

## أولمبياد السادس

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة ( $x > 0$  و  $y > 0$  و  $z > 0$ )

1- بين أن  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

2- استنتج أن :  $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 6$

### تمرين 2

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية بحيث :  $\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 \\ 8x + 4y - z = 7 \end{cases}$

بين أن :  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

### تمرين 3

في الشكل جانبه لدينا :

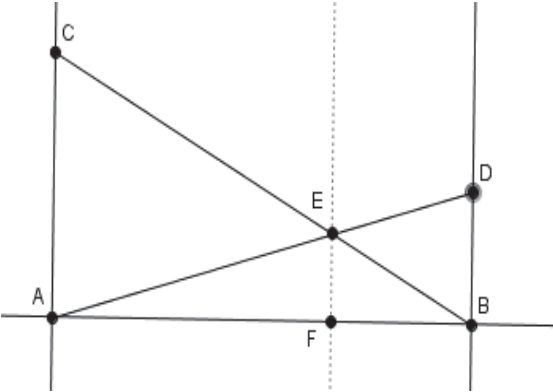
$AC = 8$  و  $(AC) \parallel (BD)$

و  $BD = 4$  و  $E$  نقطة

تقاطع  $(AD)$  و  $(BC)$

و  $F$  نقطة من القطعة  $[AB]$  بحيث  $(EF) \parallel (BD)$

احسب  $EF$



### تمرين 4

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعا و  $m$  عدد حقيقي

بحيث :  $xyz = 1$  و  $\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{yz+y+1} + \frac{2zm}{xz+z+1} = 1$

بين أن :  $m = \frac{1}{2}$

## حل أولمبياد السادس

### تمرين 1

$$1 - \text{لدينا : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2}{xy} - 2 = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$$

( لأن  $xy > 0$  و  $(x-y)^2 \geq 0$  )

$$\text{إذن : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

$$2 - \text{حسب السؤال السابق لدينا : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2 \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن :}$$

$$(3) \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 + 2 + 2$$

$$\text{أي : } \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 2 + 2 + 2$$

$$\text{إذن : } \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 6$$

### تمرين 2

$$\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 & (1) \\ 8x + 4y - z = 7 & (2) \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 & (\times 2) \\ 8x + 4y - z = 7 & (\times 1) \end{cases} \quad \text{نضرب المعادلة (1) في 2 والمعادلة (2) في 1 :}$$

$$\begin{cases} 2x - 14y + 16z = 8 \\ 8x + 4y - z = 7 \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

$$\text{نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : } 2x - 14y + 16z + 8x + 4y - z = 8 + 7$$

يعني :  $10x - 10y + 15z = 15$

يعني :  $10(x - y) = 15(1 - z)$

إذن :  $(3) \quad x - y = \frac{15}{10}(1 - z) = \frac{3}{2}(1 - z)$

نضرب المعادلة (1) في -1 والمعادلة (2) في 2 :  $\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 & (\times(-1)) \\ 8x + 4y - z = 7 & (\times 2) \end{cases}$

أي :  $\begin{cases} -x + 7y - 8z = -4 \\ 16x + 8y - 2z = 14 \end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف :  $-x + 7y - 8z + 16x + 8y - 2z = -4 + 14$

يعني :  $15x + 15y - 10z = 10$

يعني :  $15(x + y) = 10(1 + z)$

إذن :  $(4) \quad x + y = \frac{10}{15}(1 + z) = \frac{2}{3}(1 + z)$

نضرب المتساويتان 3 و 4 طرف بطرف :  $(x - y) \times (x + y) = \frac{3}{2}(1 - z) \times \frac{2}{3}(1 + z)$

يعني :  $x^2 - y^2 = 1 - z^2$

وبالتالي :  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

### تمرين 3

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC :

(1)  $\frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC}$  ومنه  $\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{EF}{AC}$

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ADB :

(2)  $\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{DB}$  ومنه  $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{EF}{DB}$

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف نجد :

$$\frac{BF}{BA} + \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{AC} + \frac{EF}{DB}$$

يعني :  $EF \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{DB} \right) = \frac{BF + AF}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$

إذن :  $\frac{1}{AC} + \frac{1}{DB} = \frac{1}{EF}$

التطبيق العددي :

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{4+8}{32} = \frac{12}{32}$$

$$EF = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

## تمرين 4

بما أن :  $xyz = 1$  فإن :  $xz = \frac{1}{y}$  و  $yz = \frac{1}{x}$

$$\text{لدينا : } \frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{yz+y+1} + \frac{2zm}{xz+z+1} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{\frac{1}{x}+y+1} + \frac{2zm}{\frac{1}{y}+z+1} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{1+xy+x} + \frac{2zm}{1+yz+y} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yzm}{1+yz+y} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yxm}{1+\frac{1}{x}+y} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yzm}{1+xy+x} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2xyzm}{1+xy+x} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2xm + 2xym + 2 \times 1 \times m}{xy+x+1} = 1$$

$$\text{يعني : } \frac{2m(\cancel{x+xy+1})}{\cancel{xy+x+1}} = 1$$

$$\text{يعني : } 2m = 1$$

$$\text{وبالتالي : } m = \frac{1}{2}$$