



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}$.

1/ أ/ احسب كل من u_1 ، u_2 و u_3 .

ب/ أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ/ جد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، ثم احسب حدّها الأول.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا تُفرق بينها عند اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة ب: 1؛ 1؛ 2؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة ب: 0؛ 1؛ 2 وكريتان خضراوان مرقمتان ب: 0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة ب: 0. نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الأحداث A : "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة"، و B : "الكرات المسحوبة تحمل لونين فقط"، و C : "الكرات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) بيّن أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$ ، ثم احسب $P(A)$ و $P(C)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نسحب الآن عشوائيا على التوالي ودون إرجاع أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث D : "الكرات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"، أحسب $P(D)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10.
ب. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414} .
2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بحدّها العام $u_n = 2^n$.
أ. تحقّق من أنّ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية.
نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \dots + 5 + 2^n$.
ب. أوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I- لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.
1 احسب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
2 ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
3 أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.
4 استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
II- لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 4 cm)
1 أثبت أنّه من أجل كل x من \mathbb{R} , $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.
2-أ) أثبت أنّ: $f(\alpha) = \alpha + 1$.
ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
3-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f) .
ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .
4-أ) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
ب- ارسم (D) و (C_f) .



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، مثلّ المستقيم (Δ) و (D) اللذين معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ و $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على \mathbb{N} بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$.

أ- مثلّ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها).

ب- عيّن احداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

ج- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربا.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ- جد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$ ، أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- بيّن أنّ $u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د- احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم استنتج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5. نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين في آن واحد.

1/ احسب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي.

2/ احسب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x - y|$ حيث x و y رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) ما هي قيم المتغيّر العشوائي X ؟

ب) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E) \dots 2002 = 4862x - 1430y$ حيث x و y عدادان صحيحان.

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862، 1430 و 2002.

2) أ. بيّن أنّ (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .

ب. حل المعادلة (E) .

3) a و b عدادان طبيعيان حيث $(a; b)$ حل للمعادلة (E) ، نضع: $d = PGCD(a; b)$.

أ. عيّن القيم الممكنة لـ d .

ب. عيّن الثنائيات $(a; b)$ عندما $d = 7$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

(1) ادرس تغيّرات الدالة g على $]0; +\infty[$.

(2) احسب $g(1)$ ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$

نسمي (C) المنحنى المُمثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول

2 cm).

(1) أ- احسب نهاية الدالة f عند 0 ، فسّر هندسيا هذه النتيجة.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x + 2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D) .

(2) أ- أثبت أنّه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

(3) أ- عيّن إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D) .

ب- اكتب معادلة للمستقيم (T) ، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e . (تذكّر أنّ e هو العدد الذي

يُحقق $\ln e = 1$)

(4) أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0; 1[$.

(5) ارسم المستقيمين (D) ، (T) والمنحنى (C) .

التصحيح المفصل للكالوريا التجريبية/ مادة الرياضيات/ ثالثة تقني رياضي 2021

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3} \end{cases} \text{ لدينا:}$$

أ/ حساب كل من u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}(4) + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3} \text{ لدينا:}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{13}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{13}{4} + \frac{4}{3} = \frac{39+16}{12} = \frac{55}{12} \text{ و}$$

$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{55}{12}\right) + \frac{4}{3} = \frac{55}{16} + \frac{4}{3} = \frac{165+64}{48} = \frac{229}{48} \text{ و}$$

ب/ إعطاء تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، فتخميني حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) فهي متزايدة تماما.

