

أولمبياد السابع

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً

1- بين أن : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

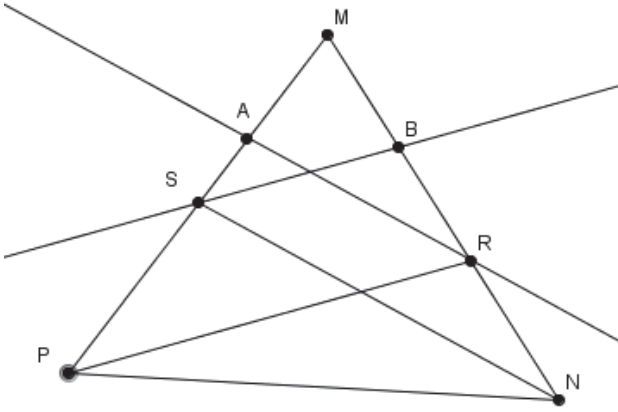
2- استنتج أن : $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$

تمرين 2

في الشكل جانبه لدينا : $S \in [PM]$ و $R \in [NM]$

و $(AR) \parallel (NS)$ و $(PR) \parallel (BS)$

بين أن : $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN}$



تمرين 3

ABC مثلث قائم الزاوية في C

بين أن : $BC^K > AB^K + AC^K$ ($K > 2$)

تمرين 4

x و y و z و x' و y' و z' أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = m$

بين أن : $\sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} = \sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}$

حل أولمبياد السابع

تمرين 1

$$-1 \text{ لدينا : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} = \frac{y+x}{xy} - \frac{4}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy(x+y)} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \geq 0$$

(لأن : $(x-y)^2 \geq 0$ و لدينا $x > 0$ و $y > 0$ يعني $xy(x+y) \geq 0$)

$$\text{إذن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$-2 \text{ حسب السؤال السابق لدينا : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن :}$$

$$(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z} \quad \text{و}$$

$$\text{نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{4}{x+z}$$

$$\text{أي : } \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq 4 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right)$$

$$\text{أي : } \frac{1}{4} \times 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{4} \times 4 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right)$$

$$\text{أي : } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$$

تمرين 2

في المثلث MSN لدينا : $(AR) // (NS)$

$$\text{حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : } \frac{MA}{MS} = \frac{MR}{MN} \quad \text{ومنه} \quad \frac{MA}{MS} = \frac{MR}{MN} = \frac{AR}{SN}$$

$$(1) \quad MS \times MR = MA \times MN \quad \text{أي}$$

في المثلث MRP لدينا : $(PR) // (BS)$

$$\text{حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : } \frac{MB}{MR} = \frac{MS}{MP} = \frac{BS}{PR} \quad \text{ومنه} \quad \frac{MB}{MR} = \frac{MS}{MP} = \frac{BS}{PR}$$

$$(2) \quad MS \times MR = MB \times MP \quad \text{أي}$$

من 1 و 2 نستنتج أن : $MA \times MN = MB \times MP$

وبالتالي : $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN}$

تمرين 3

لدينا : ABC مثلث قائم الزاوية في C

إذن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

نضرب طرفي المتساوية في BC^{K-2} فنحصل على : $BC^2 \times BC^{K-2} = AB^2 \times BC^{K-2} + AC^2 \times BC^{K-2}$

يعني : $(1) \quad BC^K = AB^2 \times BC^{K-2} + AC^2 \times BC^{K-2}$

لدينا : $BC > AB$ و $BC > AC$ يعني : $BC^{K-2} > AB^{K-2}$ و $BC^{K-2} > AC^{K-2}$

يعني : $BC^{K-2} \times AC^2 > AC^{K-2} \times AC^2$ و $BC^{K-2} \times AB^2 > AB^{K-2} \times AB^2$

إذن : $(2) \quad BC^{K-2} \times AC^2 > AC^K$ و $BC^{K-2} \times AB^2 > AB^K$

من 1 و 2 نستنتج أن : $BC^K > AB^K + AC^K$

تمرين 4

لدينا : $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = m$

إذن : $x = mx'$ و $y = my'$ و $z = mz'$

لدينا :

$$\begin{aligned} \sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} &= \sqrt{mx'x'} + \sqrt{my'y'} + \sqrt{mz'z'} \\ &= \sqrt{mx'^2} + \sqrt{my'^2} + \sqrt{mz'^2} \\ &= x'\sqrt{m} + y'\sqrt{m} + z'\sqrt{m} \\ &= \sqrt{m}(x' + y' + z') \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')} &= \sqrt{(mx'+my'+mz')(x'+y'+z')} \\ &= \sqrt{m(x'+y'+z')(x'+y'+z')} \\ &= \sqrt{m}(x'+y'+z') \end{aligned}$$

إذن : $\sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} = \sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}$