 \rightarrow \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{(R + r)}{R} u_R = 0$$

بضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$ نجد :

$$\frac{R}{L} \cdot \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L} \frac{(R + r)}{R} u_R = 0$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{(R + r)}{L} u_R = 0$$

5- المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعية من أجل $(r = 0)$:
عند غلق القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_b + u_R = E \rightarrow u_b + R.i = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_b}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0$$

لدينا من أجل $(r = 0)$

$$u_b = L \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u_b}{L}$$

بالتعويض :

$$\frac{du_b}{dt} + \frac{R}{L} u_b = 0$$

عند فتح القاطعة :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_E = u_R + u_b \rightarrow 0 = R i + u_b$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_b}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0$$

لدينا من أجل $(r = 0)$

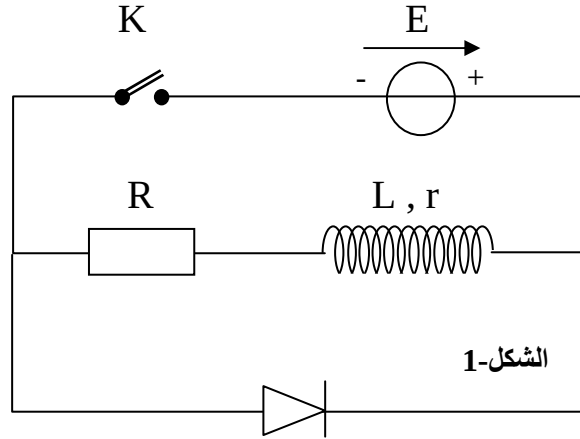
$$u_b = L \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u_b}{L}$$

بالتعويض :

$$\frac{du_b}{dt} + \frac{R}{L} u_b = 0$$

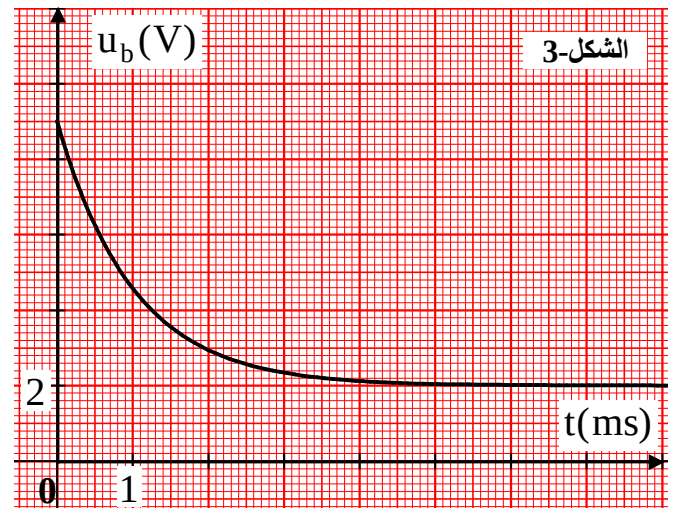
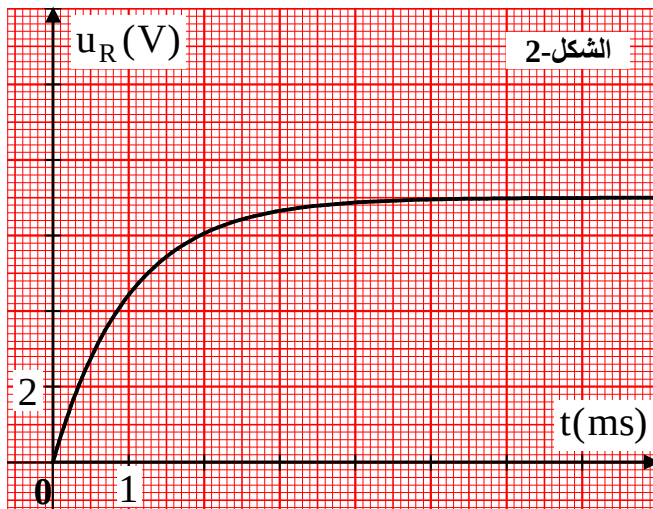
التمرين (11) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (*)

الدائرة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) تتكون من العناصر التالية موصولة على التسلسل : مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، ناقل أومي مقاومته R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية $r = 20 \Omega$.



عند ربط هذه الدائرة بمدخل راسم اهتزاز مهبطي تمكنا من مشاهدة المنحنيين $u_R(t)$ ، $u_b(t)$ المبينين في الشكلين (2) ، (3) عند غلق القاطعة .

(∞)



- 1- أ- بين كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي لمشاهدة منحنىي الشكلين (1) ، (2) .
- 2- اعتمادا على المنحنيين أوجد :
 - أ- القوة المحركة الكهربائية E .
 - ب- الشدة الأعظمية للتيار الكهربائي I_0 .
 - ج- مقاومة الناقل الأومي R .
 - د- ثابت الزمن τ .
 - هـ- ذاتية الوشيعة .

3- عند اللحظة $t = 2 \text{ ms}$ أوجد :

أ- شدة التيار الكهربائي .

ب- الطاقة المخزنة في الوشعة .

4- أحسب طاقة الوشعة في النظام الدائم .

الأجوبة :

1- كيفية ربط راسم الاهتزاز المهبطي :

- نصل الدارة براسم الاهتزاز المهبطي ثم نضغط على الزر INV

في المدخل Y_1 كما في الشكل التالي :

2- أ- القوة المحركة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_b + u_R$$

عند النظام الدائم يكون :

$$E = u_{b0} + u_{R0}$$

من منحنىي الشكلين (2) ، (3) : $u_{b0} = 2V$ ، $u_{R0} = 7V$ و منه يصبح :

$$E = 2 + 7 = 9V$$

ب- الشدة الأعظمية للتيار الكهربائي :

لدينا : $u_{AM} = L \frac{di}{dt} + ri$ و في النظام الدائم أين $\frac{di}{dt} = 0$ ، $i = I_0$ يكون :

$$u_{b(\infty)} = r I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{b(\infty)}}{r}$$

من منحنى (الشكل-3) : $u_{b(\infty)} = 2V$ و منه :

$$I_0 = \frac{2}{20} = 0.1 A$$

ج- مقاومة الناقل الأومي R :

$$I_0 = \frac{E}{R + r} \rightarrow R + r = \frac{E}{I_0} \rightarrow R = \frac{E}{I_0} - r \rightarrow R = \frac{9}{0.1} - 20 = 70 \Omega$$

طريقة ثانية :

$$u_{R(t)} = R i(t)$$

في النظام الدائم أين $i = I_0$ نكتب :

$$u_{R(\infty)} = R I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R(\infty)}}{R}$$

من البيان : $u_{R(\infty)} = 7V$

$$R = \frac{7}{0.1} = 70 \Omega$$

د- ثابت الزمن τ :

من منحنى (الشكل-2) :

$$t = \tau \rightarrow u_R = 0.63 u_{R_{\max}} = 0.63 \cdot 7 = 4.41 V$$

بالإسقاط مع أخذ السلم بعين الاعتبار نجد : $\tau = 1 \text{ ms}$

هـ- ذاتية الوشيجة :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = \tau (R+r) \rightarrow L = 10^{-3} (70+20) = 0.09 \text{ H}$$

3- عند اللحظة $t = 2 \text{ ms}$:

• شدة التيار الكهربائي :

• عند غلق القاطعة لدينا :

$$i = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

• عند اللحظة $t = 2 \text{ ms}$:

$$i_{(2\text{ms})} = 0,1 (1 - e^{-\frac{2 \text{ ms}}{1 \text{ ms}}}) = 8,65 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

• الطاقة المخزنة في الوشيجة :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L i^2$$

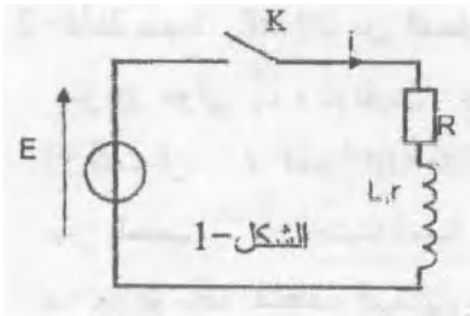
• عند اللحظة $t = 2 \text{ ms}$:

$$E_{(L)(2\text{ms})} = \frac{1}{2} L i_{(2\text{ms})}^2 \rightarrow E_{(L)(2\text{ms})} = \frac{1}{2} \cdot 0.09 (8.65 \cdot 10^{-2})^2 = 3.37 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

4- طاقة الوشيجة في النظام الدائم :

في النظام الدائم تكون طاقة الوشيجة أعظمية و عليه :

$$E_{(L)} = E_{(L)0} = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 \rightarrow E_{(L)} = 0.5 \cdot 0.09 (0.1)^2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

التمرين (12) : (بكالوريا 2012 - رياضيات) (التمرين : 025 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نحقق الدارة الكهربائية (الشكل-1) المكونة من :

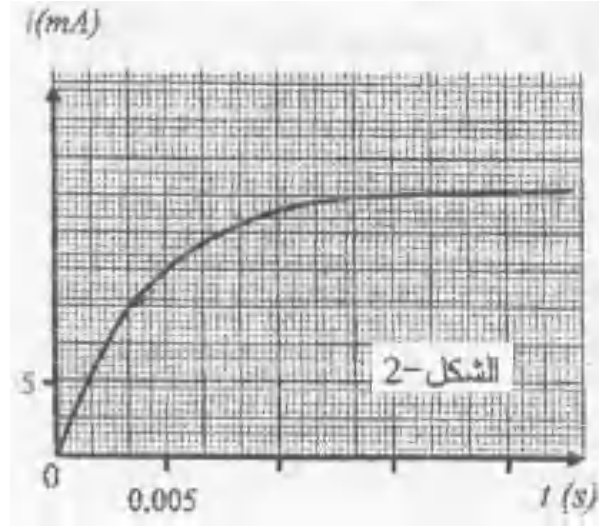
- مولد توتر كهربائي ثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 2\text{V}$.- ناقل أومي مقاومته $R = 100 \Omega$.- وشيجة ذاتيتها L و مقاومتها r .- قاطعة K .1- نغلق القاطعة K :أ- اكتب العلاقة التي تربط التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيجة $u_b(t)$ و التوتر الكهربائي بين طرفي المقاومة $u_R(t)$ و E .ب- جد عبارة $u_b(t)$ بدلالة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ ، ثم بدلالة $u_R(t)$.ج- استنتج المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_R(t)$ للدارة .

2- يعطى حل المعادلة التفاضلية التي يحققها بالشكل التالي :

$$u_R(t) = A + B e^{-mt}$$

حيث A و B و m ثوابت يطلب تعيينها3- يسمح تجهيز الـ ExAO بمتابعة التطور الزمني لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة فنحصل على المنحنى

البياني (الشكل-2)



- لتكن I_0 شدة التيار الكهربائي الأعظمي في النظام الدائم .
- أ- جد العبارة الحرفية للشدة I_0 .
- ب- جد بياناً قيمة الشدة I_0 ، ثم استنتج مقاومة الوشيجة r .
- ج- اكتب عبارة ثابت الزمن τ للدائرة و بين بالتحليل البعدي أن τ متجانس مع الزمن .
- د- جد بياناً قيمة τ ، ثم استنتج قيمة ذاتية الوشيجة L .