2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ/ إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، ثم حساب حدّها الأول:

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n \text{ معناه: } v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$$

$$\alpha u_{n+1} - 4(\alpha + 1) = \frac{3}{4}v_n \text{، تكافئ: } \alpha u_{n+1} - 4(\alpha + 1) = \frac{3}{4}(\alpha u_n - 4(\alpha + 1))$$

$$\alpha \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}\right) - 4(\alpha + 1) = \frac{3}{4}(\alpha u_n - 4(\alpha + 1))$$

$$\frac{3}{4}\alpha u_n + \frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = \frac{3}{4}\alpha u_n - 3\alpha - 3$$

$$\frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = -3\alpha - 3$$

$$4\alpha - 12\alpha - 12 = -9\alpha - 9$$

$$-8\alpha + 9\alpha = 12 - 9$$

$$\alpha = 3 \text{ وبالتالي: } v_n = 3u_n - 16 \text{ (بالتعويض نجد:)}$$

$$v_n = 3u_n - 16 = 3(4) - 16 = 12 - 16 = -4$$

$$u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_n = 3u_n - 16 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$u_n = \frac{v_n + 16}{3}$$

$$= \frac{v_n}{3} + \frac{16}{3}$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{-4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{3}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{3^{-1}}{4^{-1}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-1}\right) - \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) \text{ لدينا:}$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{16}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$$

إذن: (u_n) متزايدة تماما.

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \text{ لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0 \text{ وبما: } -1 < \frac{3}{4} < 1 \text{ فإن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{16}{3} \text{ ومنه:}$$

3) كتابة بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

$$S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n \text{ لدينا:}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 v_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= -4(1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n)$$

$$= -4[1(n - 0 + 1)]$$

$$= -4n - 4$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n - 4) = +\infty$$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا تفرق بينها عند

اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0؛ 1؛ 2 وكرتان خضراوان

مرقمتان بـ: 0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة بـ: 0.

عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات في آن واحد من هذا

$$\text{الصندوق هو: } C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

نعتبر الأحداث A: "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة"،

B: "الكرات المسحوبة تحمل لونين فقط"، و C: "الكرات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) تبيان أن $P(B) = \frac{29}{105}$ ، ثم حساب $P(A)$ و $P(C)$:

لدينا:

نعتبر الحدث D : "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"،

حساب $P(D)$:

$$P(D) = \frac{4 \times 3 \times 3 \times 2}{5040} = \frac{72}{5040} = \frac{1}{70}$$

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقى قسمة العدد

2^n على 10:

$$2^0 \equiv 1 [10]$$

$$2^1 \equiv 2 [10]$$

$$2^2 \equiv 4 [10]$$

$$2^3 \equiv 8 [10]$$

$$2^4 \equiv 6 [10]$$

$$2^5 \equiv 2 [10]$$

ومنه: بواقى قسمة 2^n على 10 تُشكل متتالية دورية، دورها 5 وبالتالي:

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$k \in \mathbb{N}^*$
$2^n \equiv$	2	4	8	6	[10]

ب. استنتاج رقم أحاد العدد 1994^{1414} :

$$1994 \equiv 2^2 [10] \text{ أي: } 1994 \equiv 4 [10]$$

$$1994^{1414} \equiv 2^{2828} [10] \text{ ومنه:}$$

$$\text{وبمأن: } 2828 = 5(565) + 3 \text{، فإن:}$$

$$1994^{1414} \equiv 6 [10]$$

إذن: رقم أحاد العدد 1994^{1414} هو 6.

$$u_n = 2^n \text{ المتتالية المعرفة بحدّها العام } 2^n \text{ (} u_n \text{)}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

أ. التحقق من أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية:

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2u_n$$

إذن: (u_n) متتالية هندسية.

ب. **لدينا:** من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ,

$$S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \dots + 5 + 2^n$$

إيجاد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلاً للقسمة

على 10:

أولاً نكتب S_n بدلالة n :

$$S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + \dots + (5 + 2^n)$$

$$= 5(n - 1 + 1) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

$$= 5n + u_1 \left(\frac{1 - 2^{n-1+1}}{1-2} \right)$$

$$= 5n + 2 \left(\frac{1 - 2^n}{-1} \right)$$

$$= 5n + 2(2^n - 1)$$

S_n يقبل القسمة على 10، **معناه:** $S_n \equiv 0 [10]$

$$5n + 2(2^n - 1) \equiv 0 [10] \text{ أي:}$$

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$k \in \mathbb{N}^*$
$2^n \equiv$	2	4	8	6	[10]
$5n \equiv$	5	0	5	0	[10]
$S_n \equiv$	7	6	9	0	[10]

