

أولمبياد الواحد والعشرون

تمرين 1

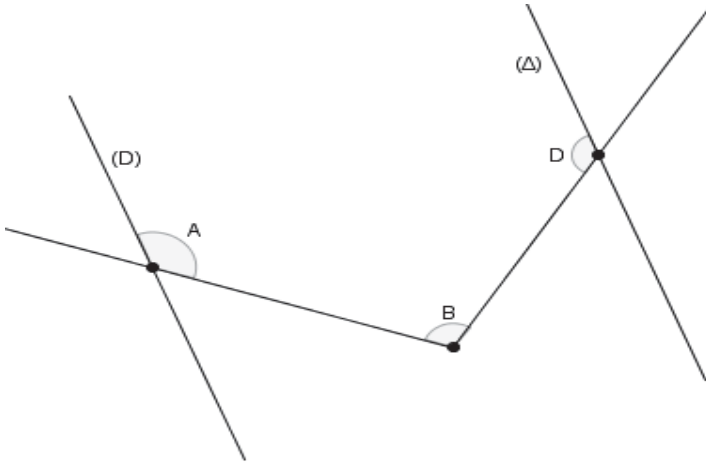
x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $x > 1$ و $y > 1$ و $z > 1$
بين أن : $xyz + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > y + x + z + \frac{1}{xyz}$

تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$(D) // (\Delta)$

بين أن : $A + B + D = 360^\circ$



تمرين 3

x و y و z هي أطوال أضلاع مثلث

بين أن : $(x + z - y)^2 < 4xz$

تمرين 4

x عدد حقيقي غير منعدم بحيث : $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

أحسب : $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$(\Delta) // (D)$ و (K) قاطع لهما

فإن $S = A'$

لدينا : $S = A' = 180^\circ - A$

و $B' = 180^\circ - B$

و $D' = 180^\circ - D$

ونعلم أن مجموع زوايا مثلث تساوي 180°

يعني : $S + B' + D' = 180^\circ$

يعني : $180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - D = 180^\circ$

يعني : $A + B + D = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ - 180^\circ$

وبالتالي : $A + B + D = 360^\circ$

تمرين 3

لنحدد إشارة الفرق $(x + z - y)^2 - 4xz$:

$$\begin{aligned}(x + z - y)^2 - 4xz &= ((x + z) - y)^2 - 4xz \\&= (x + z)^2 - 2 \times (x + z) \times y + y^2 - 4xz \\&= x^2 + 2xz + z^2 - 2xy + 2yz + y^2 - 4xz \\&= x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz)\end{aligned}$$

لدينا : x و y و z هي أطوال أضلاع مثلث

يعني : $x + y > z$ (متفاوتة مثلثية)

يعني : $z \times (x + y) > z \times z$ ($z > 0$)

إذن : $xz + yz > z^2$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $yz + xy > y^2$ (2)

و $xy + xz > x^2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$xz + yz + yz + xy + xy + xz > z^2 + y^2 + x^2$$

أي : $2(xy + yz + xz) > x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{أي : } (x+z-y)^2 - 4xz = x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz) \leq 0$$

$$\text{وبالتالي : } (x+z-y)^2 < 4xz$$

تمرين 4

$$\text{نضع : } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{يعني : } y^2 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x}$$

$$\text{يعني : } y^2 - 2 = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 7 + 2 = 9$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 - 9 = 0$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2 + 3)(y^2 - 2 - 3) = 0$$

$$\text{يعني : } (y^2 + 1)(y^2 - 5) = 0$$

$$\text{يعني : } y^2 - 5 = 0 \text{ أو } y^2 + 1 = 0$$

$$\text{يعني : } y^2 = -1 \text{ المعادلة ليس لها حل}$$

$$\text{أو } (y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5}) = 0$$

$$\text{يعني : } y + \sqrt{5} = 0 \text{ أو } y - \sqrt{5} = 0$$

$$\text{يعني : } y = -\sqrt{5} \text{ أو } y = \sqrt{5}$$

$$\text{ونعلم أن } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{وبالتالي : } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$$