الأجوبة :

1- أ- العلاقة بين u_b و u_R و E :
حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

ب- عبارة u_b بدلالة i :

$$u_b = L \frac{di}{dt} + r i$$

- عبارة u_b بدلالة u_R :

$$\bullet u_R = R i \rightarrow i = \frac{1}{R} u_R$$

$$\bullet \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_R}{dt}$$

بالتعويض في عبارة u_b نجد :

$$u_b = L \left(\frac{1}{R} \frac{du_R}{dt} \right) + r \left(\frac{1}{R} u_R \right)$$

$$u_b = \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R} u_R$$

ج- المعادلة التفاضلية التي يحققها u_R :

بتعويض عبارة u_b الأخيرة في العبارة الأولى التي حصلنا عليها بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$\frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R} u_R + u_R = E$$

$$\frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \left(\frac{r}{R} + 1\right) u_R = E$$

$$\frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} + \left(\frac{R+r}{R}\right) u_R = E \rightarrow \frac{du_R}{dt} + \left(\frac{R+r}{L}\right) u_R = \frac{ER}{L}$$

2- تعيين الثوابت A و B و m :

$$\square u_R = A + B e^{-mt}$$

$$\square \frac{du_R}{dt} = -B.m e^{-mt}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-B.m e^{-mt} + \frac{R+r}{L} (A + B e^{-mt}) = \frac{ER}{L}$$

$$-B.m e^{-mt} + \frac{(R+r)A}{L} + \frac{(R+r)B}{L} e^{-mt} = \frac{ER}{L}$$

$$B e^{-mt} \left(-B.m + \frac{(R+r)B}{L}\right) + \frac{(R+r)A}{L} = \frac{ER}{L}$$

الحل المعطى هو حل المعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\square -m + \frac{(R+r)}{L} = 0 \rightarrow m = \frac{(R+r)}{L}$$

$$\square \frac{(R+r)A}{L} = \frac{ER}{L} \rightarrow A = \frac{ER}{R+r}$$

- من الشروط الابتدائية : $t = 0 \rightarrow u_R = 0$ بالتعويض في عبارة u_R (حل المعادلة التفاضلية) :

$$0 = A + B e^{-m(0)} \rightarrow A + B = 0 \rightarrow B = -A \rightarrow B = -\frac{ER}{R+r}$$

3- أ- العبارة الحرفية للشدة I_0 في النظام الدائم :

$$\square i = I_0 \rightarrow u_R = R I_0$$

$$\square \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{du_R}{dt} = 0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{R+r}{L} (R I_0) = \frac{ER}{L} \rightarrow I_0 = \frac{E}{R+r}$$

ب- قيمة I_0 :

من البيان مباشرة :

$$I_0 = 3.6 \times 5 \cdot 10^{-3} = 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

- قيمة r :

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow (R+r) = \frac{E}{I_0} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{2}{1.8 \cdot 10^{-2}} - 100 = 11.11 \Omega$$

ج- عبارة τ :

$$\tau = \frac{L}{R + r}$$

- إثبات أن τ متجانس مع الزمن :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R_T]}$$

لدينا :

$$\bullet u_b = L \frac{di}{dt} \rightarrow [U] = [L] \frac{[I]}{[T]} \rightarrow [L] = \frac{[U][T]}{[I]}$$

$$\bullet u_R = RI \rightarrow [U] = [R][I] \rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$$

بالتعويض في عبارة $[\tau]$ نجد :

$$[\tau] = \frac{\frac{[U][T]}{[I]}}{\frac{[U]}{[I]}} = \frac{[U][T]}{[I]} \cdot \frac{[I]}{[U]} \rightarrow [\tau] = [T] = s$$

د- قيمة τ :

$$t = \tau \rightarrow i = 0.63 I_0 = 0.63 \cdot 1.8 \cdot 10^{-2} = 1.13 \cdot 10^{-2}$$

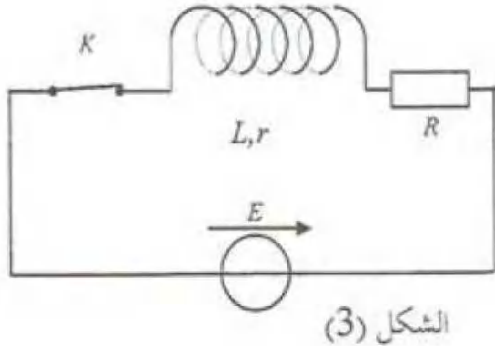
بالإسقاط في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار نجد : $\tau \approx 4.3 \cdot 10^{-3} s = 4.3 ms$ - قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R + r} \rightarrow L = \tau (R + r)$$

$$L = 4.3 \cdot 10^{-3} (100 + 11.11) \approx 0.48 H$$

التمرين (13) : (بكالوريا 2015 - رياضيات) (التمرين : 060 في بنك التمارين على الموقع) (*)

بهدف معرفة ذاتية وشيعة L و مقاومتها r نحقق التركيب الموضع بالشكل (3) حيث $R = 15 \Omega$ و المولد ثابت التوتر قوته المحركة الكهربائية E .



1- بتطبيق قانون جمع التوترات ، بين أن المعادلة التفاضلية

لشدة التيار تكتب بالشكل : $\frac{di(t)}{dt} + \alpha i(t) = \beta$ ، حيث α, β ثابتان يطلب تحديد عبارتيهما مستغنيا بالمقادير التالية L, R, r, E .

2- تحقق أن العبارة $i(t) = \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$ هي حلا للمعادلة التفاضلية.

3- بين أن عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة تعطى بالعلاقة :

$$u_b(t) = \frac{E}{E+r} (r + R e^{-\frac{(R+r)}{L}t})$$

4- باستعمال راسم اهتزازات ذي ذاكرة تحصلنا على بيان الشكل (4) الممثل لتغيرات u_b بين طرفي الوشيعة بدلالة الزمن.

أ- أعد رسم الدارة موضحا كيفية توصيل راسم

الاهتزازات لمشاهدة بيان الشكل (4).

ب- بالاعتماد على البيان استنتج :

- القوة المحركة الكهربائية للمولد E .

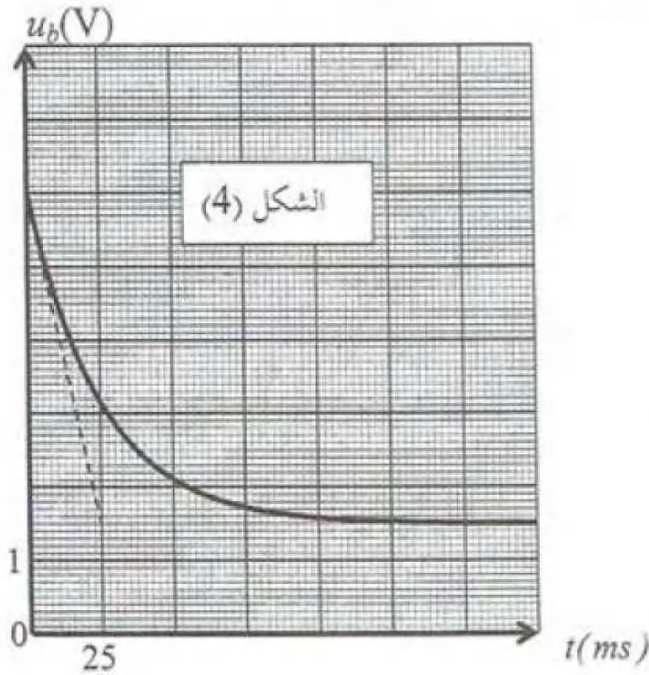
- مقاومة الوشيعة r .

- ثابت الزمن τ للدارة.

- ذاتية الوشيعة L .

5- أ- اكتب العبارة اللحظية للطاقة المخزومة في الوشيعة E_L .

ب- أوجد قيمة هذه الطاقة في النظام الدائم.

**الأجوبة :**

1- المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + Ri = E$$

$$L \frac{di}{dt} + (r + R) i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{r + R}{L} i = \frac{E}{L}$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$\alpha = \frac{R + r}{L} , \quad \beta = \frac{E}{L}$$

2- التحقق من الحل :

$$\begin{aligned} \bullet i &= \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \\ \bullet \frac{di}{dt} &= \frac{\beta}{\alpha} (0 - (-\alpha e^{-\alpha t})) = -\beta e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة :

$$\begin{aligned} \beta e^{-\alpha t} + \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) &= \beta \\ \beta e^{-\alpha t} + \beta (1 - e^{-\alpha t}) &= \beta \\ \beta e^{-\alpha t} + \beta - \beta e^{-\alpha t} &= \beta \rightarrow \beta = \beta \end{aligned}$$

إذن الحل المعطى هو فعلا حل للمعادلة التفاضلية .

3- العبارة $u_b(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

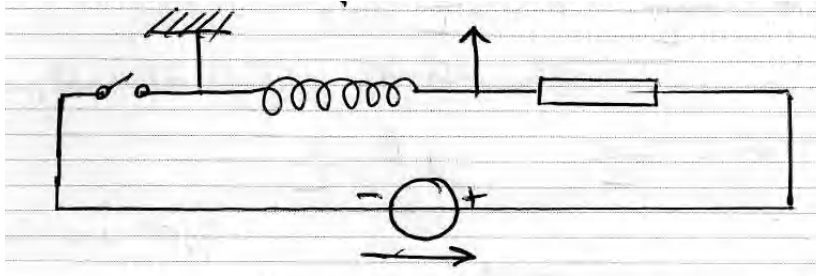
$$\begin{aligned} u_b + u_R &= E \\ u_b &= E - u_R \rightarrow u_b = E - R \cdot i \end{aligned}$$

و مما سبق يمكن كتابة :

$$i = \frac{E}{R + r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

ومنه :

$$\begin{aligned} u_b &= E - R \cdot \frac{E}{R + r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}) \\ u_b &= E - \frac{RE}{R + r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}) \\ u_b &= E - \frac{RE}{R + r} + \frac{RE}{R + r} e^{-\frac{R+r}{L}t} \\ u_b &= \frac{RE + rE - RE}{R + r} + \frac{RE}{R + r} e^{-\frac{R+r}{L}t} \\ u_b &= \frac{rE}{R + r} + \frac{RE}{R + r} e^{-\frac{R+r}{L}t} \rightarrow u_b = \frac{E}{R + r} (r + R e^{-\frac{R+r}{L}t}) \end{aligned}$$

4- أ- كيفية وصل الدارة براسم الاهتزازات :

ب- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_{b(t)} + u_{R(t)}$$

عند اللحظة $t = 0$ نكتب :

$$E = u_{b(t=0)} + u_{R(t=0)}$$

لدينا :

$$\bullet t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{R(t=0)} = 0$$

و من البيان :

$$\bullet u_{b(t=0)} = 6V$$

و منه :

$$E = 6 + 0 \rightarrow E = 6B$$

قيمة r :من العبارة $u_b(t)$:

$$u_{b(\infty)} = \frac{Er}{R + r}$$

و منه :

$$u_{b(\infty)}R + u_{b(\infty)}r = Er$$

$$u_{b(\infty)}R = Er - u_{b(\infty)}r$$

$$u_{b(\infty)}R = r(E - u_{b(\infty)}) \rightarrow r = \frac{u_{b(\infty)} \cdot R}{E - u_{b(\infty)}}$$

من البيان في النظام الدائم ($t = \infty$) :

$$u_{b(\infty)} = 1,5 V$$

و منه :

$$r = \frac{1,5 \cdot 15}{6 - 1,5} = 5 \Omega$$

■ ثابت الزمن τ :

من البيان :

$$\tau = 25 \text{ ms}$$

قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R + r} \rightarrow L = \tau (R + r)$$

$$\tau = 25 \cdot 10^{-3} (15 + 5) = 0,5 \text{ H}$$

5- أ- العبارة اللحظية لطاقة الوشيعية :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L i^2$$

لدينا :

$$i = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

و منه :

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2$$

ب- قيمة الطاقة في النظام الدائم :
من العلاقة السابقة :

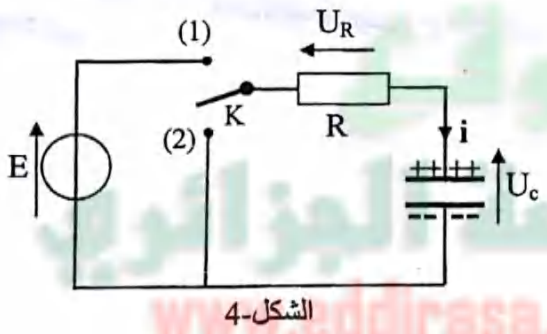
$$t = \infty \rightarrow E_{(L)} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$I_0 = \frac{E}{R + r} = \frac{6}{15 + 5} = 0,3 \text{ A}$$

$$E_{(L)} = \frac{1}{2} 0,5 \cdot (0,3)^2 = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

IV - تمارين متنوعة

التمرين (14) : (بكالوريا 2016 - علوم تجريبية) (التمرين : 061 في بنك التمارين على الموقع) (**) :

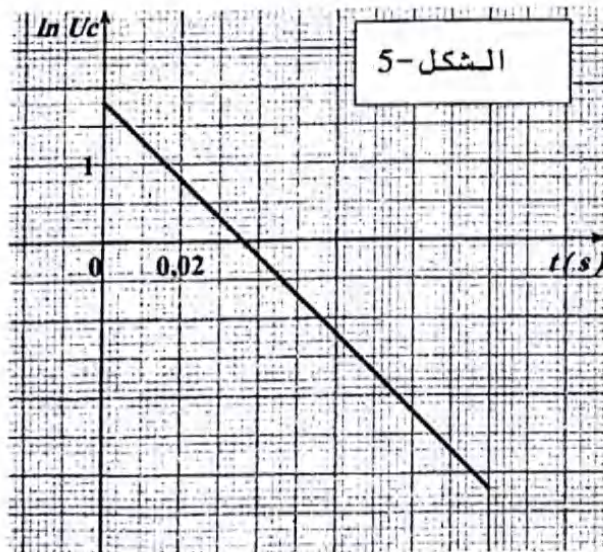


لغرض دراسة تطور التوتر الكهربائي بين طرفي مكثفة نركب الدارة الكهربائية الموضحة بالشكل-4 .
تتكون هذه الدارة من مولد للتوتر الثابت E ، ناقل أومي مقاومته R = 10 kΩ ، مكثفة سعتها C و بادلة K .
نضع البادلة في الوضع (1) إلى غاية بلوغ النظام الدائم ، ثم نغير البادلة إلى الوضع (2) في اللحظة t = 0 .
1- ما هي إشارة شدة التيار الكهربائي المبين في الدارة ؟ علل .