إذن: $n = 5k + 3$ (حيث $k \in \mathbb{N}^*$)

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_3^3 + C_4^2 \times C_3^2 + C_4^3 \times C_3^1 + C_4^4 \times C_3^0}{C_{10}^4} = \frac{4 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 3 + 6 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1}{210} = \frac{58}{210} = \frac{29}{105}$$

حساب $P(A)$ و $P(C)$:

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^4} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{210} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_4^3 + C_6^2 \times C_4^2 + C_6^3 \times C_4^1 + C_6^4}{C_{10}^4}$$

$$= \frac{6 \times 4 + 15 \times 6 + 20 \times 4 + 15}{210}$$

$$= \frac{205}{210}$$

$$= \frac{41}{42}$$

$$= \frac{41}{57}$$

(2) لدينا: X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمه

الرياضياتي $E(X)$:

• قيم المتغير العشوائي X هي: 1، 2، 3، 4.

• $X = 1$ ، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل نفس اللون"

$$\text{ومنه: } P(X = 1) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$$

$X = 2$ ، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"

$$\text{ومنه: } P(X = 2) = P(B) = \frac{58}{210}$$

$X = 4$ ، معناه: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"

$$\text{ومنه: } P(X = 4) = P(A) = \frac{24}{210}$$

$X = 3$ ، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل ثلاث ألوان مختلفة"

$$\text{ومنه: } P(X = 3) = 1 - \left(\frac{1}{210} + \frac{58}{210} + \frac{24}{210} \right) = \frac{127}{210}$$

لُخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{58}{210}$	$\frac{127}{210}$	$\frac{24}{210}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$\text{لدينا: } E(X) = 1 \times \frac{1}{210} + 2 \times \frac{58}{210} + 3 \times \frac{127}{210} + 4 \times \frac{24}{210}$$

$$= \frac{1 + 116 + 381 + 96}{210}$$

$$= \frac{594}{210}$$

$$= \frac{99}{35}$$

(3) عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات على التوالي ودون إرجاع من هذا الصندوق هو:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- دالة معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

(1) حساب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها: معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، ولدينا:

$$g'(x) = e^x + 1 > 0$$

ومنه: الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1,28; -1,27[$ (لأنها: متزايدة تماما على \mathbb{R})

ولدينا: $g(-1,28) \approx -0,56$ و $g(-1,27) \approx +0,01$ أي: $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.

(4) استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} :

بمأن: g متزايدة تماما على \mathbb{R} و $g(\alpha) = 0$ ، فإن:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II- دالة معرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 4 cm)

(1) إثبات أنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x+1)^2}$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(xe^x)'(e^x+1) - (e^x+1)'(xe^x)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(1 \times e^x + e^x \times x)(e^x+1) - e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x+1)(e^x+1) - e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(xe^x + x + e^x + 1 - xe^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) أ- إثبات أن $f(\alpha) = \alpha + 1$

لدينا: من السؤال (I-3)، $g(\alpha) = 0$

أي: $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ ومنه: $e^\alpha = -\alpha - 1$ وبالتعويض نجد:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1} = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

ب- استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1,28 < \alpha < -1,27$

ومنه: $-0,28 < \alpha + 1 < -0,27$

إذن: $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$

(3) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

لدينا: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1} = \frac{xe^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$

نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ وبالتالي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = +\infty$

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- تبيان أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $f(x) - x = \frac{-x}{e^x+1} = \frac{-x}{x(\frac{e^x+1}{x})} = \frac{-1}{\frac{e^x+1}{x}}$

وبمأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\frac{e^x+1}{x}}\right) = 0$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{e^x+1}\right) = +\infty$

