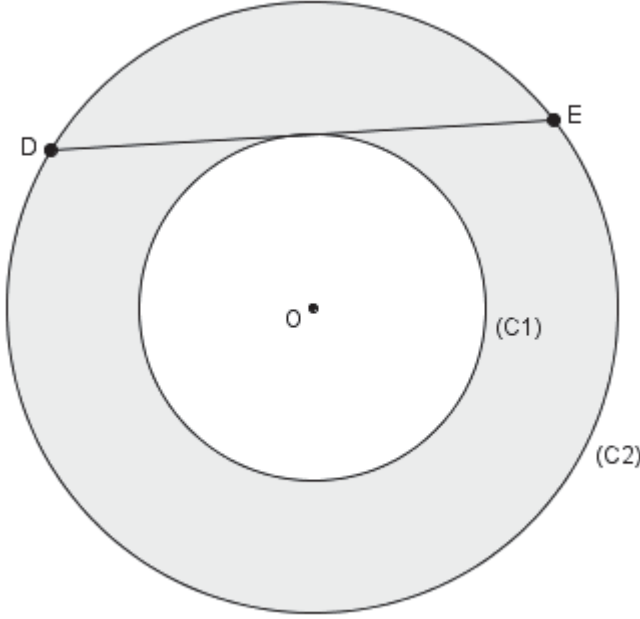


أولمبياد الثامن والعشرون

تمرين 1



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

النقطة O هي مركز مشترك للدائرة
 (C_1) التي شعاعها r والدائرة (C_2) التي
 شعاعها R . (DE) هو مماس للدائرة
 (C_1) و $DE = 7\text{cm}$
 احسب S مساحة المنطقة المظللة

تمرين 2

x و y عددين حقيقيين بحيث : $x + y = 1$
 بين أن : $xy \leq \frac{1}{4}$

تمرين 3

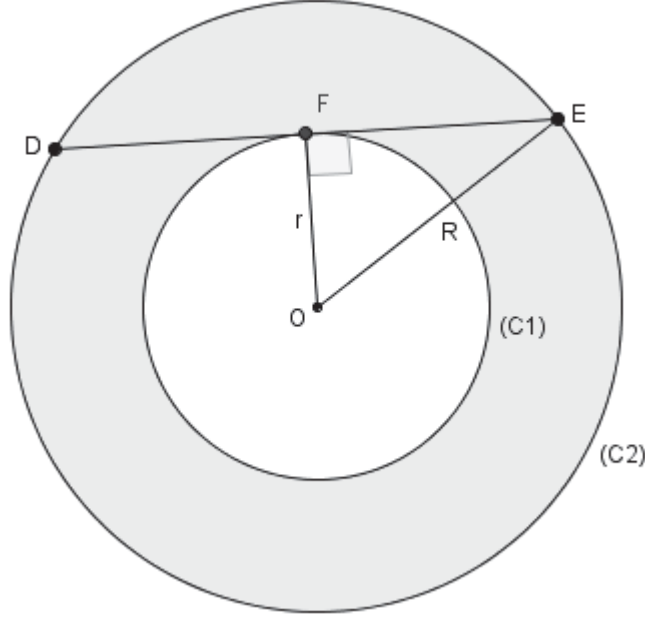
x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا
 1- بين أن : $\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(y^2-1)} \leq xy$
 2- استنتج أن : $\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(y^2-1)} + \sqrt{(z^2-1)} \leq \frac{xy + yz + xz}{2}$

تمرين 4

1- a عدد حقيقي موجب قطعا بحيث : $a + \frac{1}{a} = 2$
 احسب $a^2 + \frac{1}{a^2}$ و $a^3 + \frac{1}{a^3}$ و $a^6 + \frac{1}{a^6}$ و $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$
 2- بين أن : $555555^2 - 333333^2 = 444444$

حل أولمبياد الثامن والعشرون

تمرين 1



لدينا (DE) هو مماس للدائرة (C_1) في النقطة F

إذن $(OF) \perp (DE)$

بما أن $(OF) \perp (DE)$ و $OE = OD = R$ فإن (OF) واسط القطعة $[DE]$

$$\text{ومنه : } FD = FE = \frac{DE}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ cm}$$

