أولمبياد الخامس والعشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8xyz$

تمرين 2

نعطي : $1^3+2^3+....+14^3+15^3=14400$

أحسب $2^3+4^3+6^3....+28^3+30^3$

تمرين 3

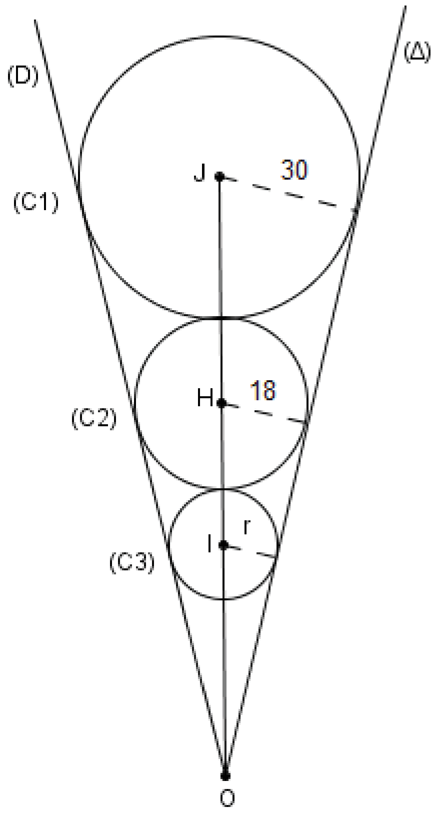
المستقيمان (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة O

ومماسان للدوائر $C_1(J,30)$ و $C_2(H,18)$ و $C_3(I,r)$

والدائرتان C_1 و C_2 متماستان

والدائرتان C_3 و C_2 متماستان

احسب r شعاع الدائرة C_3



تمرين 4

بين أن : $\sqrt{\dfrac{2016\times2015\times2014\times2013+1}{4}}=\dfrac{4058209}{2}$

حل أولمبياد الخامس والعشرون

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{x}\times\sqrt{y}\geq 0$

إذن : $x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$

ومنه : $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $x+z\geq 2\sqrt{xz}$ (2)

و $y+z\geq 2\sqrt{yz}$ (3)

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$(x+y)(x+z)(y+z)\geq 2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{xz}\times 2\sqrt{yz}$$

أي : $(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8\left(\sqrt{x}\right)^2\times\left(\sqrt{z}\right)^2\times\left(\sqrt{y}\right)^2$

وبالتالي : $(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8xyz$

تمرين 2

لدينا :

$$2^3+4^3+6^3....+28^3+30^3$$

$$2^3=(2\times 1)^3=2^3\times 1^3$$

$$4^3=(2\times 2)^3=2^3\times 2^3$$

$$6^3=(2\times 1)^3=2^3\times 1^3$$

$$\vdots$$

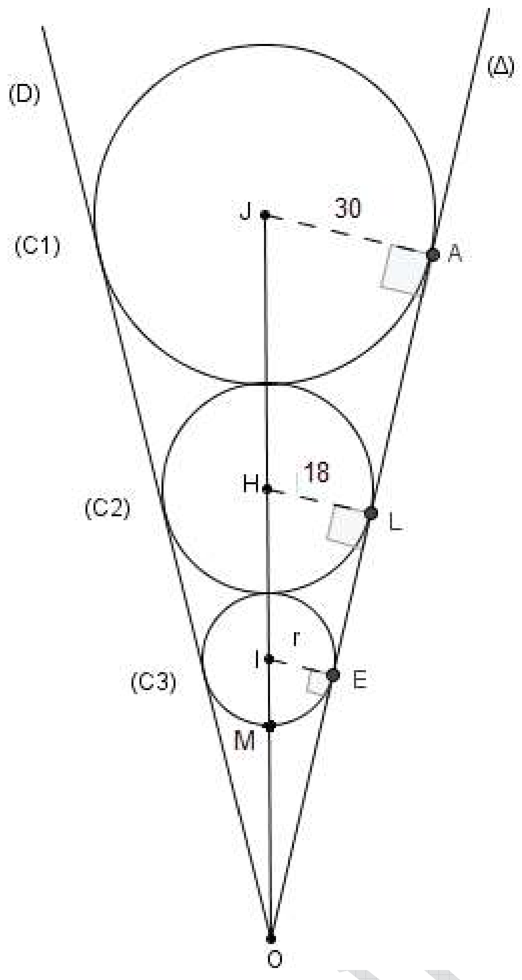
$$28^3=(14\times 2)^3=14^3\times 2^3$$

$$30^3=(15\times 2)^3=15^3\times 2^3$$

إذن :

$$\begin{aligned}2^3+4^3+6^3....+28^3+30^3&=2^3\times 1^3+2^3\times 2^3+2^3\times 3^3+....+14^3\times 2^3+15^3\times 2^3\\&=2^3\left(1^3+2^3+....+14^3+15^3\right)\\&=8\times 14400\end{aligned}$$

<u>تمرين 3</u>



لدينا المستقيمان (D) و (Δ) مماسان للدوائر

(C_1) و (C_2) و (C_3) على التوالي في A و L و E

يعني : $(JA)\perp(\Delta)$ و $(HL)\perp(\Delta)$ و $(IE)\perp(\Delta)$

يعني : $\sin J\hat{O}A = \sin H\hat{O}L = \sin I\hat{O}E$

يعني : $\frac{JA}{OJ} = \frac{HL}{OH} = \frac{IE}{OI}$

يعني :

$$\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+2\times18+30}$$

إذن : $\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+66}$

حسب النتيجة 1 لدينا : $\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18}$

يعني : $r\times OM + 2r^2 + 18r = 18\times OM + 18r$

يعني : $2r^2 = 18\times OM - r\times OM$

يعني : $2r^2 = OM(18-r)$

إذن : $OM = \frac{2r^2}{18-r}$ $\quad(1)$

حسب النتيجة 1 لدينا : $\frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+66}$

يعني : $18\times OM + 36r + 1188 = 30\times OM + 60r + 540$

يعني : $30\times OM - 18\times OM + 60r - 36r = 1188 - 540$

إذن : $12\times OM + 24r = 648$ $\quad(2)$

من 1 و 2 نستنتج أن : $12\times\left(\frac{2r^2}{18-r}\right) + 24r = 648$

أي : $\frac{\cancel{24r^2} + 432r - \cancel{24r^2}}{18-r} = 648$

أي : $432r = 11664 - 648r$

أي : $1080r = 11664$

وبالتالي : $r=\dfrac{11664}{1080}=10,8$

تمرين 4

نضع : $x=2013$

$$\sqrt{\frac{2016\times2015\times2014\times2013+1}{4}}=\sqrt{\frac{(x+3)\times(x+2)\times(x+1)\times x+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{x\times(x+3)\times(x+2)\times(x+1)+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{(x^2+3x)\times(x^2+3x+2)+1}{4}}$$

نضع : $t=x^2+3x$

$$\sqrt{\frac{2016\times2015\times2014\times2013+1}{4}}=\sqrt{\frac{(x^2+3x)\times(x^2+3x+2)+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{t\times(t+2)+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{t^2+2t+1}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{(t+1)^2}{4}}$$
$$=\frac{t+1}{2}$$
$$=\frac{x^2+3x+1}{2}$$
$$=\frac{2013^2+3\times2013+1}{2}$$
$$=\frac{4052169+6039+1}{2}=\frac{4058209}{2}$$