نستنتج أن: المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم

(D):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$

لدينا: $f(x) - x = \frac{-x}{e^x+1}$ ، ومنه: إشارة الفرق $f(x) - x$

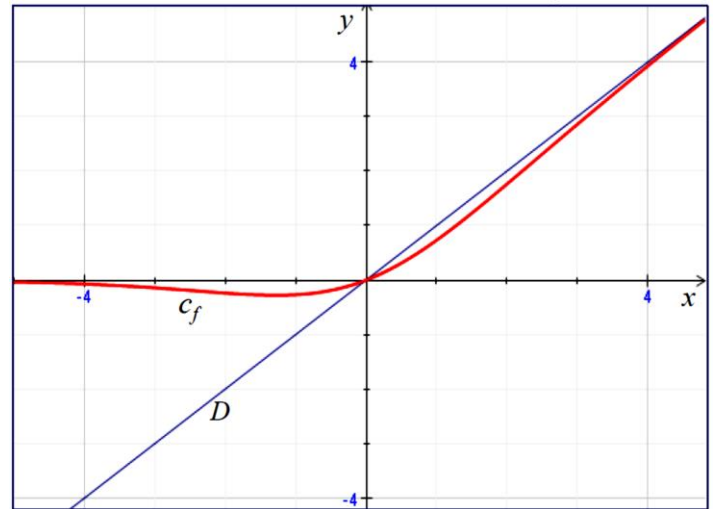
من إشارة $(-x)$ على \mathbb{R} ، وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	○	-
$f(x) - x$	+	○	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) يقع تحت (D)

4-أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		-	+
$f(x)$			
	0		$+\infty$
		$\alpha + 1$	

ب- رسم (D) و (C_f) :

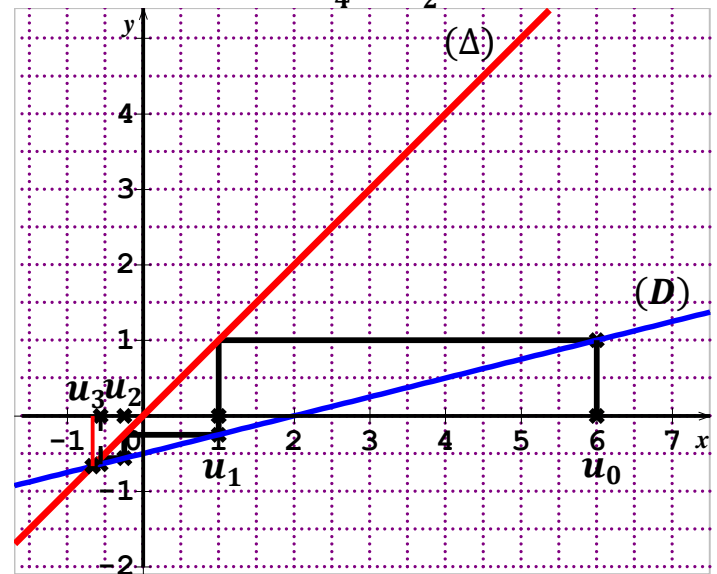


حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، تمثيل المستقيم (Δ) و (D) اللذين معادلتيهما

على الترتيب $y = x$ و $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$:



لدينا: $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$

أ- تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 (مبرزاً خطوط الإنشاء دون حسابها):
ب- تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) :

نحل المعادلة $x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ ، ومنه: $4x = x - 2$

وعليه: $x = -\frac{2}{3}$

إذن: (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة إحداثيها $(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$.

ج- إعطاء تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

نلاحظ أن: $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ، فتخميني حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها فهي متناقصة تماما وتتقارب نحو العدد $-\frac{2}{3}$.

(2) لدينا: (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ- إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية
يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$

$= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha$

$= \frac{1}{4}(v_n - \alpha) - \frac{1}{2} + \alpha$

$= \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2} + \alpha$

تكون (v_n) متتالية هندسية،

إذا وفقط إذا كان: $-\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2} + \alpha = 0$

ومنه: $-\alpha - 2 + 4\alpha = 0$

وعليه: $3\alpha = 2$

وبالتالي: $\alpha = \frac{2}{3}$ ، (بالتعويض نجد: $v_n = u_n + \frac{2}{3}$)

إذن: في حالة $\alpha = \frac{2}{3}$ ، تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$ ، كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n

بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه: $u_n = v_n - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}$

ج- تبيان أن $u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم استنتاج اتجاه

تغير المتتالية (u_n) وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left[\frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{2}{3}\right] - \left[\frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}\right]$

$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3} - \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$

$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4} - 1\right)$

$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{-3}{4}\right)$

$= -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن: $u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{6+3}{28} = \frac{9}{28} \text{ ومنه:}$$

$X = 1$ ، معناه: "سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 2"

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{4 \times 3}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \text{ ومنه:}$$

$X = 3$ ، معناه: "سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 2 والأخرى تحمل الرقم 5"

$$P(X = 3) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{3 \times 4}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \text{ ومنه:}$$

$X = 4$ ، معناه: "سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 5"

$$P(X = 4) = \frac{C_4^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{4 \times 4}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \text{ ومنه:}$$

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{28} + 1 \times \frac{12}{28} + 3 \times \frac{3}{28} + 4 \times \frac{4}{28} \\ = \frac{0+12+9+16}{28} \\ = \frac{37}{28}$$

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا المعادلة: $4862x - 1430y = 2002 \dots (E)$ حيث x و y عدادان صحيحان.

1) حساب القاسم المشترك الأكبر لأعداد 4862، 1430 و 2002:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4862 = 2 \times 11 \times 13 \times 17 \\ 1430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13 \\ 2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13 \end{array} \right. \text{ لدينا: ومنه:}$$

$$PGCD(4862; 1430; 2002) = 2 \times 11 \times 13 = 286$$

2) أ. تبين أن (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 :

$$\text{Ⓒ } (E) \text{ تكافئ: } 17x - 5y = 7$$

Ⓒ بمأن: 17 أولي مع 5،

فإنه: توجد ثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 تحقق $17x - 5y = 1$ ، وبضرب الطرفين في 7، نجد:

$$17X - 5Y = 7 \text{ (حيث } X = 7x \text{ و } Y = 7y)$$

إذن: (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .

ب. حل المعادلة (E) :

إيجاد حل خاص لـ (E) :

نلاحظ أن: $7 = 17 \times \mathbf{1} - 5 \times \mathbf{2}$ ، إذن: الثنائية $(1; 2)$

حل خاص لـ (E) .

حل المعادلة (E) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 17x - 5y = 7 \quad \dots (1) \\ 17(\mathbf{1}) - 5(\mathbf{2}) = 7 \quad \dots (2) \end{array} \right. \text{ لدينا:}$$

بطرح (2) من (1) نجد: $17(x - 1) - 5(y - 2) = 0$

$$17(x - 1) = 5(y - 2) \text{ وعليه:}$$

فإن: (u_n) متناقصة تماما.

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\text{لدينا: } u_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}$$

وبمأن: $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$$\text{ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{2}{3}$$

د. حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$= v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= \frac{20}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right)$$

$$= \frac{20}{3} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{80}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right)$$

استنتاج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= \left(v_0 - \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 - \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{2}{3}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \frac{2}{3}(n - 0 + 1)$$

$$= S_n - \frac{2}{3}(n + 1)$$

$$= \frac{80}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) - \frac{2}{3}(n + 1)$$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين في آن واحد من هذا

$$\text{الكيس هو: } C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

1/ حساب احتمال سحب كرتين رقم كل منهما عدد أولي:

ليكن الحدث A : "سحب كرتين رقم كل منهما عدد أولي"

$$\text{ومنه: } P(A) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

2/ حساب احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما عدد فردي:

ليكن الحدث B : "سحب كرتين مجموع رقميهما عدد فردي"

$$\text{ومنه: } P(B) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

3/ لدينا: X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب

العدد $|x - y|$ حيث x و y رقما الكرتين المسحوبتين.

(أ) قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1، 3، و 4.

(ب) تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم حساب

أمله الرياضي $E(X)$:

Ⓒ $X = 0$ ، معناه: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم"

(الكرتين تحملان الرقم 1 أو تحملان الرقم 2)

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$$

(C) المنحنى المُمثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).
1-أ- حساب نهاية الدالة f عند 0 ، وتفسير هندسيا النتيجة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

وتفسيرها الهندسي هو: المنحنى (C) يقبل محور الترتيب كمُقارب له.