لدينا المثلث OFE قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $OE^2 = OF^2 + FE^2$

$$\text{أي : } R^2 = r^2 + 3.5^2$$

$$\text{أي : } R^2 - r^2 = 12.25 \text{ cm} \quad (1)$$

مساحة المنطقة المظللة $(S) = \text{مساحة الدائرة } (C_2) - \text{مساحة الدائرة } (C_1)$

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

من 1 و 2 نستنتج أن : $S = \pi (R^2 - r^2) = 3.14 \times 12.25 = 38.465 \text{ cm}^2$

تمرين 2

لدينا : $x + y = 1$ يعني : $(x + y)^2 = 1^2$ يعني : $x^2 + 2xy + y^2 = 1$
 يعني : $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = 1 - 4xy$ يعني : $x^2 - 2xy + y^2 = 1 - 4xy$ يعني : $(x - y)^2 = 1 - 4xy$
 (نعلم أن : $(x - y)^2 \geq 0$)
 يعني : $1 - 4xy \geq 0$ يعني : $1 \geq 4xy$ إذن : $xy \leq \frac{1}{4}$

تمرين 3

لدينا : $\left(\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1\right)^2 \geq 0$
 يعني : $(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1 \geq 0$
 يعني : $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1 \geq 0$
 يعني : $x^2 - 1 + y^2 - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \leq x^2y^2$
 يعني : $\left(\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)}\right)^2 \leq x^2y^2$ يعني : $\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} \leq xy$
 إذن : $\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} \leq xy$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} \leq xy$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq yz$ (2)

و $\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq xz$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} + \sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq xy + yz + xz$$

$$2\sqrt{(x^2 - 1)} + 2\sqrt{(y^2 - 1)} + 2\sqrt{(z^2 - 1)} \leq xy + yz + xz \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \left(\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \right) \leq \frac{1}{2} \times (xy + yz + xz) \quad \text{أي :}$$

$$\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq \frac{xy + yz + xz}{2} \quad \text{وبالتالي :}$$

تمرين 4

-1

حساب $a^2 + \frac{1}{a^2}$

$$a + \frac{1}{a} = 2 : \text{ لدينا}$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 2^2 : \text{ يعني}$$

$$a^2 + 2 \times a \times \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 2 : \text{ إذن}$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} : \text{ حساب -}$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2 \times 2 : \text{ لدينا}$$

$$a \times a^2 + a \times \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \times a^2 + \frac{1}{a} \times \frac{1}{a^2} = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^3 + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a^3} = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^3 + 2 + \frac{1}{a^3} = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = 2 : \text{ إذن}$$

$$a^6 + \frac{1}{a^6} : \text{ حساب -}$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 2 : \text{ لدينا}$$

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = 2^2 : \text{ يعني}$$

$$(a^2)^2 + 2 \times a^2 \times \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^4 + 2 + \frac{1}{a^4} = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = 2 : \text{ إذن}$$

$$\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2 \times 2 : \text{ لدينا}$$

$$a^4 \times a^2 + a^4 \times \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} \times a^2 + \frac{1}{a^4} \times \frac{1}{a^2} = 4 : \text{ يعني}$$

$$a^6 + \frac{1}{a^2} + a^2 + \frac{1}{a^6} = 4 : \text{ يعني}$$

يعني : $a^6 + 2 + \frac{1}{a^6} = 4$

إذن : $a^6 + \frac{1}{a^6} = 2$

- حساب $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

لدينا :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 &= (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{a}} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \\ &= a + 2 + \frac{1}{a} \\ &= 2 + 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

إذن : $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 2$

-2

$$\begin{aligned}555555^2 - 333333^2 &= (111111 \times 5)^2 - (111111 \times 3)^2 = 111111^2 \times 5^2 - 111111^2 \times 3^2 \\ &= 111111^2 \times (5^2 - 3^2) \\ &= 111111^2 \times (25 - 9) \\ &= 111111^2 \times 16 \\ &= 111111^2 \times 4^2 \\ &= (111111 \times 4)^2 = 444444^2\end{aligned}$$