2- بين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي U_C بين طرفي المكثفة في هذه الدارة تعطى بالشكل :

$$U_C + \frac{1}{\alpha} \frac{dU_C}{dt} = 0$$

3- إذا كان حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل :
 $U_C = Ae^{-\alpha t}$ ، اوجد عبارتي الثابتين A و α بدلالة E و C ، R
4- يمثل الشكل-5 المنحنى البياني لتغيرات lnU_C بدلالة الزمن t .



أ- استنتج بيانيا عبارة الدالة $\ln U_C = f(t)$.
ب- بالمطابقة مع العلاقة النظرية الموافقة للمنحنى ، استنتج قيم كل من : α ، C و E .
5- احسب الطاقة المحولة إلى الناقل الأومي عند اللحظة t = 2,5 τ ، ماذا تستنتج ؟ حيث τ هو ثابت الزمن المميز للدارة .

الأجوبة :

1- إشارة شدة التيار :

عند الشحن :

في هذه الحالة تزداد شحنة المكثف و كون أن $i = \frac{dq}{dt}$ ، يكون $i > 0$ (مشتق دالة متزايدة موجب) .

عند الشحن :

في هذه الحالة تتناقص شحنة المكثف و كون أن $i = \frac{dq}{dt}$ ، يكون $i < 0$ (مشتق دالة متناقصة سالب) .

2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_C + u_R = 0$$

$$u_C + R.i = 0 \rightarrow u_C + R.\frac{dq}{dt} = 0$$

$$u_C + R.\frac{d(C.u_C)}{dt} = 0 \rightarrow u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0$$

3- عبارة A و α :

$$\square u_C = Ae^{-\alpha t}$$

$$\square \frac{du_C}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$Ae^{-\alpha t} + RC(-\alpha Ae^{-\alpha t}) = 0$$

$$Ae^{-\alpha t}(1 + RC\alpha) = 0$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$1 - RC\alpha = 0$$

$$RC\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

من الشروط الابتدائية (تفريغ) :

$$t = 0 \rightarrow u_C = E$$

بالتعويض في العبارة $u_C = Ae^{-\alpha t}$ نجد :

$$E = Ae^{-\alpha(0)} \rightarrow A = E$$

4- أ- عبارة الدالة $\ln u_C = f(t)$:المنحنى $\ln u_C(t)$ هو عبارة مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$$\ln u_C = at + b$$

$$\square a = -\frac{1,8}{1,8.0,02} = -50$$

$$\square b = 1,8$$

إذن العبارة هي :

$$\ln u_C = -50 t + 1,8$$

ب- قيمة E ، C ، α :

$$u_C = Ae^{-\alpha t} = E e^{-\alpha t}$$

$$\ln u_C = \ln E + \ln e^{-\alpha t}$$

$$\ln u_C = \ln E - \alpha t \rightarrow \ln u_C = -\alpha t + \ln E$$

بالمطابقة مع العبارة الرياضية السابقة نجد :

$$\alpha = -50 \rightarrow \alpha = 50$$

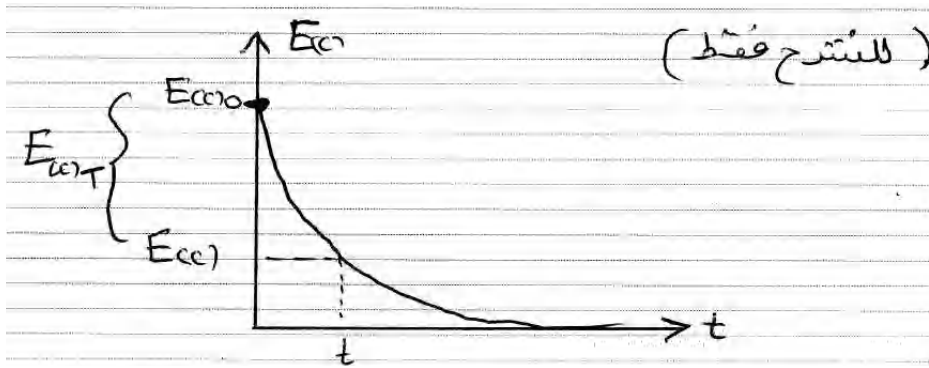
$$\ln E = 1,8 \rightarrow E = e^{1,8} \rightarrow E = 6V$$

بمطابقة المعادلة التفاضلية المعطاة بالمعادلة التفاضلية المتحصل عليها نجد :

$$\frac{1}{\alpha} = RC \rightarrow C = \frac{1}{\alpha R} \rightarrow C = \frac{1}{50 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10^{-6} F$$

5- الطاقة المحولة إلى الناقل الأومي :

عند اللحظة $t = 0$ تكون طاقة المكثفة عظمى $E_{C0} = \frac{1}{2} CE^2$ و عند اللحظة t تكون طاقتها $E_C = \frac{1}{2} Cu_C^2$ ،

و تكون عندئذ حوت طاقة إلى الناقل الأومي قدرها E_{CT} حيث :

$$E_{CT} = E_{C0} - E_C$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} CE - \frac{1}{2} Cu_C^2$$

عند التفريغ لدينا : $u_C = E e^{-\alpha t}$ ($\alpha = \frac{1}{\tau}$) و منه :

$$E_{CT} = \frac{1}{2} CE - \frac{1}{2} C(E e^{-\frac{t}{\tau}})^2$$

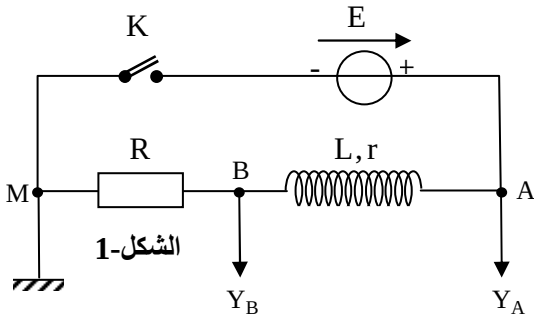
$$E_{CT} = \frac{1}{2} CE - \frac{1}{2} CE^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \rightarrow E_{CT} = \frac{1}{2} CE(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}})$$

عند اللحظة $t = 2,5\tau$:

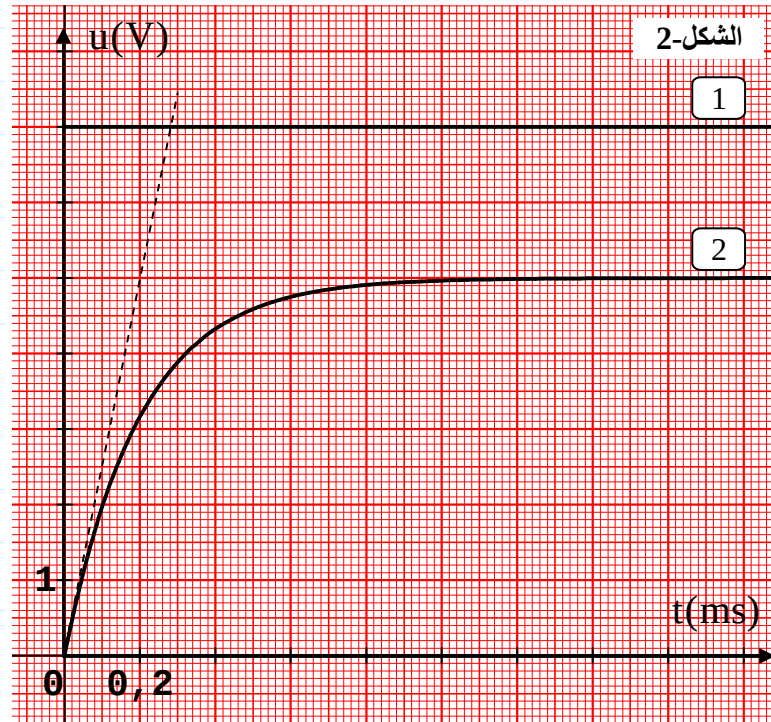
$$E_{CT} = \frac{1}{2} CE(1 - e^{-\frac{2(2,5\tau)}{\tau}})$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} CE(1 - e^{-5}) \rightarrow E_{CT} = \frac{1}{2} CE = E_{C0}$$

أي تحول المكثفة كل طاقتها التي اكتسبها أثناء الشحن ، نستنتج أنه عند اللحظة $t = 2,5\tau$ تتفرغ المكثفة كلياً .

التمرين (15) : (التمرين : 073 في بنك التمارين على الموقع) (**)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و التي تتكون من مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ، قاطعة K ، ناقل أومي مقاومته $R = 100 \Omega$ ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r . + توصل الدارة براسم اهتزاز مهبطي ذي مدخلين Y_A و Y_B (الشكل-1) نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ فيظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) .



- 1- بين أن المنحنى (1) يمثل تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي .
- 2- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$ تكون من الشكل : $L \frac{di}{dt} + (R + r) i = E$ بالاعتماد على المنحنيين (1) ، (2) ، أحسب :
 - أ- القوة المحركة الكهربائية E .
 - ب- شدة التيار الكهربائي الأعظمي I_0 .
 - ج- المقاومة الداخلية للوشيعة r .
- 4- من المنحنى الموافق للمدخل Y_B عين قيمة المقدار $\frac{di}{dt}$ عند اللحظة $t = 0$ ثم استنتج ذاتية الوشيعة L من دون الاستعانة بـ τ .
- 5- أوجد بطريقتين مختلفتين ثابت الزمن τ لهذه الدارة .
- 6- على نفس الشكل-2 المعطى بعد نقله على ورقة إجابتك ، أرسم بشكل كيفي المنحنى u_R الذي تشاهده على المدخل Y_B في حالة استبدال الوشيعة السابقة بوشيعة أخرى لها نفس المقاومة الداخلية و ذاتيتها $L' = 2L$.

الأجوبة :**I- المنحنى الموافق لكل مدخل :**

- من خلال طريقة ربط راسم الاهتزاز بالدائرة ، يظهر المدخل Y_A التوتر بين طرفي المولد في حين يظهر المدخل Y_B التوتر بين طرفي الناقل الأومي .
- من المنحنى (1) التوتر ثابت و هذا يتفق مع التوتر بين طرفي مولد التوتر الذي يكون التوتر بين طرفي ثابت ، إذن المنحنى (1) هو الذي يظهر على المدخل Y_A .
- لدينا : $u_R = R.i$ ، و في ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة يكون :

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_R = R.i = 0$$

- و هذا يتفق مع المنحنى (2) ، بمعنى أن المنحنى (2) يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي و بالتالي هو الذي يظهر على المدخل Y_B .

2- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_b + u_R = E$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + Ri = E$$

$$L \frac{di}{dt} + (R + r)i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R + r}{L}i = \frac{E}{L}$$

3-أ- قيمة E :

- التوتر بين طرفي مولد التوتر ثابت ، و من المنحنى (1) الذي يوافقه يكون : $E = 7 \text{ V}$.
- ب- شدة التيار الأعظمية :

$$u_R = R.i$$

في النظام الدائم أين $i = I_0$ نكتب :

$$u_{R(\infty)} = RI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_R}{R}$$

من المنحنى (2) : $u_{R(\infty)} = 5 \text{ V}$ و منه :

$$I_0 = \frac{5}{100} = 0,05 \text{ A}$$

ج- قيمة r :

$$I_0 = \frac{E}{R + r} \rightarrow R + r = \frac{E}{I_0} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{7}{0,05} - 100 = 40 \Omega$$

4- قيمة $\frac{di}{dt}$ عند $t = 0$:

$$u_R = R.i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_R}{dt}$$

تمثل القيمة $\frac{du_R}{dt}$ ميل مماس المنحنى $u_R(t)$ (المنحنى 2) و بالتالي عند اللحظة $t = 0$ يكون :

$$\begin{aligned} \square \left(\frac{du_R}{dr} \right)_{t=0} &= \frac{5}{0,2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^4 \\ \square \left(\frac{di}{dr} \right)_{t=0} &= \frac{1}{R} \left(\frac{du_R}{dt} \right)_{t=0} = \frac{1}{100} \cdot 2,5 \cdot 10^4 = 250 \end{aligned}$$

- ذاتية الوشيعية L :
من المعادلة التفاضلية يمكن كتابة :

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} + (R + r) \cdot (i)_{t=0} = E$$

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = E - (R + r) \cdot (i)_{t=0} \rightarrow L = \frac{E - (R + r) \cdot (i)_{t=0}}{\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0}}$$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة $(i)_{t=0} = 0$ ولدينا : $\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 250$ ، إذن :

$$L = \frac{7 - 0}{250} = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

5- قيمة τ :
طريقة (1) : (بيانيا)

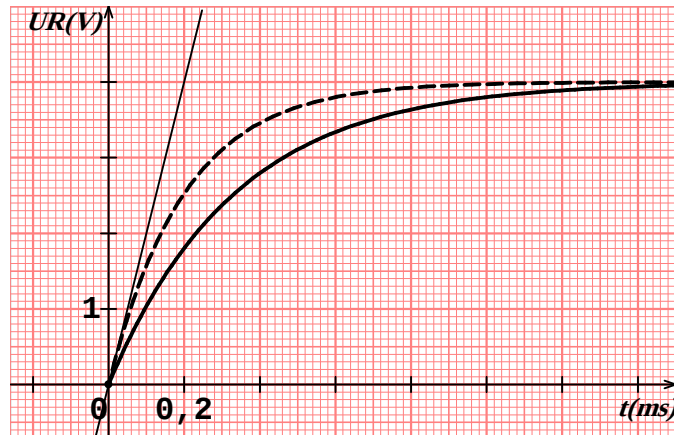
$$t = \tau \rightarrow u_R = 0,63 u_{R\max} = 0,63 \cdot 5 = 2,15 \text{ V}$$

بالإسقاط في المنحنى (2) نجد : $\tau = 0,2 \text{ ms}$.
طريقة (2) : (حسابيا)

$$\tau = \frac{L}{R + r} = \frac{2,8 \cdot 10^{-2}}{100 + 40} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,2 \text{ ms}$$

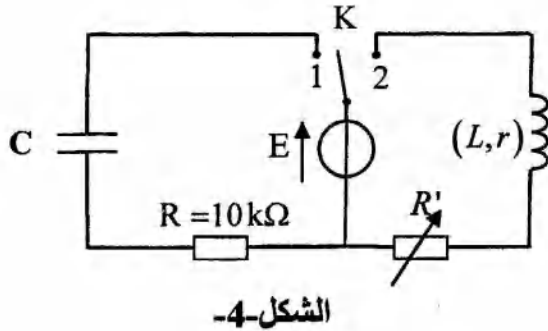
6- المنحنى $u_R(t)$:

بازدياد L يزداد ثابت الزمن $\tau = \frac{L}{R + r}$ و بالتالي يزداد زمن بلوغ النظام الدائم فيكون :



التمرين (16) : (بكالوريا 2018 - علوم تجريبية) (التمرين : 075 في بنك التمارين على الموقع) (**)

بغرض معرفة سلوك و مميزات كل من مكثفة سعتها C و وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L ، نحقق التركيب التجريبي الكهربائي المبين في الشكل-4- و الذي يتكون من العناصر الكهربائية التالية :



- مولد ذي توتر ثابت ، قوته المحركة الكهربائية E .

- مكثفة فارغة سعتها C .

- وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L .

- ناقل أومي مقاومتها $R = 10 \text{ k}\Omega$.

- مقاومة متغيرة R' .

- بادلة K .

1- نضع في اللحظة $t = 0$ البادلة K في الوضع (1) . أنقل

مخطط الدارة على ورقة الإجابة ، و بين عليه جهة مرور التيار

الكهربائي ثم مثل :

- أسهم التوترين بين طرفي المقاومة (u_R) و المكثفة (u_C) .

- كيفية توصيل الدارة براسم اهتزاز ذي ذاكرة لمعاينة التوتر الكهربائي بين طرفي المقاومة ($u_R(t)$) .

2- من القياسات المتحصل عليها و بواسطة برمجية مناسبة ، تمكنا من الحصول على النتائج المدونة في الجدول الآتي :

t(s)	0	5	10	15	20	25	30
i ($10^{-4} \cdot \text{A}$)	6,00	3,63	2,22	1,34	0,81	0,50	0,30
$-\frac{du_R}{dt} (\text{V} \cdot \text{s}^{-1})$	0,60	0,36	0,22	0,13	0,08	0,05	0,03

1-2 - بتطبيق قانون جمع التوترات جد المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار $i(t)$ المار بالدارة .

2-2- أرسم البيان الممثل للدالة $(-\frac{du_R}{dt}) = f(u_R)$ ثم اكتب معادلته الرياضية .

3-2- استنتج قيمة كل من القوة المحركة الكهربائية E و سعة المكثفة C .

4-2- أحسب الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة في اللحظة $t = 25 \text{ s}$.

3- نضع الآن البادلة K في الوضع (2) في لحظة نعتبرها مبدأ لقياس الأزمنة $t = 0$.

1-3- جد المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار $i(t)$.

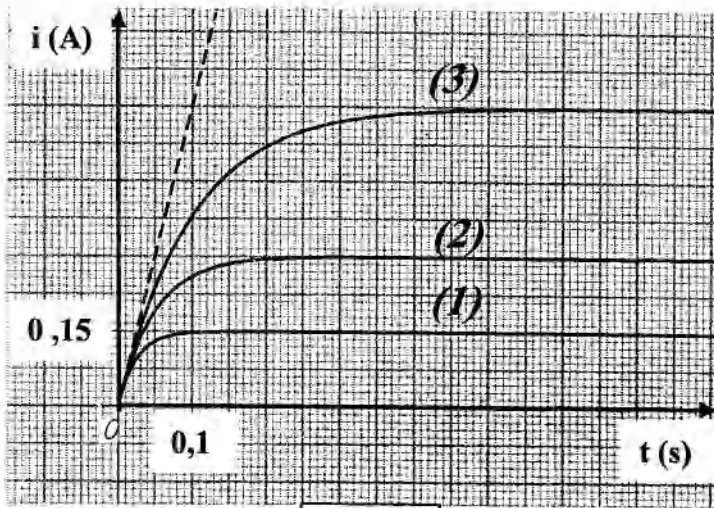
2-3- علما أن حل المعادلة التفاضلية السابقة هو من الشكل $i(t) = A(1 - e^{-Bt})$ ، جد العبارة الحرفية لكل من

الثابتين A و B .

4- يمثل الشكل-5- منحنيات تغيرات شدة التيار المار في الدارة بدلالة الزمن ، من أجل ثلاث قيم مختلفة

للمقاومة R' المدونة في الجدول الآتي :

$R'(\Omega)$	8	18	38
--------------	---	----	----

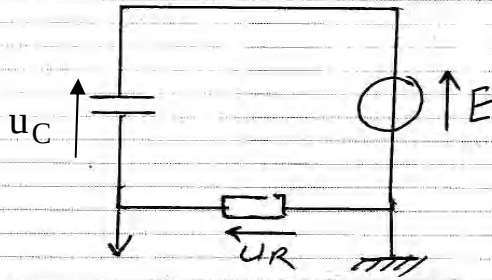


الشكل-5-

- 1-4- أرفق كل منحنى بالمقاومة الموافقة مستعينا بعبارة شدة التيار في النظام الدائم ثم استنتج قيمة مقاومة الوشيعية r .
- 2-4- باسغلال المنحنى (3) : جد قيمة ذاتية الوشيعية L .

الأجوبة :

1- مخطط الدارة وتمثيل اسم التؤثرات وجهة التؤثر وكيفية توصيل الدارة برسم الاهتزازات :



2-1- لمعادلة التفاضلية التي يحققها التؤثر $u_R(t)$:
حسب قانون جمع التؤثرات :

$$u_R + u_C = E$$

$$u_R + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} \dot{q} = 0$$

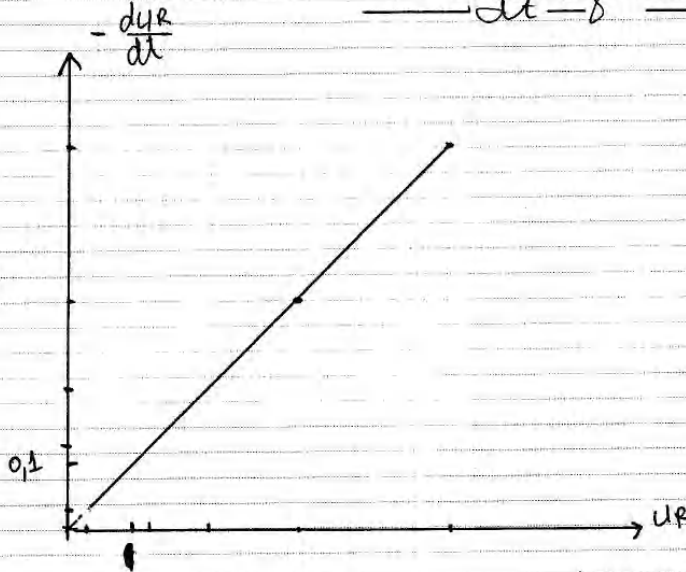
وحيث أن :

$$u_R = Ri \rightarrow \dot{q} = \frac{u_R}{R}$$

يصبح :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0$$

$$2-2- \text{البيان} : -\frac{dU_R}{dt} = f(U_R)$$



- المعادلة الرياضية للبيان :

البيان عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من

$$\text{الشكل} : -\frac{dU_R}{dt} = \theta U_R$$

حيث : θ هو ميل

- من البيان :

$$\theta = \frac{0.6}{6} = 0.1 \text{ s}^{-1}$$

اذن معادلته التيان تكون كما يلي :

$$-\frac{dU_R}{dt} = 0.1 U_R$$

2-3- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات

$$U_R(t) + U_C(t) = E$$

عند اللحظة $t=0$ نكتب :

$$U_R(t=0) + U_C(t=0) = E$$

من الجدول :

$$\bullet t=0 \Rightarrow U_R(t=0) = 6V$$

ومن الشروط الابتدائية :

$$\bullet t=0 \Rightarrow q=0_{(t=0)}$$

يصح :

$$6 + 0 = E \rightarrow E = 6V$$

قيمة C :
بيانيا :

$$-\frac{dU_R}{dt} = 0,1 U_R$$

نظريا ومن خلال المعادلة التفاضلية السابقة :

$$-\frac{dU_R}{dt} = \frac{1}{RC} U_R$$

بالمطابقة :

$$\frac{1}{RC} = 0,1 \rightarrow C = \frac{1}{0,1 \times R}$$

$$C = \frac{1}{0,1 \cdot 10^4} = 10^{-3} F$$

4-2- الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثف عند اللحظة $t=25s$:

$$E_{C(t)} = \frac{1}{2} C U_C^2(t)$$

عند اللحظة $t=25s$ نكتب :

$$E_{C(25s)} = \frac{1}{2} C U_C^2(25s)$$

حسب قانون جمع التوترات :

$$U_R(t) + U_C(t) = E$$

وعند اللحظة $t=25s$ نكتب :

$$U_R(25s) + U_C(25s) = E \rightarrow U_C(25s) = E - U_R(25s)$$

من الجدول $U_R(25s) = 0,5V$ ومنه :

$$U_C(25s) = 6 - 0,5 = 5,5V$$

اذن :

$$E_{C(25s)} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} (5,5)^2 = 1,51 \cdot 10^{-2} J$$

3-4- المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$:
حسب قانون جمع التوترات :

$$U_L(t) + U_R(t) = E$$

$$L \frac{di}{dt} + r i + R i = E$$

$$L \frac{di}{dt} + (R+r) i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} i = \frac{E}{L}$$

3-2- العبارة الحرفية لـ A و B :

$$i = A(1 - e^{-Bt})$$

$$\frac{di}{dt} = A(0 - (-B e^{-Bt})) = AB e^{-Bt}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$AB e^{-Bt} + \frac{R+r}{L} A(1 - e^{-Bt}) = \frac{E}{L}$$

$$AB e^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} + \frac{A(R+r)}{L} e^{-Bt} = \frac{E}{L}$$

$$A e^{-Bt} \left(B - \frac{R+r}{L} \right) + \frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$B - \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow B = \frac{R+r}{L}$$

$$\frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L} \rightarrow A = \frac{E}{R+r}$$