ب- حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -\infty \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

ج- تبيان أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x + 2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لدينا:}$$

نستنتج أن: المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x + 2$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x + 2)$.

لدينا: $f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x}$ ، ومنه: إشارة الفرق $f(x) - (-x + 2)$ من إشارة $\ln x$ على $]0; +\infty[$ ، وعليه:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f(x) - (-x + 2)$		-	+
الوضع النسبي		(C) يقع تحت (D)	(C) يقع فوق (D)

2-أ- إثبات أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

على المجال $]0; +\infty[$ ، $x^2 > 0$ ، إذن: إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $g(x)$.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ ومنتاقصة

تماما على المجال $]1; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيراتها

كالتالي:

ومنه: 5 يقسم $17(x - 1)$ و5 أولي مع 17

إذن: حسب مبرهنة غوص؛ 5 يقسم $(x - 1)$

أي: يوجد عدد صحيح k ، حيث $x - 1 = 5k$

وبالتالي: $x = 5k + 1$

بالتعويض نجد: $y = 17k + 2$

إذن: $(x; y) = (5k + 1; 17k + 2)$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

3) a و b عددان طبيعيين حيث $(a; b)$ حل للمعادلة (E)،

نضع: $d = \text{PGCD}(a; b)$.

أ. تعيين القيم الممكنة لـ d :

لدينا: $d = \text{PGCD}(a; b)$ ، ومنه: $d|a$ و $d|b$

وعليه: $d|17a - 5b$

أي: $d|7$

وهذا يعني أن: $d \in D_7$

إذن: $d \in \{1; 7\}$

ب. تعيين الثنائيات $(a; b)$ عندما $d = 7$:

(حيث $k \in \mathbb{N}$) $(a; b) = (35k + 7; 119k + 14)$

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

لدينا: g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ، بـ:

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$$

1) دراسة تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$:

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \quad \text{ولدينا:}$$

اتجاه التغير:

g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\frac{2x^2 + 1}{x} < 0$$

ومنه: الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$+\infty$	+	$-\infty$

2) حساب $g(1)$ ثم استنتاج، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$:

$$\text{لدينا: } g(1) = 1 - (1)^2 - \ln 1 = 0$$

وبما أن: g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		+	-

الجزء الثاني:

لدينا: f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ ، بـ:

(4) إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0; 1[$:

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 $0 \in]-\infty; 1[$ أي: $f(1) = 1$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0; 1[$.

(5) رسم المستقيمين (D)، (T) والمنحنى (C):

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

(3) أ- تعيين إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (D):

$$\text{نضع: } f'(x) = -1 \text{ نجد: } \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = -1$$

