أولمبياد العاشر

تمرين 1

x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث : $x+y+z=1$

1- بين أن : $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$

1- استنتج أن : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq 4$

تمرين 2

EFG مثلث قائم الزاوية في E

النقطة M المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (FG)

بين أن : $EF+EG<EM+FG$

تمرين 3

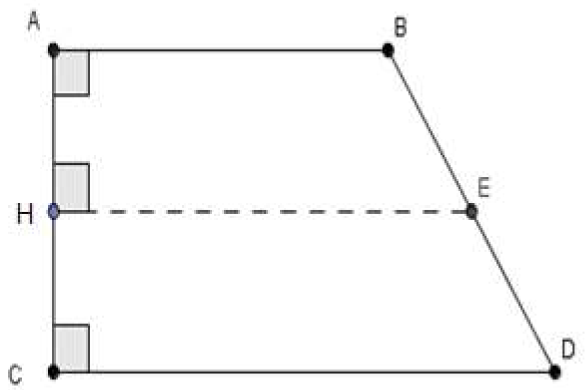
$ABCD$ رباعي بحيث : $(AB)\perp(AC)$

و $(AC)\perp(DC)$ والنقطة E منتصف $[BD]$

النفطة H هي المسقط العمودي للنقطة

E على (AC)

بين أن $2EH=AB+DC$



تمرين 4

احسب :

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{1000\sqrt{999}+999\sqrt{1000}}$$

حل أولمبياد العاشر

تمرين 1

1- لدينا : $\left(\sqrt{t}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{t}-1\right)^2 = t-2\sqrt{t}+1 \geq 0$ يعني : $-2\sqrt{t} \geq -t-1$ يعني : $2\sqrt{t} \leq t+1$

يعني : $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{t} \leq \frac{1}{2}(t+1)$

إذن : $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\sqrt{2x+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2y+1} \leq \frac{(2y+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2z+1)+1}{2}$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}+\frac{(2y+1)+1}{2}+\frac{(2z+1)+1}{2}$

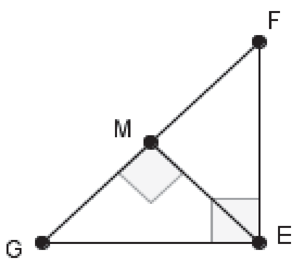
يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2x+2y+2z+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2(x+y+z)+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2\times 1+6}{2}$ يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{8}{2}$

إذن : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq 4$

تمرين 2



لدينا :

$$(EM+FG)^2 = EM^2+2EM\times FG+FG^2$$

$$= EM^2+4\left(\frac{EM\times FG}{2}\right)+FG^2$$

نعلم أن : $S_{EFG} = \frac{EM\times FG}{2} = \frac{EF\times EG}{2}$

(S_{EFG} : مساحة المثلث EFG)

إذن : $(EM+FG)^2 = EM^2+4S_{EFG}+FG^2$ (1)

اسطيط عبدالرحيم

لدينا :

$$(EF+EG)^2 = EF^2 + 2EF\times EG + EG^2$$
$$= EF^2 + EG^2 + 4\left(\frac{EF\times EG}{2}\right)$$

($FG^2 = EF^2 + EG^2$ لأن المثلث EFG قائم الزاوية في E)

إذن : $(EF+EG)^2 = FG^2 + 4S_{EFG}$ (2)

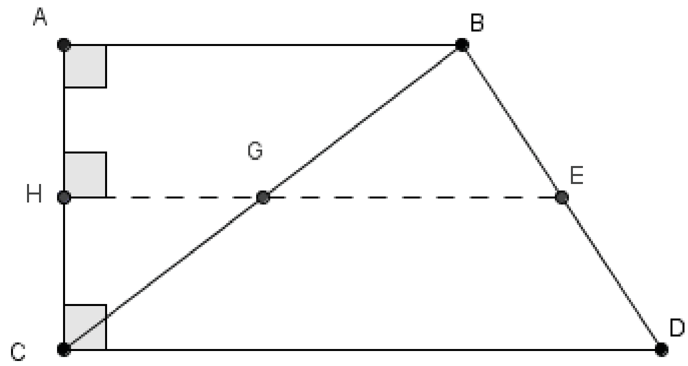
نقوم بطرح المتساويتين 1 و 2 طرف بطرف :

$$(EF+EG)^2 - (EM+FG)^2 = FG^2 + 4S_{ABC} - \left(EM^2 + 4S_{ABC} + FG^2\right)$$
$$= \cancel{FG^2} + \cancel{4S_{ABC}} - EM^2 - \cancel{4S_{ABC}} - \cancel{FG^2}$$
$$= -EM^2 < 0$$

إذن : $(EF+EG)^2 < (EM+FG)^2$

وبالتالي : $EF+EG < EM+FG$

تمرين 3



بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث BCD : $\frac{BG}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{GE}{CD}$

يعني: $\frac{GE}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BE}{2BE} = \frac{1}{2}$ (لأن E منتصف $[BD]$)

إذن $GE = \frac{1}{2}CD$ (1)

لدينا في المثلث BCD النقطة E منتصف $[BD]$ و $(GE)//(CD)$

إذن G منتصف $[BC]$

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC : $\frac{CH}{CA} = \frac{CG}{CB} = \frac{HG}{AB}$

ومنه $\frac{HG}{AB} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2}$ (G منتصف $[BC]$)

إذن : $HG=\frac{1}{2}AB$ (2)

من 1 و 2 نستمنج أن : $2EH=2(HG+GE)=2\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD\right)=AB+CD$

تمرين 4

لدينا :

$$\frac{1}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}}=\frac{1}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}}\times\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^2(x-1)-(x-1)^2\times x}$$
$$=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^3-x^2-x\left(x^2-2x+1\right)}$$
$$=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{\cancel{x^3}-x^2-\cancel{x^3}+2x^2-x}$$
$$=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^2-x}$$
$$=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x(x-1)}$$
$$=\frac{\cancel{x}\sqrt{x-1}}{\cancel{x}(x-1)}-\frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{x}}{x\cancel{(x-1)}}$$
$$=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}-\frac{\sqrt{x}}{x}$$

إذن :

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{1000\sqrt{999}+999\sqrt{1000}}$$
$$=\frac{\sqrt{1}}{1}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\ldots\ldots+\cancel{\frac{\sqrt{999}}{999}}-\frac{\sqrt{1000}}{1000}$$
$$=1-\frac{\sqrt{1000}}{1000}=1-\frac{10\sqrt{10}}{1000}=1-\frac{\sqrt{10}}{100}$$