4-1- المنحنى المطوفاً لكل مقاومة

لدينا $I_0 = \frac{E}{R+r}$ من هذه العبارة كلما كانت المقاومة R أكبر كانت شدة التيار العظمى أقل وعلى هذا الأساس يكون :

المنحنى (1) ← $R = 38 \Omega$

المنحنى (2) ← $R = 18 \Omega$

المنحنى (3) ← $R = 8 \Omega$

3-2- العبارة الحرفية لـ A و B :

$$i = A(1 - e^{-Bt})$$

$$\frac{di}{dt} = A(0 - (-B e^{-Bt})) = AB e^{-Bt}$$

بالغوص في المعادلة التفاضلية

$$AB e^{-Bt} + \frac{R+r}{L} A(1 - e^{-Bt}) = \frac{E}{L}$$

$$AB e^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} + \frac{A(R+r)}{L} e^{-Bt} = \frac{E}{L}$$

$$A e^{-Bt} \left(B - \frac{R+r}{L} \right) + \frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$B - \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow B = \frac{R+r}{L}$$

$$\frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L} \rightarrow A = \frac{E}{R+r}$$

4-1- المنحنى الموافق لكل مقاومة

لدينا $I_0 = \frac{E}{R+r}$ من هذه العبارة كلما كانت المقاومة R أكبر كانت شدة التيار العظمى أقل وعلى هذا الأساس يكون :

المنحنى (1) $\leftarrow R = 38 \Omega$

المنحنى (2) $\leftarrow R = 18 \Omega$

المنحنى (3) $\leftarrow R = 8 \Omega$

من أحد المنحنيات الثلاثة وليكن المنحنى (3) الذي يوافق $R = 8 \Omega$ يكون $I_0 = 0,6 A$ ومنه

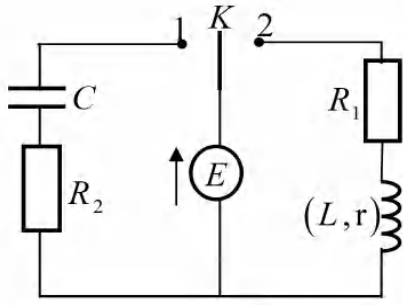
$$r = \frac{6}{0,6} - 8 = 2 \Omega$$

4-2- قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = (R+r) \tau$$

من البيان : $\tau = 0,1 A$ ومنه :

$$L = (8+2) \cdot 0,1 = 1 H$$

التمرين (17) : (التمرين : 076 في بنك التمارين على الموقع) () :**

الشكل 1.

نحقق الدارة الكهربائية الممثلة في الشكل 1 باستعمال العناصر الكهربائية التالية :

- مولد مثالي للتوتر الكهربائي قوته المحركة الكهربائية E .

- ناقلان أوميان $R_1 = R_2 = 100 \Omega$.

- مكثفة فارغة سعتها C .

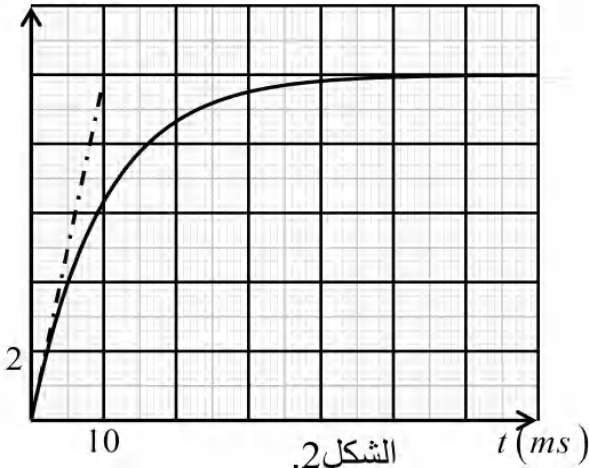
- وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها $r = 25 \Omega$.

- بادلة k .

1. في اللحظة $t = 0$ نضع البادلة k في الوضع 1 .

1.1. اعد رسم دارة الشحن و مثل الجهة الاصطلاحية للتيار المار فيها و بين بسهم التوتر الكهربائي بين طرفي كل عنصر .

$u_C (V)$



الشكل 2.

2.1. جد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

3.1. بين أن $u_C = E (1 - e^{-t/R_2 C})$ حل للمعادلة التفاضلية .

2. بواسطة راسم اهتزاز مهبطي ذو ذاكرة بين أن كيفية توصيله بالدائرة

من أجل الحصول على البيان $u_C = f(t)$. الشكل 2 .

1.2. جد ثابت الزمن τ للدائرة و استنتج سعة المكثفة .

2.2. احسب الشحنة العظمى المخزنة في المكثفة .

3.2. أعط تفسيراً مجهرياً لظاهرة شحن مكثفة .

3. نضع البادلة في الوضع 2 في لحظة نعتبرها مبدأ للأزمنة . بين أن المعادلة التفاضلية للتوتر u_b بين طرفي الوشيعة تعطى بالعلاقة :

$$\frac{du_b}{dt} + \frac{1}{\tau} u_b = \frac{rE}{L}$$

حيث τ ثابت الزمن يطلب تعيين عبارته .

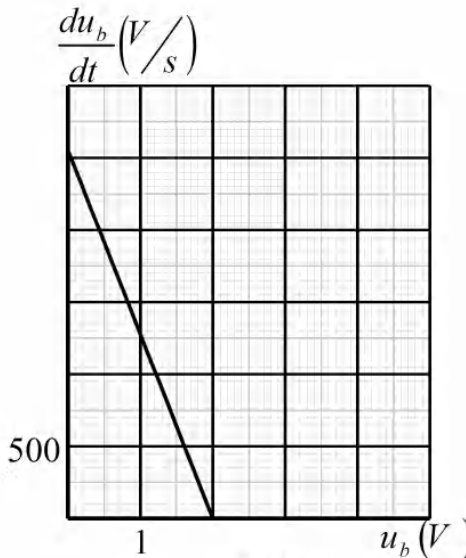
4- بواسطة برمجية مناسبة تمكنا من الحصول على البيان $\frac{du_b}{dt} = f(u_b)$

الشكل 3 .

بتوظيف المعادلة التفاضلية لـ u_b و البيان $\frac{du_b}{dt} = f(u_b)$ جد قيمة كل من :

ثابت الزمن τ ، و استنتج ذاتية الوشيعة L .

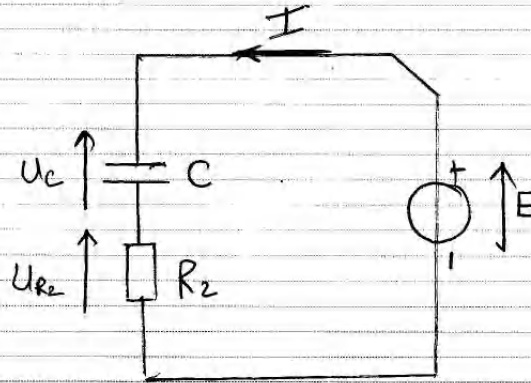
5. أرسم كيفياً و في نفس المعلم البيانات الممثلة للتطورات $u_R(t)$ ، $u_b(t)$ و E .



الشكل 3.

الأجوبة :

1-1- دارلا السحج :

1-2- المعادلة التفاضلية التي يحققها $U_C(t)$ حسب قانون جمع التوترات :

$$U_{R2} + U_C = E$$

$$R_2 i + U_C = E$$

$$R_2 \frac{dq}{dt} + U_C = E$$

$$R_2 C \frac{dU_C}{dt} + U_C = E \longrightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R_2 C} U_C = \frac{E}{R_2 C}$$

1-3- التحقق من الحل :

$$U_C = E(1 - e^{-t/R_2 C})$$

$$\frac{dU_C}{dt} = E \left(0 - \left(-\frac{1}{R_2 C} e^{-t/R_2 C} \right) \right) = \frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2 C}$$

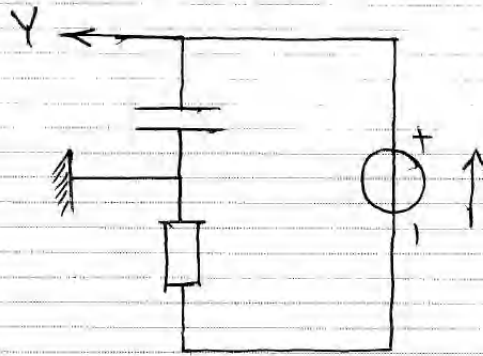
بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2 C} + \frac{1}{R_2 C} \cdot E(1 - e^{-t/R_2 C}) = \frac{E}{R_2 C}$$

$$\frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2 C} + \frac{E}{R_2 C} - \frac{E}{R_2 C} e^{-t/R_2 C} = \frac{E}{R_2 C} \rightarrow \frac{E}{R_2 C} = \frac{E}{R_2 C}$$

اذن الحل المعطى هو فعلا حل للمعادلة التفاضلية

4- كيفية وصل الدارة لرسم الاهتزاز :

1- قيمة τ :

$$\tau = 20 \text{ ms}$$

من بيان الشكل - 2 :

- سعة المكثف :

$$\tau = R_2 C \rightarrow C = \frac{\tau}{R_2} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{200} = 10^{-4} \text{ F}$$

2- الشحنة العظمى المخزنة في المكثف :

$$Q_{\text{max}} = C U_{\text{cmx}}$$

من بيان الشكل - 2 $U_{\text{cmx}} = 8 \text{ V}$ ومنه ✓

$$Q_{\text{max}} = 10^{-4} \times 8 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

3- التفسير المجعري لظاهرة شحن المكثف :

أثناء عملية الشحن يعمل المولد على نقل الإلكترونات الحرة من اللبوس المتصل بالقطب الموجب للمولد إلى اللبوس الآخر ولأن العازل يمنع الإلكترونات من المرور ، فيشحن اللبوس الأول ايجابا والثاني سلبا .

3- المعادلة التفاضلية بدلالة $U_b(t)$:

لدينا :

$$U_b = L \frac{di}{dt} + r i \quad \text{--- (1)}$$

حسب قانون جمع التوترات :

$$U_b + U_R = E$$

$$U_b + R i = E$$

$$i = \frac{E - U_b}{R} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{dU_b}{dt} \quad \text{--- (3)}$$

بتعويض (2) في (3) في (1)

$$U_b = L \left(-\frac{1}{R} \frac{dU_b}{dt} \right) + r \left(\frac{E - U_b}{R} \right)$$

$$U_b = -\frac{L}{R} \frac{dU_b}{dt} + \frac{rE}{R} - \frac{r}{R} U_b$$

$$\frac{L}{R} \frac{dU_b}{dt} + U_b + \frac{r}{R} U_b = \frac{rE}{R}$$

$$\frac{L}{R} \frac{dU_b}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R} \right) U_b = \frac{Er}{R}$$

$$\frac{L}{R} \frac{dU_b}{dt} + \frac{R+r}{R} U_b = \frac{Er}{R}$$

نضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$

$$\frac{dU_b}{dt} + \frac{R}{L} \cdot \frac{R+r}{R} U_b = \frac{Er}{R} \cdot \frac{R}{L}$$

$$\boxed{\frac{dU_b}{dt} + \frac{R+r}{L} U_b = \frac{Er}{L}}$$

لـ قيمتي τ و L :
 بيانياً : المنحنى (U_b) هو مستقيم لا يمر من المبدأ
 معادلته من الشكل :

$$\frac{dU_b}{dt} = \theta U_b + b \quad (1)$$

نظرياً : واعتماداً على المعادلة التفاضلية السابقة :

$$\frac{dU_b}{dt} = -\frac{R+r}{L} U_b + \frac{Er}{L}$$

$$\frac{dU_b}{dt} = -\frac{1}{\tau} U_b + \frac{Er}{L} \quad (2)$$

بالمطابقة بين العلاقة البيانية (1) والنظرية (2) :

$$\bullet \quad -\frac{1}{\tau} = \theta \rightarrow \tau = -\frac{1}{\theta}$$

$$\bullet \quad \frac{Er}{L} = b \rightarrow L = \frac{Er}{b} = \frac{L_{\max} \cdot r}{b}$$

من بياني الشكل 3 :

