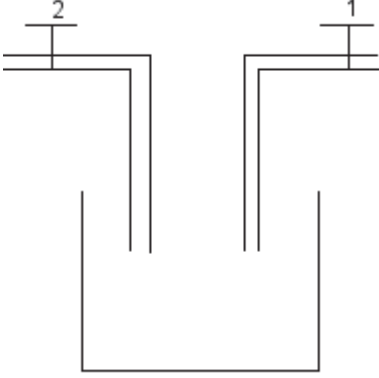


أولمبياد السابع والعشرون

تمرين 1



الشكل جانبه يمثل صهريج يحتوي على حنفيتين لمئه بالماء الحنفية الأولى تملأ الصهريج في ساعتان والحنفية الثانية تملأ الصهريج في 3 ساعات إذا فتحنا الحنفيتين في نفس الوقت فكم سيستغرق من الوقت حتى يمتلأ الصهريج

تمرين 2

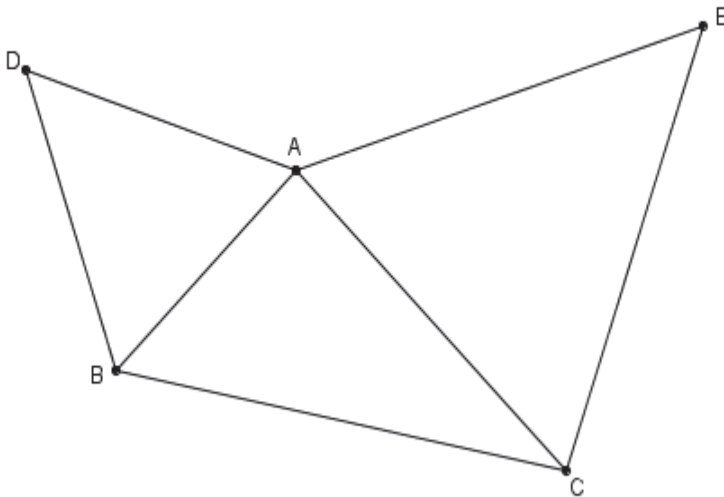
x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{بين أن : } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \right)$$

تمرين 3

$ABCD$ مستطيل مساحته $S = 30 \text{ cm}^2$ و طول قطره $BD = 65$
حدد محيط المستطيل P

تمرين 4



في الشكل جانبه : مثلث ABC مثلث
والمثلثان ACE و BAD متساويا
الأضلاع على التوالي في D و E
بين أن : $DC = BE$

أولمبياد السابع والعشرون

تمرين 1

نضع : V : حجم الصهريج

S_1 : صبيب الحنفية الأولى

S_2 : صبيب الحنفية الثانية

t : المدة الزمنية حتى يمتلأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا

- عند ملأ الصهريج بالحنفية الأولى فإن حجم الصهريج هو : $V = S_1 \times 2$

يعني : $S_1 = \frac{V}{2}$

- عند ملأ الصهريج بالحنفية الثانية فإن حجم الصهريج هو : $V = S_2 \times 3$

يعني : $S_2 = \frac{V}{3}$

- عند ملأ الصهريج بالحنفيتين معا فإن حجم الصهريج هو : $V = (S_1 + S_2) \times t$

يعني : $t = \frac{V}{S_1 + S_2}$ يعني : $t = \frac{V}{\frac{V}{2} + \frac{V}{3}} = \frac{V}{\frac{5V}{6}} = V \times \frac{6}{5V}$

إذن : $t = \frac{6}{5}h$

المدة الزمنية لملأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا هي : $1h12 \text{ min}$

تمرين 2

لدينا : $(x - \sqrt{yz})^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2x\sqrt{yz} + yz \geq 0$ يعني : $x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$ يعني : $\frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$

يعني : $\frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} \times \frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{yz}}$

إذن : $(1) \quad \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$

بنفس الطريقة نبين أن : $(2) \quad \frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{\sqrt{xz}}{2xyz}$

$$(3) \quad \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{\sqrt{xy}}{2xyz} \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz} + \frac{\sqrt{xz}}{2xyz} + \frac{\sqrt{xy}}{2xyz}$$

$$(4) \quad \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \right) \quad \text{ومنه}$$

$$\text{لدينا : } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$\text{يعني : } x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$(5) \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{إذن}$$

$$(6) \quad \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$(7) \quad \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 5 و 6 و 7 طرف بطرف :

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq \frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2}$$

$$\text{أي : } \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq \frac{2x+2y+2z}{2}$$

$$\text{أي : } \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq \frac{2(x+y+z)}{2}$$

$$(8) \quad \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq x+y+z \quad \text{ومنه}$$

$$\text{من 4 و 8 نستنتج أن : } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+y+z}{xyz} \right)$$

$$\text{أي : } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}yz} + \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}z} + \frac{\cancel{z}}{xy\cancel{z}} \right)$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \right)$$

تمرين 3

لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في B

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$(1) \quad \text{ومنه : } AB^2 + AD^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$$

$$\text{لدينا : } S = 30\text{cm}^2$$

يعني : $AB \times AD = 30$

يعني : $2 \times AB \times AD = 2 \times 30$

إذن : $2 \times AB \times AD = 60$ (2)

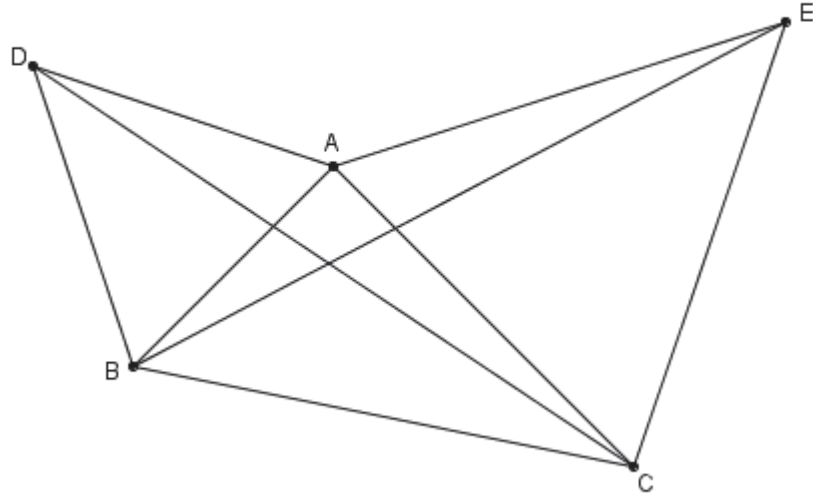
نجمع المتفاوتتين 1 و 2 بطرف : $AB^2 + AD^2 + 2 \times AB \times AD = 65 + 60 = 125$

ومنه : $(AB + AD)^2 = 125$

أي : $AB + AD = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

وبالتالي : $P = 2 \times (AB + AD) = 2 \times 5\sqrt{5} = 10\sqrt{5} \text{ cm}$

تمرين 4



لدينا : $\hat{BAE} = \hat{BAC} + \hat{CAE} = \hat{BAC} + 60^\circ$ (لأن المثلث ACE متساوي الأضلاع)

و $\hat{CAD} = \hat{CAB} + \hat{BAD} = \hat{CAB} + 60^\circ$ (لأن المثلث BAD متساوي الأضلاع)

إذن : $\hat{BAE} = \hat{CAD}$

بما أن : $\begin{cases} \hat{BAE} = \hat{CAD} \\ AE = AC \\ AB = AD \end{cases}$ فإن : المثلثان BAE و CAD متقايسان

وبالتالي : $DC = BE$