أولمبياد الأول

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

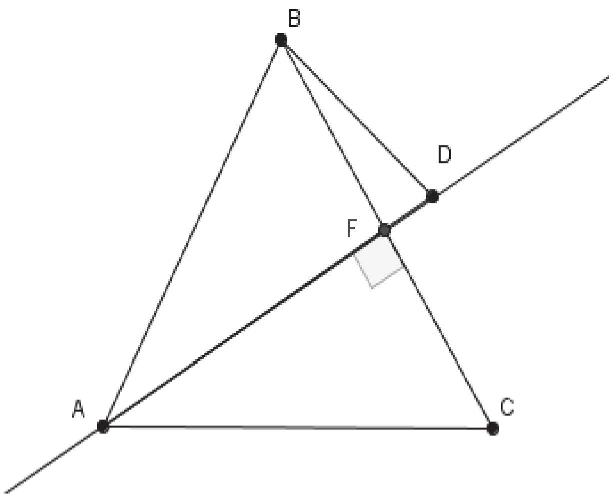
بين أن : $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z$

تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه بحيث : $BA=BC$

و $BA=AD$ و $(AD)\perp(BC)$

احسب : $B\hat{A}C+A\hat{D}B$



تمرين 3

EFG مثلث متساوي الأضلاع والنقطة P داخله

ارتفاع المثلث EFG المار من E يقطع (FG) في النقطة D

بين أن : $PB+PC+PA=ED$

تمرين 4

x و y و z و w أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{w}$

بين أن : $\sqrt{\frac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}}=\frac{x}{w}$

حل أولمبياد الأول

تمرين 1

لدينا : $(x-y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ يعني : $x^2 + y^2 \geq 2xy$ يعني : $\dfrac{x^2+y^2}{y} \geq \dfrac{2xy}{y}$

إذن : $\dfrac{x^2}{y} + y \geq 2x \quad (1)$

وبنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{y^2}{z} + z \geq 2y \quad (2)$

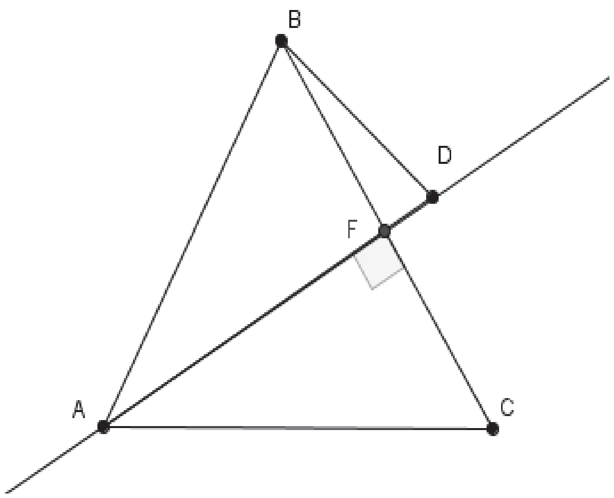
و $\dfrac{z^2}{x} + x \geq 2z \quad (3)$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\dfrac{x^2}{y} + y + \dfrac{y^2}{z} + z + \dfrac{z^2}{x} + x \geq 2x + 2y + 2z$

أي : $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} + (x+y+z) - (x+y+z) \geq 2(x+y+z) - (x+y+z)$

وبالتالي : $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} \geq x + y + z$

تمرين 2



لدينا : $BA = BC$ و $BA = AD$

إذن المثلثان ABC و ABD متساويا الساقين في B و A على التوالي

ومنه $B\hat{A}C = B\hat{C}A$ و $A\hat{B}D = A\hat{D}B$

بما أن المثلثات BAF و AFC و BFD هي قائمة الزاوية كلها في F

فإن : $F\hat{A}C + A\hat{C}B = 90^{\circ}$ و $B\hat{A}F + A\hat{B}C = 90^{\circ}$ و $F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^{\circ}$

نجمع المتساويات الثلاثة طرف بطرف : $F\hat{A}C + A\hat{C}B + B\hat{A}F + A\hat{B}C + F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^{\circ} + 90^{\circ} + 90^{\circ}$

أي : $\left(F\hat{A}C + B\hat{A}F\right) + A\hat{C}B + \left(A\hat{B}C + F\hat{B}D\right) + B\hat{D}A = 90^{\circ} + 90^{\circ} + 90^{\circ}$

نعلم أن : $B\hat{A}C = F\hat{A}C + B\hat{A}F$ و $A\hat{B}D = A\hat{B}C + F\hat{B}D$