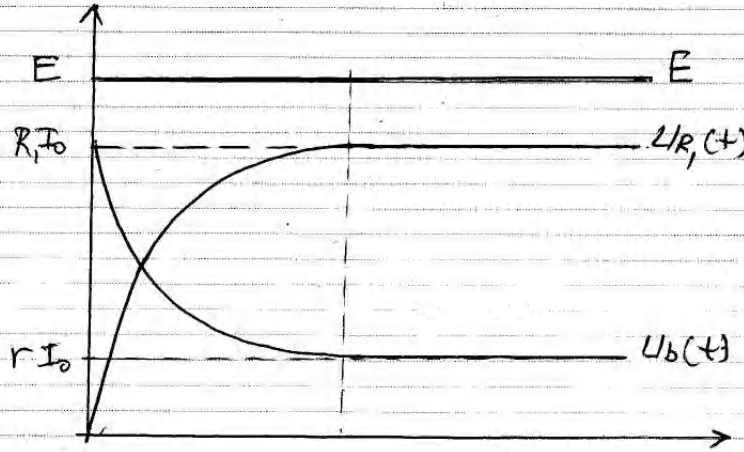
$$\bullet \quad \theta = -\frac{5 \times 500}{2 \times 1} = -1250$$

$$\bullet \quad b = 5 \times 500 = 2500$$

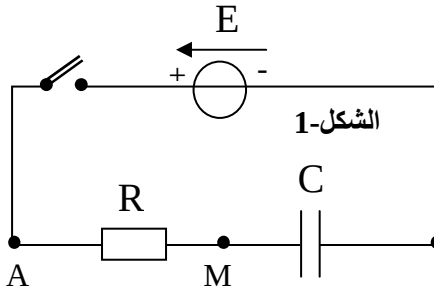
اذن :

$$\tau = -\frac{1}{-1250} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$L = \frac{20 \times 25}{2500} = 0,1 \text{ H}$$

5- البيانات : $E(t)$ ، $U_R(t)$ ، $U_b(t)$ **التمرين (18) :** (التمرين : 031 في بنك التمارين على الموقع) (**)

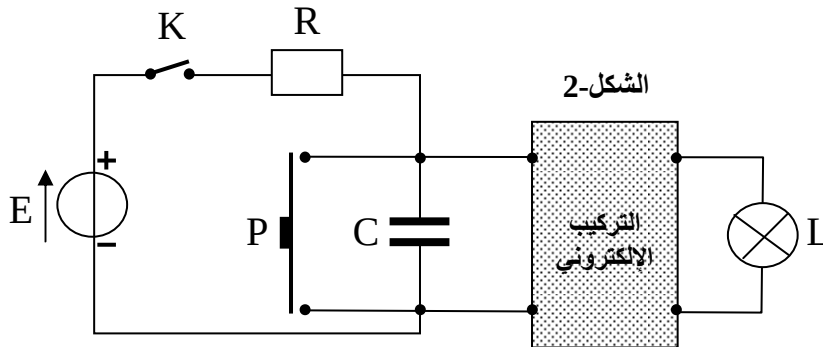
- I- نحقق الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) و التي تتألف من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 12 \text{ V}$ ، مكثفة سعتها $C = 120 \mu\text{F}$ ، ناقل أومي مقاومته R .
- نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$.



- 1- أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

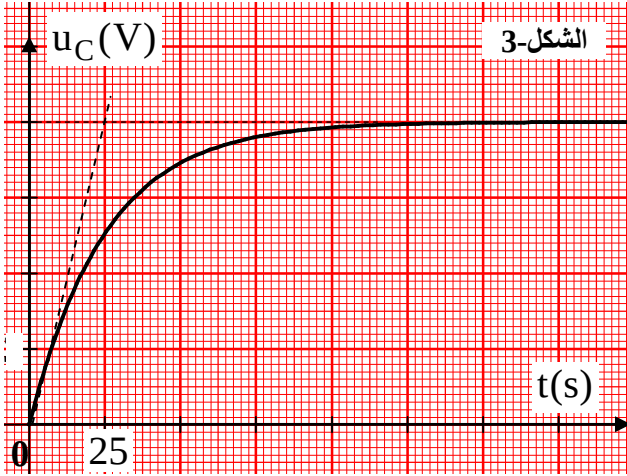
- 2- تحقق من أن العبارة $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

- II- نصل مع ثنائي القطب RC السابق تركيب إلكتروني يتحكم في اشتعال مصباح ، فنحصل على (الشكل-2) الذي يمثل مخطط الدارة لميقاتية الإنارة (minuterie) .



- يشتعل المصباح عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أصغر من قيمة حدية $u_{Cl} = 6 \text{ V}$.
- ينطفئ المصباح عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أكبر من قيمة حدية $u_{Cl} = 6 \text{ V}$ أو يساويه .

- يتحكم في اشتعال المصباح بزر ضاغط P ، عندما نضغط عليه يدخل هذا الأخير في تلامس مع مربطي المكثفة و يسلك سلوك ناقل أومي مقاومته مهمة فتتفرغ المكثفة لحظيا (تصبح شحنتها معدومة بمجرد الضغط على الزر P) و عندما نرفع الضغط على الزر P في اللحظة $t = 0$ تصبح المكثفة موصولة مع المولد من جديد فتبدأ عملية شحن المكثفة إلى أن تشحن كليا ، منحنى (الشكل-3) يمثل تطور



التوتر بين طرفي المكثفة بعد رفع الضغط على الزر P :
 1- عين قيمة ثابت الزمن τ و أحسب مقاومة الناقل الأومي R .
 2- المكثفة قبل الضغط على الزر P مشحونة تحت توتر قدره $E = 12V$ ، المصباح يكون منطفئ أم مشتعل . لماذا ؟
 3- نضغط على الزر الضاغط P ، هل يشتعل المصباح ؟ برر إجابتك .

4- نرفع الضغط عن الزر P :
 أ- أحسب مدة اشتعال المصباح قيمة t_l .
 ب- نريد الزيادة في مدة اشتعال المصباح . ما هو الحل الذي تقترحه برأيك مع الشرح .

الاجوبة :

I - 1 - المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$:
 حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$Ri + u_C = E \rightarrow R \frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

2- التحقق من الحل :

$$\square u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\square \frac{du_C}{dt} = E(0 - (-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau})) = \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau} \rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{RC} e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{RC} e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC} \cdot E(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{RC} e^{-t/\tau} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

II - 1- قيمة τ بيانيا :

يمثل τ لحظة تقاطع مماس المنحنى $u_C(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_C = E$ و على هذا الأساس يكون : $\tau = 25 s$.

- قيمة R :

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{\tau}{C}$$

$$R = \frac{25}{120 \cdot 10^{-6}} = 2.08 \cdot 10^5 \Omega$$

- 2- المصباح منطفئ لأن توتر المكثفة $u_C = 12 \text{ V}$ أكبر من التوتر الحدي $u_C = 6 \text{ V}$ ، علما أن المصباح يكون مشتعل عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أقل من التوتر الحدي ($u_C < u_\ell$) .
- 3- عندما نضغط على الزر P ينعدم التوتر بين طرفي المكثفة ، في هذه الحالة $u_C < u_\ell$ و عليه المصباح يشتعل .

4- أ- تطور حالة المصباح :

أ- حساب مدة اشتعال المصباح قيمة:

- مدة اشتعال المصباح t_ℓ هي لحظة بلوغ التوتر u_C بين طرفي المكثفة قيمته الحدية u_ℓ أي :

$$t = t_\ell \rightarrow u_C = u_\ell$$

بالتعويض في العبارة $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ نجد :

$$u_\ell = E(1 - e^{-t_\ell/\tau}) \rightarrow u_\ell = E - Ee^{-t_\ell/\tau} \rightarrow Ee^{-t_\ell/\tau} = E - u_\ell$$

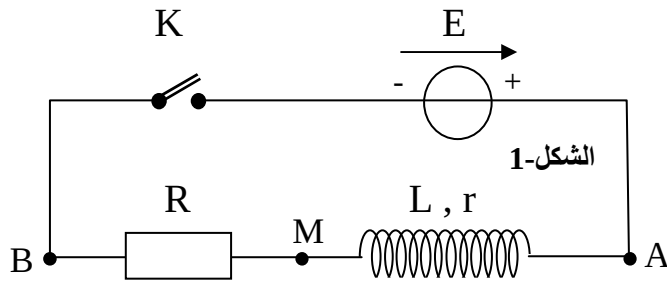
$$e^{-t_\ell/\tau} = \frac{E - u_\ell}{E} \rightarrow -\frac{t_\ell}{\tau} = \ln\left(\frac{E - u_\ell}{E}\right) \rightarrow t_\ell = -\tau \cdot \ln\left(1 - \frac{u_\ell}{E}\right)$$

$$t_\ell = -25 \cdot \ln\left(1 - \frac{6}{12}\right) = 17.32 \text{ s}$$

5- الحل المقترح لزيادة مدة اشتعال المصباح :

لزيادة اشتعال المصباح نزيد من قيمة t_ℓ و هذا يتحقق بزيادة قيمة ثابت الزمن τ (عبارة t_ℓ السابقة) و لزيادة قيمة $\tau = RC$ نزيد من قيمة سعة المكثفة C أو مقاومة الناقل الأومي R أو كلاهما .

التمرين (19) : (التمرين : 030 في بنك التمارين على الموقع) (**) :



الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) تتكون من العناصر التالية موصولة على التسلسل : مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 9 \text{ V}$ ، ناقل أومي مقاومته R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية $r = 10 \Omega$.

في اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K ، بواسطة الـ ExAO يمكن الحصول على المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) و الممثلين لتغيرات التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي و التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة .

1- ما هو الجهاز الذي يمكن وضعه بدلا من ExAO لتسجيل هذين المنحنيين البيانيين .

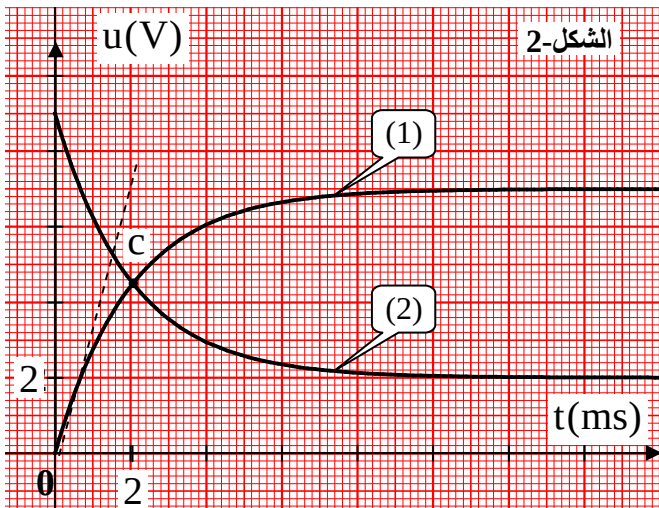
2- أي المنحنيين (1) ، (2) يمثل تغيرات التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي و أيهما يمثل تغيرات التوتر u_b بين طرفي الوشيعة مع التعليل .

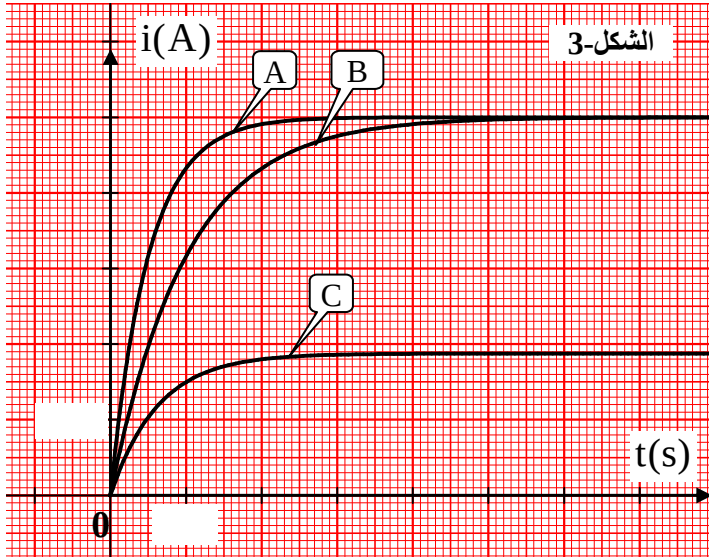
3- اعتمادا على المنحنيين البيانيين (1) ، (2) أوجد :

أ- مقاومة الناقل الأومي R .

ب- ذاتية الوشيعة من دون الاستعانة بقيمة ثابت الزمن τ .

ج- ثابت الزمن τ (تأكد من صحة قيمة الذاتية L المحسوبة سابقا) .





