

أولمبياد العشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $x+y+z=3$

$$\text{بين أن : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

تمرين 2

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

احسب

تمرين 3

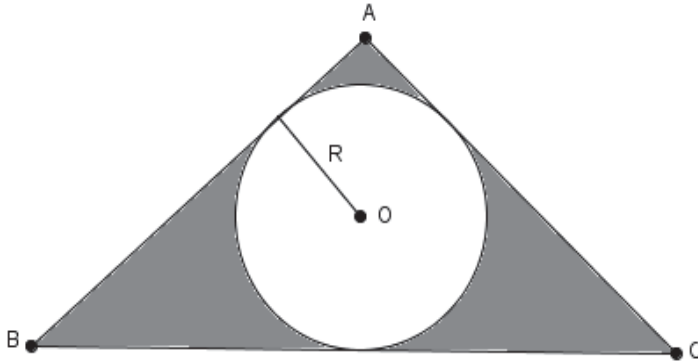
$u-1$ و v و w أعداد حقيقية

$$\text{بين أن : } (u+v+w)^2 \leq 3(u^2+v^2+w^2)$$

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $x+y+z=1$

$$\text{بين أن : } \sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3} \quad (\text{استعمل السؤال 1})$$

تمرين 4



ABC مثلث بحيث : $AB=13cm$

و $BC=15cm$ و $AC=14cm$

النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة

بالمثلث ABC التي شعاعها R

احسب مساحة المنطقة المظللة

حل أولمبياد العشرون

تمرين 1

$$\text{لدينا : } (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } (-\sqrt{x}-2 \leq 0) \quad (\sqrt{x}-1)^2 \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0 \times (-\sqrt{x}-2)$$

$$\text{يعني : } (x-2\sqrt{x}+1) \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0 \quad \text{يعني : } -x\sqrt{x}-2x+2x+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$$

$$\text{يعني : } -x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0 \quad \text{يعني : } \sqrt{x}(3-x) \leq 2 \quad \text{يعني : } \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني : } (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{2} \quad \text{إذن : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \frac{y}{2} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{z}{2} \quad \text{و}$$

$$\text{نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

$$\text{أي : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

تمرين 2

نضرب في المرافق

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} \times \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{\sqrt{98}-\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \times \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots + \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{1} + \dots + \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{1} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{1} \\ &= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{98} + \sqrt{99} - \sqrt{99} + \sqrt{100} \\ &= -1 + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9 \end{aligned}$$

تمرين 3

1- لنحدد إشارة الفرق : $3(u^2 + v^2 + w^2) - (u + v + w)^2$

لنحدد إشارة الفرق

لدينا :

$$\begin{aligned} 3(u^2 + v^2 + w^2) - (u + v + w)^2 &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - ((u + v) + w)^2 \\ &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - (u + v)^2 - 2 \times (u + v) \times w - w^2 \\ &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - u^2 - 2uv - v^2 - 2uw - 2vw - w^2 \\ &= 2u^2 + 2v^2 + 2w^2 - 2uv - 2uw - 2vw \\ &= u^2 - 2uv + v^2 + u^2 - 2uw + w^2 + v^2 - 2vw + w^2 \\ &= (u - v)^2 + (u - w)^2 + (v - w)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

إذن : $(u + v + w)^2 \leq 3(u^2 + v^2 + w^2)$

2- نضع : $u = \sqrt{6x+1}$ و $v = \sqrt{6y+1}$ و $w = \sqrt{6z+1}$

حسب السؤال 1 : $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6x+1 + 6y+1 + 6z+1)$

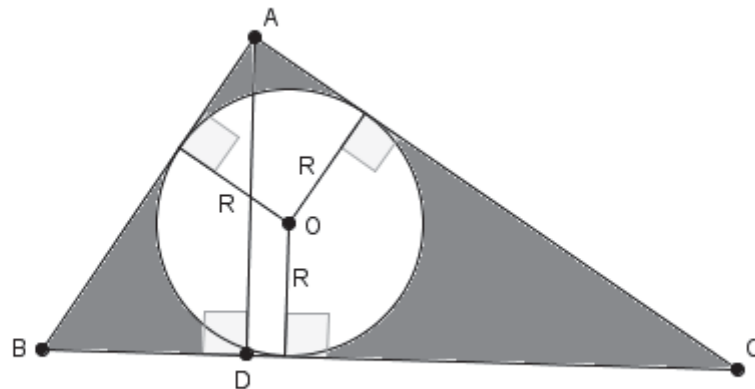
يعني : $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6(x+y+z) + 3)$

يعني : $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6 \times 1 + 3) = 27$ ($x + y + z = 1$)

يعني : $\sqrt{(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2} \leq \sqrt{27}$

وبالتالي : $\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$

تمرين 4



لدينا المثلث ADB قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AB^2 = AD^2 + DB^2$

$$(1) \quad AD^2 = AB^2 - DB^2$$

لدينا المثلث ADC قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$$(2) \quad AD^2 = AC^2 - DC^2$$

من 1 و 2 نستنتج ان : $AD^2 = AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2$

$$(DB - DC)(DB + DC) = AB^2 - AC^2 \quad \text{أي} \quad DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$(DB - DC) \times 15 = 13^2 - 14^2 \quad \text{أي} \quad (DB - DC)AC = AB^2 - AC^2$$

$$\text{أي} \quad DB - DC = \frac{169 - 196}{15} \quad \text{إذن} \quad DB - DC = -1,8 \quad \text{أي} \quad DC = DB + 1,8$$

$$\text{لدينا} \quad BD + DC = 15$$

$$\text{يعني} \quad BD + (DB + 1,8) = 15 \quad \text{يعني} \quad 2BD = 15 - 1,8 \quad \text{إذن} \quad BD = 6,6$$

$$\text{لدينا} \quad AD^2 = AB^2 - DB^2 \quad \text{أي} \quad AD^2 = 13^2 - 6,6^2 \quad \text{أي} \quad AD = \sqrt{169 - 43,56}$$

$$\text{إذن} \quad AD = 11,2$$

$$\text{لدينا} \quad S_{ABC} = S_{AOB} + S_{OBC} + S_{AOC}$$

$$\text{يعني} \quad 84 = \frac{13 \times R}{2} + \frac{15 \times R}{2} + \frac{14 \times R}{2} \quad \text{يعني} \quad 84 = R \left(\frac{13}{2} + \frac{15}{2} + \frac{14}{2} \right) \quad \text{يعني} \quad 84 = R \times 21$$

$$\text{إذن} \quad R = 4 \text{ cm}$$

لدينا : مساحة المنطقة المظلة = مساحة المثلث ABC - مساحة الدائرة

يعني :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times AD \times BC - \pi R^2 &= \frac{1}{2} \times 11,2 \times 15 - 3,14 \times 4^2 \\ &= 84 - 50,24 \\ &= 33,76 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

وبالتالي مساحة المنطقة المظلة هي : $33,76 \text{ cm}^2$