$$\text{ومنه: } 1 - \ln x - x^2 = -x^2$$

$$\text{وعليه: } 1 - \ln x = 0$$

$$\text{ومنه: } \ln x = 1$$

$$\text{وبالتالي: } x = e$$

$$\text{وبمأن: } f(e) = \frac{\ln e}{e} - e + 2 = \frac{1}{e} + 2 - e$$

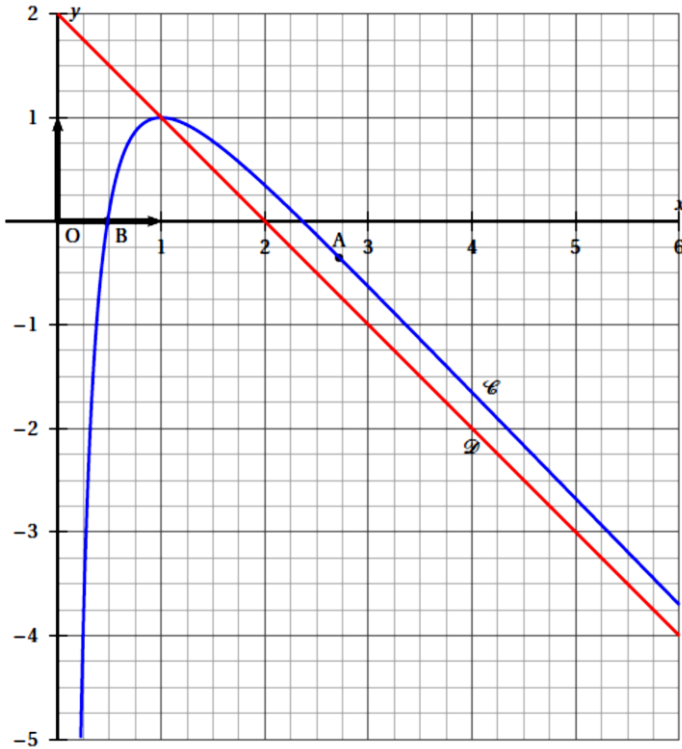
$$\text{فإن: } A\left(e; \frac{1}{e} + 2 - e\right)$$

ب- كتابة معادلة للمستقيم (T)، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e :

$$\text{معادلة (T) من الشكل } y = f'(e)(x - e) + f(e)$$

$$\text{ومنه: } y = -(x - e) + \frac{1}{e} + 2 - e$$

$$\text{نجد: } (T): y = -x + \frac{1}{e} + 2$$



انتهى محبكم في الله أستاذ المادة بالتوفيق في بكالوريا دورة جوان 2021.

تمرين محلول 12 : (Bac Métropole juin 2007)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(c) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 (1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1; +\infty[$.

(2) من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، نضع: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$ ، نضع: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$

- تحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

- احسب $g(0)$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(3) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (c) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

(4) ارسم المستقيم (D) والمنحنى (c).

الحل:

$$(1) \text{ حساب } f'(x) : f'(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = (x)' - \frac{[\ln(x+1)]' \times (x+1) - (x+1)' \times \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{إذن: } f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

(2) التحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[: g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

إذا كان $x \in]-1; +\infty[$ فإن $(x+1) > 0$ و $(x+1)^2 > 0$

$$\text{وبالتالي: } g'(x) > 0 : \text{ أي } \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1} > 0$$

إذن: الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

$$\bullet \text{ حساب } g(0) : g(0) = (0+1)^2 - 1 + \ln(0+1) = 0$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $g(0) = 0$

نستنتج أن: $[g(x) = 0]$ يكافئ $[x = 0]$

$[g(x) > 0]$ يكافئ $[x \in]0; +\infty[$

$[f(x) < 0]$ يكافئ $[x \in]-1; 0[$

$$\text{لكن: } f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه النتيجة التالية:

الدالة f متناقصة على المجال $]-1; 0[$ و متزايدة على المجال $]0; +\infty[$

(3) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (c) بالنسبة للمستقيم (D):

$$\text{من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[: f(x) - x = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

إذا كان $x \in]-1; +\infty[$ فإن $(x+1) > 0$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x) - x$

من إشارة $-\ln(x+1)$.

تذكير : إذا كان : f مستمرة على المجال $[a; b]$ ؛
 f رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ ؛
 $f(a) \cdot f(b) < 0$.

فإنه ، حسب ميرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[a; b]$.

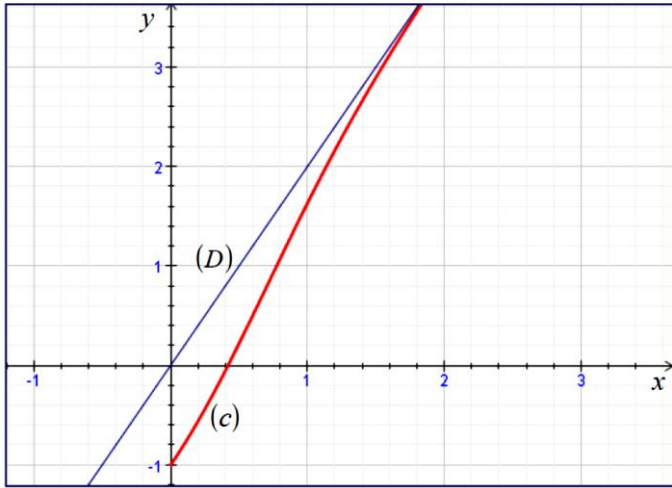
- من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنها مستمرة و متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ وبالتالي فهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$.
 - زيادة على ذلك ، نتحقق بسهولة أن : $f(0) \times f(1) < 0$.