3- المنحنيان (1) ، (2) يتقاطعان في النقطة C .
أ- أثبت أن ثابت الزمن يعبر عنه بالعلاقة :

$$\tau = \frac{t_c}{\ln\left(\frac{2R}{R-r}\right)}$$

حيث t_c هي اللحظة الموافقة لنقطة التقاطع C ،
و علما أن :

$$u_b = \frac{Er}{R+r} + \frac{ER}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = \frac{ER}{R+r} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

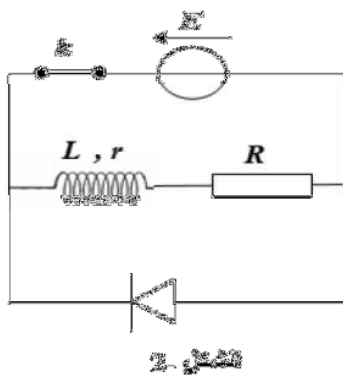
ب- أحسب قيمة ثابت الزمن τ و تأكد من أنها توافق النتيجة المتحصل عليها سابقا .
4- نعيد التجربة ثلاث مرات من أجل قيم مختلفة لمقاومة الناقل الأومي R و قيم مختلفة لذاتية الوشيع L مع تثبيت القوة المحركة الكهربائية E للمولد و المقاومة الداخلية r للوشيع ، وفق الجدول التالي :

	التجربة (1)	التجربة (2)	التجربة (3)
L(mH)	15	10	20
R (Ω)	120	90	90

يبين (الشكل-3) المنحنيات البيانية (A) ، (B) ، (C) الممثلة لتطور شدة التيار الكهربائي i(t) بدلالة الزمن t بالنسبة للتجارب الثلاث من دون ترتيب :

- حدد دون حساب و مع التعليل المنحنى الموافق لكل تجربة .

التمرين (20) : (بكالوريا 2017 - رياضيات) (التمرين : 072 في بنك التمارين على الموقع) (**)



نحقق الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل-2 باستعمال العناصر التالية:

- مولد مثالي للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 6V$.

- وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها الداخلية r .

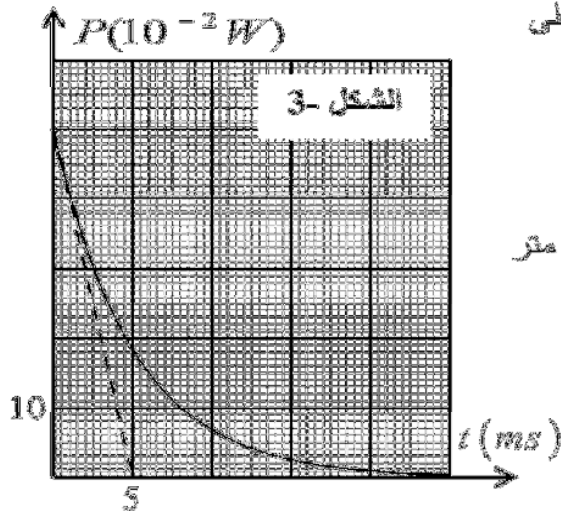
- ناقل أومي مقاومته $R = 50\Omega$ ، قاطعة k وصمام ثنائي .

نغلق القاطعة لمدة زمنية كافية لإقامة التيار .

(1) عند اللحظة $t = 0$ نفتح القاطعة k . ما هي الظاهرة التي تحدث في الدارة ؟

(2) بتطبيق قانون جمع التوترات، جذ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_R(t)$.

(3) علما أن العبارة $u_R(t) = Ae^{-\frac{t}{\alpha}}$ (حيث $A \neq 0$) ، α مقدارين ثابتين) حل للمعادلة التفاضلية، حدد عبارة كلا من A و α بدلالة المقادير المميزة للدارة ثم استنتج عبارة شدة التيار اللحظي $i(t)$.



(4) اكتب عبارة الاستطاعة اللحظية $P(t)$ للتحويل الطاقوي الحادث على

مستوى الناقل الأومي R بدلالة R ، I_0 (شدة التيار العظمى)،

τ (ثابت الزمن للدارة) والزمن t .

(5) سمحت المتابعة الزمنية لتطور الاستطاعة اللحظية $P(t)$ للتحويل

الطاقوي الحادث على مستوى الناقل الأومي R بواسطة لاقط الواط متر

برسم المنحنى الممثل في الشكل-3.

(أ) برهن أن المماس للمنحنى البياني عند اللحظة $t = 0$ يقطع

محور الأزمنة في النقطة ذات الفاصلة $t' = \frac{\pi}{2}$ ثم استنتج

قيمة ثابت الزمن τ للدارة.

(ب) اعتمادا على بيان الشكل-3، احسب الشدة العظمى للتيار المار في الدارة.

(ج) استنتج قيمة كل من مقاومة الوشعة r وذاتيتها L .

(6) أثبت أن زمن تقلص الاستطاعة الأعظمية المصروفة في الناقل الأومي R إلى النصف هو: $t_{r/2} = \frac{\pi}{2} \ln 2$ ، ثم

أوجد قيمته.

تكبير: $P(t) = R I^2(t)$

الأجوبة :

1- الظاهرة التي تحدث في الدارة هي ظاهرة التحريض الذاتي.

2- اطعارة التقاضية التي يحققها $U_R(t)$ حسب قانون جمع التوترات :

$$U_b + U_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + r i + R i = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + (R+r) i = 0$$

$$L i R = R i \rightarrow i = \frac{U_R}{R}$$

لدينا :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU_R}{dt}$$

ومنه يصبح :

$$\frac{L}{R} \frac{dU_R}{dt} + \frac{R+r}{R} U_R = 0$$

يُضرب الطرفين في $\frac{R}{L}$:

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R}{L} \frac{R+r}{R} U_R = 0$$

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R+r}{L} U_R = 0$$

3- عبارة A و B :

$$U_R = A e^{-t/\alpha}$$

$$\frac{dU_R}{dt} = -\frac{A}{\alpha} e^{-t/\alpha}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{A}{\alpha} e^{-t/\alpha} + \frac{R+r}{L} (A e^{-t/\alpha}) = 0$$

$$-\frac{A}{\alpha} e^{-t/\alpha} + \frac{(R+r)A}{L} e^{-t/\alpha} = 0$$

$$A e^{-t/\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{(R+r)A}{L} \right) = 0$$

لكي تتحقق المطاوعة يجب أن يكون :

$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{L}{R+r}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t=0 \rightarrow U_R = U_{Rmax} = R I_{max}$$

بالتعويض في العبارة : $U_R(t)$

$$R I_{max} = A e^{-\frac{t}{\alpha}} \rightarrow A = R I_{max} = \frac{R E}{R+r}$$

- عبارة شدة التيار اللحظي :

$$U_R = A e^{-t/\alpha}$$

وجدنا سابقاً : $A = R I_{max}$ ، $\alpha = \frac{L}{R+r}$ ومنه :

$$U_R = R I_{max} e^{-\frac{R+r}{L} t} \quad (1)$$

ولدينا :

$$U_R(t) = R \hat{I}(t) \rightarrow \hat{I}(t) = \frac{U_R(t)}{R} \quad (2)$$

بتعويض (1) في (2) :

$$\hat{I}(t) = \frac{R I_{max}}{R} e^{-\frac{R+r}{L} t}$$

أذن :

$$\hat{I}(t) = I_{max} e^{-\frac{R+r}{L} t} = I_{max} e^{-t/\tau}$$

حيث : $\tau = \frac{L}{R+r}$

4- عبارة الاستطاعة اللحظية للتحويل الطاقوي بمفعول حول $P(t)$

$$P = U \times i = R i \times i = R i^2$$

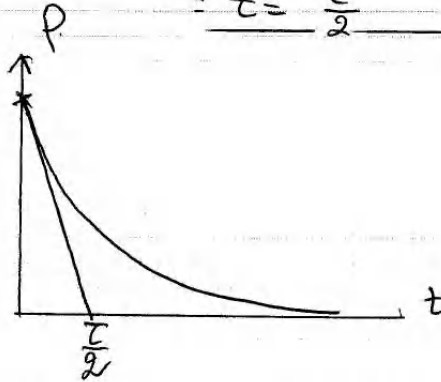
لدينا سابقاً : $i = I_{max} e^{-t/\tau}$ ومنه :

$$P = R I_{max}^2 (e^{-t/\tau})^2$$

$$P = R I_{max}^2 e^{-2t/\tau} = P_{max} e^{-2t/\tau}$$

حيث : $P_{max} = R I_{max}^2$

5- اثنان آت هماس المنحنى عند اللحظة $t=0$ بقطع محور الزمان في $t = \frac{\tau}{2}$



نكتب معادلة هماس المنحنى $P(t)$ عند اللحظة $t=0$ والتي من الشكل :

$$P = at + b$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad a &= \left(\frac{dP}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{d(P_{max} e^{-2t/\tau})}{dt} \right)_{t=0} = \left(P_{max} \frac{d e^{-2t/\tau}}{dt} \right)_{t=0} \\ &= \left(P_{max} \cdot \frac{-2}{\tau} e^{-2t/\tau} \right)_{t=0} = -\frac{2 P_{max}}{\tau} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad b = (P)_{t=0} = (P_{max} e^{-2t/\tau})_{t=0} = P_{max}$$

ومن معادلة هماس تكون كما يلي :

$$P = -\frac{2 P_{max}}{\tau} t + P_{max}$$

عند تقاطع المحاور مع محور الزمن يكون $P=0$ ومنه

$$0 = -\frac{2P_{max}}{\tau} t' + P_{max}$$

$$\frac{2P_{max}}{\tau} t' = P_{max}$$

$$\frac{2}{\tau} t' = 1 \rightarrow t = \frac{\tau}{2}$$

قائمة τ :
من البيانات : $\frac{\tau}{2} = 5ms \rightarrow \tau = 10ms$

ب- شدة التيار العظمى :
من البيانات : $P_{max} = 50 \cdot 10^{-2} W$ ولدنياً

$$P_{max} = R I_{max}^2 \rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}}$$

$$I_{max} = \sqrt{\frac{0.5}{50}} = 0.1 A$$

قائمة r :
 $I_{max} = \frac{E}{R+r} \rightarrow R+r = \frac{E}{I_{max}}$

$$r = \frac{E}{I_{max}} - R = \frac{6}{0.1} - 50 = 10 \Omega$$

قائمة L :
 $\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = \tau (R+r)$

$$L = 10 \times 10^{-3} (50 + 10) = 0.6 H$$

ج- إثبات $t_{x2} = \frac{\tau}{2} \ln 2$:
 $P = P_{max} e^{-\frac{2t}{\tau}}$

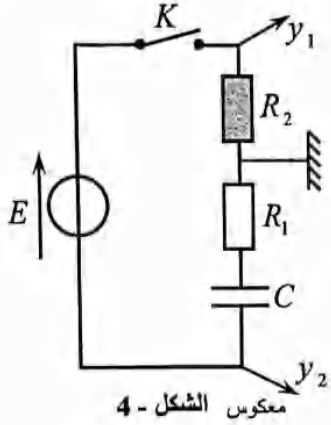
حسب تعريف t_{x2} :
 $t = t_{x2} \rightarrow P = \frac{P_{max}}{2}$

بالعويض :
 $\frac{P_{max}}{2} = P_{max} e^{-\frac{2t_{x2}}{\tau}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{2t_{x2}}{\tau}}$

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{2t_{x2}}{\tau} \rightarrow -\ln 2 = -\frac{2t_{x2}}{\tau}$$

$$t_{x2} = \frac{\tau}{2} \ln 2$$

قائمة t_{x2} :
 $t_{x2} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2} \ln 2 = 3.46 \cdot 10^{-3} s = 3.46 ms$

التمرين (21) : (بكالوريا 2016 - علوم تجريبية) (التمرين : 033 في بنك التمارين على الموقع) (***)

نركب الدارة الكهربائية الموضحة بالشكل-4 و المؤلفة من :

- مولد كهربائي للتوتر الثابت E .

- مكثفة غير مشحونة سعتها C .

- ناقلين أوميين $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ و R_2 غير معلومة .

- قاطعة K .

نوصل الدارة الكهربائية براسم اهتزاز مهبطي ذي ذاكرة كما موضح على الشكل-4 ثم نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0$ ، فنشاهد على الشاشة المنحنيين البيانيين (a) و (b) (الشكل-5) .