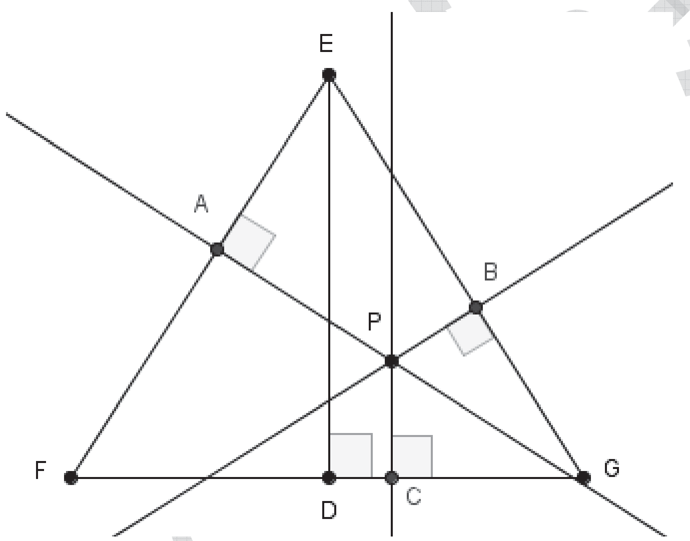
أي : $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^{\circ} + 90^{\circ} + 90^{\circ}$

أي : $2B\hat{A}C + 2B\hat{D}A = 270^{\circ}$ لأن $B\hat{A}C = B\hat{C}A$ و $A\hat{B}D = A\hat{D}B$

أي : $2\left(B\hat{A}C + B\hat{D}A\right) = 270^{\circ}$

وبالتالي : $B\hat{A}C + B\hat{D}A = 135^{\circ}$

تمرين 3



نحسب مساحة المثلث EFG بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى : $S_{EFG} = \dfrac{ED \times FG}{2}$ (1)

الطريقة الثانية :

لدينا :

$$\begin{aligned} S_{EFG} &= S_{PEG} + S_{PFG} + S_{PEF} \\ &= \frac{PB \times EG}{2} + \frac{PC \times FG}{2} + \frac{PA \times EF}{2} \\ &= \frac{PB \times EG + PC \times FG + PA \times EF}{2} \end{aligned}$$

نعلم أن $FG = EG = EF$

إذن : $S_{EFG} = \dfrac{PB\times FG + PC\times FG + PA\times FG}{2}$

ومنه : $S_{EFG} = \dfrac{FG(PB+PC+PA)}{2} \qquad (2)$

من 1 و 2 نستنتج أن : $\dfrac{FG(PB+PC+PA)}{2} = \dfrac{ED\times FG}{2}$

أي : $\dfrac{2}{FG}\times\dfrac{FG(PB+PC+PA)}{2} = \dfrac{2}{FG}\times\dfrac{ED\times FG}{2}$

وبالتالي : $PB+PC+PA = ED$

<u>تمرين 4</u>

نضع : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{w} = k$

يعني : $z = kw$ و $y = zk$ و $x = yk$

يعني : $z = kw$ و $y = (kw)k$ و $x = yk$

إذن : $z = kw$ و $y = wk^2$ و $x = (wk^2)k = k^3 w$

لنبين أن : $\sqrt{\dfrac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}} - \dfrac{x}{w} = 0$

$$\sqrt{\dfrac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}} - \dfrac{x}{w} = \sqrt{\dfrac{(k^3w)^5+(wk^2)^2(kw)^2+(k^3w)^3(kw)^2}{(wk^2)^4(kw)+w^4+(wk^2)^2(kw)w^2}} - \dfrac{wk^3}{w}$$

$$= \sqrt{\dfrac{k^{15}w^5+k^4w^2k^2w^2+k^9w^3k^2w^2}{k^8w^4kw+w^4+k^4w^2kww^2}} - k^3$$

$$= \sqrt{\dfrac{k^{15}w^5+k^6w^4+k^{11}w^5}{k^9w^5+w^4+k^5w^5}} - k^3$$

$$= \sqrt{\dfrac{k^6\cancel{w^4}\left(\cancel{k^9w+1+k^5w}\right)}{\cancel{w^4}\left(\cancel{k^9w+1+k^5w}\right)}} - k^3$$

$$= \sqrt{k^6} - k^3 = \sqrt{(k^3)^2} - k^3 = k^3 - k^3 = 0$$

وبالتالي : $\sqrt{\dfrac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}} = \dfrac{x}{w}$