من هذه الحالات الثلاثة (الاستمرارية ، الرتبة والجاء سالب) وحسب ميرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α مع $0 < \alpha < 1$.

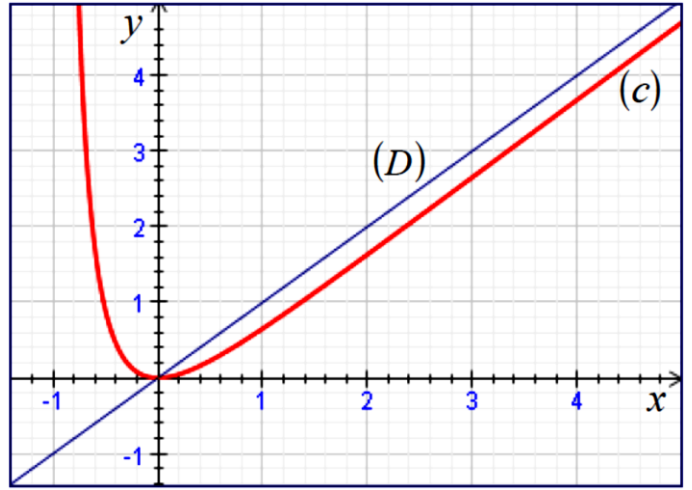
- دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[0; 1]$: $[f(x) = 0]$ يكافئ $[x = \alpha]$
 $[f(x) > 0]$ يكافئ $[x \in]\alpha; 1[$ و $[f(x) < 0]$ يكافئ $[x \in]0; \alpha[$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$		-	+

(2) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :



• $[-\ln(x+1) = 0]$ يكافئ $[\ln(x+1) = 0]$ ومنه $\ln(x+1) = \ln 1$ وبالتالي $(x+1) = 1$ إذن $x = 0$
 في هذه الحالة : المستقيم (D) يقطع المنحني (c) في النقطة $O(0; 0)$.
 • $[-\ln(x+1) > 0]$ يكافئ $[\ln(x+1) < 0]$ ومنه $\ln(x+1) < \ln 1$ وبالتالي $(x+1) < 1$ إذن $x < 0$ أي : $x \in]-1; 0[$
 في هذه الحالة : المنحني (c) يقع فوق المستقيم (D) .
 • $[-\ln(x+1) < 0]$ يكافئ $[\ln(x+1) > 0]$ وبالتالي $(x+1) > 1$ إذن $x > 0$ أي : $x \in]0; +\infty[$
 في هذه الحالة : المنحني (c) يقع تحت المستقيم (D) .
 (4) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :



تمرين محلول 13 : (بكالوريا المغرب 2008 الشعبة : رياضيات الدورة العادية)

لكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$f(x) = 2x - e^{-x^2}$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 1- أ- احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .

ب- احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 1$.

د- ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0; 1]$.

2) أنشئ المنحني (c) . (نأخذ : $\alpha \approx 0.4$)

الحل :

1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x^2}) = 0$:

• التفسير الهندسي :

تذكير : إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته

$y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$

مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $+\infty$.

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و $f'(x) = 2 + 2xe^{-x^2}$

ومن أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ،

• جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

$f(0) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج- تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 1$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	○	+	○	-
$f(x)$	$+\infty$			0	
			$-\frac{4}{3}$		$-\infty$

x	0	1	$+\infty$	
$\ln x$		-	○	+
$f(x) - (-x + 2)$		-	○	+
الوضع النسبي		(C) يقع تحت (D)	(C _f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)

x	0	1	$+\infty$	
$g(x)$		+	○	-

x	0	1	$+\infty$				
$g'(x)$			+				
$g(x)$	$+\infty$	+	+	○	-	-	$-\infty$