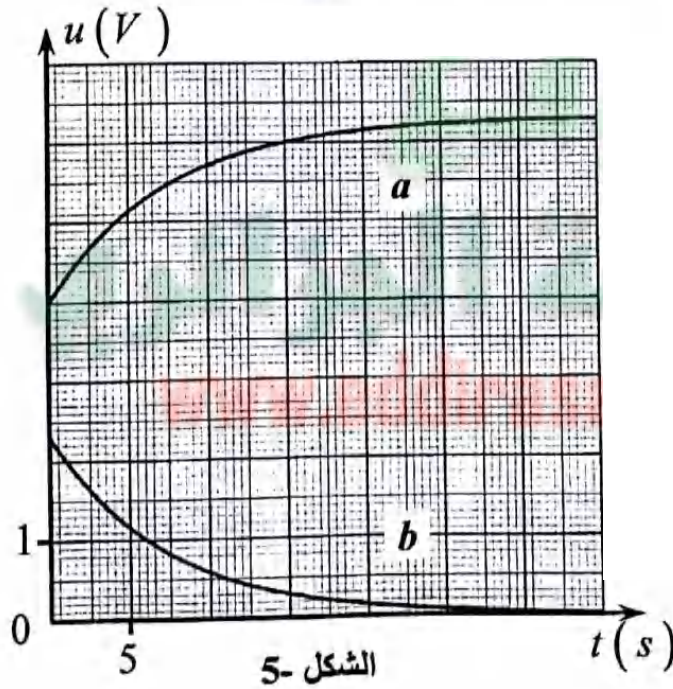
1- ارفق كل منحنى بالمدخل الموافق له مع التبرير .

2- اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$ للتيار الكهربائي في الدارة .

3- أوجد عبارة الشدة I_0 للتيار الأعظمي المار في الدارة .

4- استنتج عند اللحظة $t = 0$ عبارة التوتر بين طرفي الناقل الأومي R_2 بدلالة E ، R_1 و R_2 .

5- اعتمادا على البيانيين ، استنتج قيمة كل من E ، I_0 ، R_2 و C .

**الأجوبة :**

1- المنحني الموافق لكل مدخل :

- في المدخل Y_1 يظهر التوتر $u_1 = u_{R2}$ بين طرفي الناقل الأومي R_2 .

- في المدخل Y_2 يظهر التوتر $|u_2| = u_{R1} + u_C$ بين طرفي الناقل الأومي R_1 و المكثفة معا .

- من خصائص ثنائي القطب RC .

$$t = \infty \rightarrow i = 0 \begin{cases} \rightarrow u_{R1} = R_1 i = 0 \\ \rightarrow u_{R2} = R_2 i = 0 \\ \rightarrow u_C = E \end{cases}$$

و عليه :

$$t = 0 \rightarrow u_1 = u_{R2} = 0$$

$$t = 0 \rightarrow u_2 = u_{R1} + u_C = E \neq 0$$

إذن : المنحنى $Y_1 \leftarrow b$ المنحنى $Y_2 \leftarrow a$ 2- المعادلة النفاضلية التي تحققها $i(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R2} + u_{R1} + u_C = E$$

$$R_2 \cdot i + R_1 \cdot i + \frac{q}{C} = E \rightarrow (R_1 + R_2)i + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$(R_1 + R_2) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

و حيث أن $\frac{dq}{dt} = i$ يصبح :

$$(R_1 + R_2) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} i = 0$$

3- عبارة I_0 :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R2} + u_{R1} + u_C = E \rightarrow R_2 i + R_1 i + u_C = E$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$R_2 I_0 + R_1 I_0 + 0 = E$$

$$(R_1 + R_2) I_0 = E \rightarrow I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

4- عبارة u_{R2} عند $t = 0$ بدلالة E ، R_1 ، R_2 :

$$u_{R2} = R_2 \cdot i$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ و منه :

$$u_{R2(t=0)} = R_2 \cdot I_0$$

و حيث أن $I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$ يصبح :

$$u_{R2(t=0)} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

5- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_1 + |u_2|$$

اعتمادا على المنحنى (a) الموافق للتوتر u_b و المنحنى (b) الموافق للتوتر u_1 :

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow u_1 = 2.3 \text{ V} \\ u_2 = 4 \text{ V} \end{cases} \rightarrow E = 2.3 + 4 = 6.3 \text{ V}$$

أو :

$$\bullet t = \infty \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \text{ V} \\ u_2 = 6.3 \text{ V} \end{cases} \rightarrow E = 0 + 6.3 = 6.3 \text{ V}$$

- قيمة I_0 :

$$u_2 = u_{R1} + u_C \rightarrow u_2 = R_1 \cdot i + u_C$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$u_{2(t=0)} = R_1 \cdot I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R2(t=0)}}{R_1}$$

من المنحنى (a) الموافق لـ u_2 لدينا : $u_{2(t=0)} = 4 \text{ V}$ و منه :

$$I_0 = \frac{4}{10^3} \rightarrow I_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

قيمة R_2 :

طريقة (1) :

$$u_{R2} = R_2 \cdot i$$

عند اللحظة $t = 0$ أين $i = I_0$ يكون :

$$u_{R2(t=0)} = R_2 \cdot I_0 \rightarrow R_2 = \frac{u_{R2(t=0)}}{I_0}$$

من المنحنى (b) الموافق لـ u_1 لدينا : $u_{R2(t=0)} = 2.3 \text{ V}$ و منه :

$$R_2 = \frac{2.3}{4 \cdot 10^{-3}} = 575 \Omega$$

طريقة (2) :

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} \rightarrow R_1 + R_2 = \frac{E}{I_0} \rightarrow R_2 = \frac{E}{I_0} - R_1 \rightarrow R_2 = \frac{6.3}{4 \cdot 10^{-3}} - 10^3 = 575 \Omega$$

قيمة C :نحسب أولاً قيمة τ :من المنحنى (b) الموافق لـ u_1 :

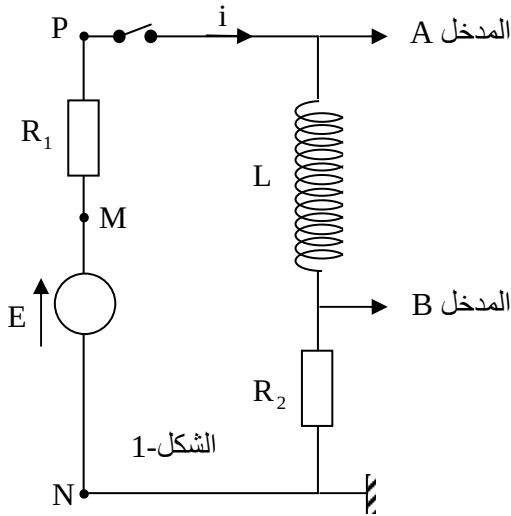
$$t = \tau \rightarrow u_1 = 0.37 u_{10} = 0.37 \cdot 2.3 = 0.851 \text{ V}$$

بالإسقاط مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار :

$$\tau = 1.5 \cdot 5 = 7.5 \text{ s}$$

و لدينا :

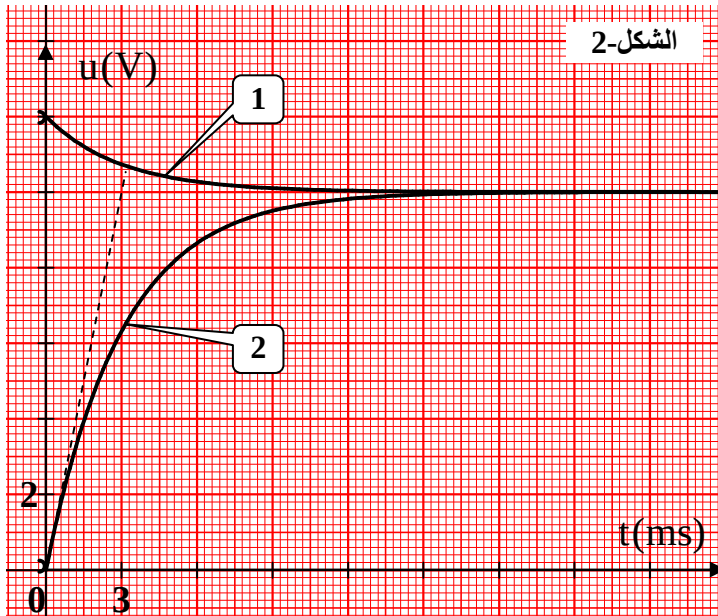
$$\tau = (R_1 + R_2) C \rightarrow C = \frac{\tau}{R_1 + R_2} \rightarrow C = \frac{7.5}{10^3 + 575} \approx 4.76 \cdot 10^{-3} \text{ F}$$

التمرين (22) : (التمرين : 034 في بنك التمارين على الموقع) (***)

- الدائرة الكهربائية الممثلة في (الشكل-1) تتكون من :
- مولد كهربائي للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E .
 - وشيعة تحريضية ذاتيتها L و مقاومتها مهمة .
 - قاطعة K .

- ناقلين أوميين مقاومتها R_1 مجهولة و $R_2 = 40 \Omega$.
- راسم اهتزاز ذو ذاكرة .

نوصل الدائرة براسم الاهتزاز كما مبين في (الشكل-1) ثم نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ فنشاهد على الشاشة المنحنيين (1) و (2) كما في (الشكل-2) .



- 1- إعتادا على (الشكل-2) ، عين المنحنى الذي يمثل $u_{PN}(t)$ و المنحنى الذي يمثل $u_{R2}(t)$ مع التعليل .
- 2- إعتادا على المنحنيين (1) ، (2) أوجد :
 - أ- القوة المحركة الكهربائية E للمولد .
 - ب- شدة التيار الأعظمي I_0 المار بالدائرة .
- 3- أوجد المعادلة التفاضلية التي تعطي شدة التيار $i(t)$.

- 4- حل المعادلة التفاضلية السابقة هو $i = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$ أوجد عبارتي الثابتين I_0 و τ بدلالة الثوابت المميزة
- 5- أوجد قيمة المقاومة R_1 و ذاتية الوشيعة L .

الاجوبة :

1- المنحنى الموافق لكل توتر :

■ التوتر u_{PN} :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_{MB} + u_{PN}$$

$$u_{PN} = E + u_{MB} \rightarrow u_{PN} = E + u_{R1}$$

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{PN} = E \neq 0$$

$$u_{R2} = R_2 \cdot i$$

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{R2} = 0$$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

و هذا يتفق مع المنحنى C_1 .

التوتر u_{R2} :

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

و هذا يتفق مع المنحنى C_2 .

2-أ- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_{R1} + u_{PN}$$

$$u_{PN} = E + u_{R1} \rightarrow u_{PN} = E - R \cdot i(t)$$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{PN(t=0)} = E$$

من المنحنى (C_1) الموافق لـ $u_{PN}(t)$:

$$t = 0 \rightarrow u_{PN} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ V} \rightarrow E = 12 \text{ V}$$

ب- قيمة I_0 :

$$u_{R2} = R_2 \cdot i$$

في النظام الدائم نكتب :

$$u_{R2(\infty)} = R_2 \cdot I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R2(\infty)}}{R_2}$$

من المنحنى (C_2) الموافق لـ $u_{R2}(t)$:

$$u_{R2(\infty)} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ V}$$

إذن :

$$I_0 = \frac{10}{40} = 0.25 \text{ A}$$

3- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$:

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R1} + u_b + u_{R2} = E$$

$$R_1 i + L \frac{di}{dt} + R_2 i = E$$

$$L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2) i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{L} i = \frac{E}{L}$$

4- عبارتي τ ، I_0 :

$$i = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{R_1 + R_2}{L} I_0 (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{R_1 + R_2}{L} I_0 - \frac{R_1 + R_2}{L} I_0 e^{-t/\tau} = \frac{E}{L}$$

$$I_0 e^{-t/\tau} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{R_1 + R_2}{L} \right) + \frac{(R_1 + R_2) I_0}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي نتحقق المساواة :

$$\frac{1}{\tau} - \frac{R_1 + R_2}{L} = 0 \rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{L} \rightarrow \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{(R_1 + R_2)I_0}{L} = \frac{E}{L} \rightarrow I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

5- قيمة R_1 :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R1} + u_{PN} = E \rightarrow u_{PN} = E - u_{R1} \rightarrow u_{PN} = E - R_1 i$$

في النظام الدائم ($t = \infty$) أين يكون $i = I_0$ نكتب :

$$u_{PN(\infty)} = E - R_1 I_0$$

$$R_1 I_0 = E - u_{PN(\infty)} \rightarrow R_1 = \frac{E - u_{PN(\infty)}}{I_0} \rightarrow R_1 = \frac{12 - 10}{0,25} = 8 \Omega$$

قيمة L :من المنحنى (2) : $\tau = 3 \text{ ms}$.

و لدينا سابقا :

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} \rightarrow L = \tau (R_1 + R_2) \rightarrow L = 3 \cdot 10^{-3} (8 + 40) = 1,44 \text{ H}$$

** الأستاذ : فرقاني فارس **

ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم

الخروب - قسنطينة

Fares_Fergani@yahoo.Fr

نرجو إبلاغنا عن طريق البريد الإلكتروني بأي خلل في الدروس أو التمارين و حلولها .
وشكرا مسبقا

لتحميل نسخة من هذا الملف و للمزيد . أدخل موقع الأستاذ :

www.sites.google.com/site/faresfergani