

أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

بين أن : $xyz = \frac{1}{3}$ حيث : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=5 \end{cases}$

تمرين 2

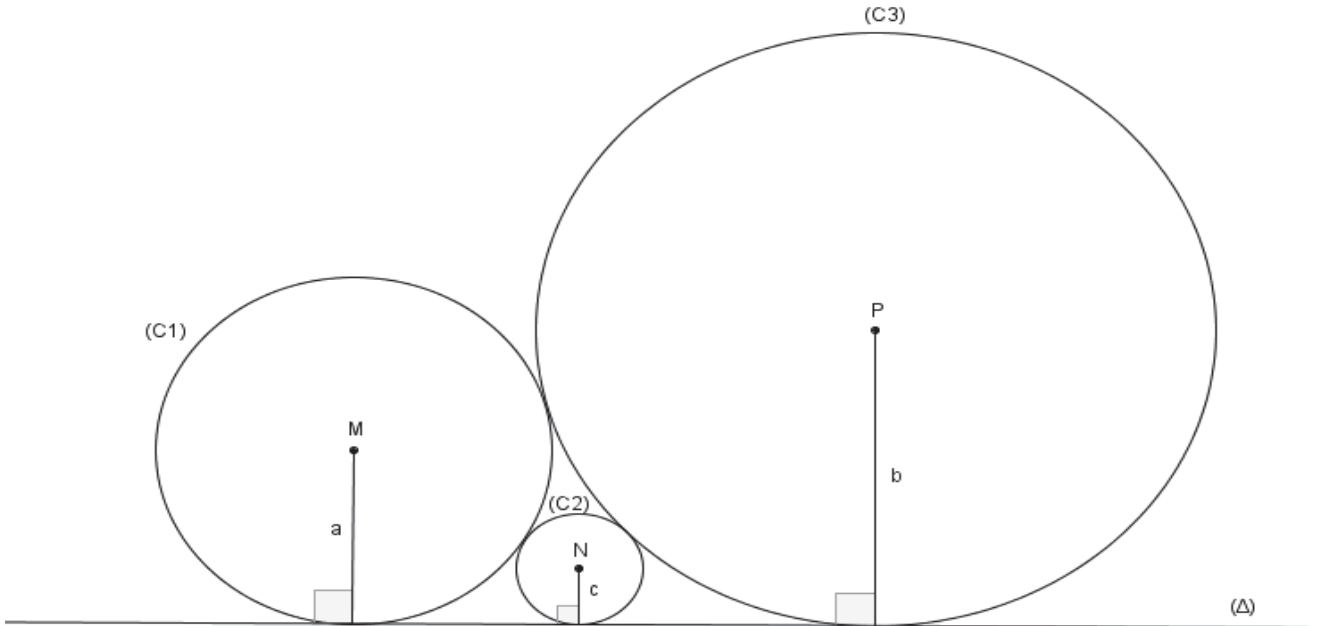
$$X = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$$

$$Y = 1+2+3+4+\dots+99+100$$

بين أن : $X+Y=0$

تمرين 3

نعتبر الشكل أسفله بحيث : الدوائر $C_1(M,a)$ و $C_2(N,c)$ و $C_3(P,b)$ متماسة فيما بينها والمستقيم (Δ) مماس للدوائر الثلاثة بين أن : $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$



تمرين 4

a و b و c أطوال أضلاع مثلث

بين أن $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$

حل أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

$$\text{لدينا : } x + y + z = 1$$

$$\text{يعني : } (x + y + z)^3 = 1^3$$

$$\text{يعني : } (x + y + z)^2 \times (x + y + z) = 1$$

$$\text{يعني : } (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \times (x + y + z) = 1$$

$$\text{يعني : } x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz = 1$$

$$\text{يعني : } x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y + z) + 3y^2(x + z) + 3z^2(x + y) + 6xyz = 1$$

$$\text{بما أن } x + y + z = 1 \text{ فإن } x + y = 1 - z \text{ و } y + z = 1 - x \text{ و } x + z = 1 - y$$

$$\text{يعني : } x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(1 - x) + 3y^2(1 - y) + 3z^2(1 - z) + 6xyz = 1$$

$$\text{يعني : } x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3 + 6xyz = 1$$

$$\text{يعني : } x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz = 1$$

$$\text{يعني : } 5 + 3 \times 3 - 3 \times 5 + 6xyz = 1 \quad (x^3 + y^3 + z^3 = 5 \text{ و } x^2 + y^2 + z^2 = 3)$$

$$\text{يعني : } -1 + 6xyz = 1$$

$$\text{وبالتالي : } xyz = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تمرين 2

$$X + Y = (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2) + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100)$$

$$= (1+1) + (2-2^2) + (3+3^2) + (4-4^2) + \dots + (99+99^2) + (100-100^2)$$

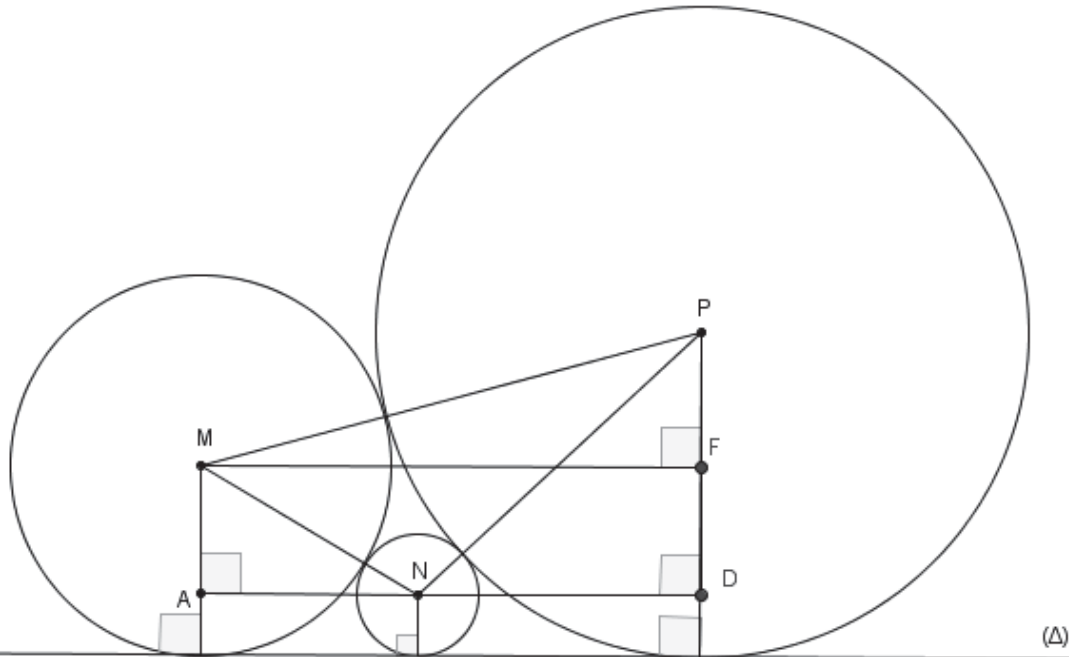
$$= 2 + (2 \times (1-2)) + (3 \times (1+3)) + (4 \times (1-4)) + \dots + (99 \times (1+99)) + (100 \times (1-100))$$

$$= 2 + (2 \times (-1)) + (3 \times (4)) + (4 \times (-3)) + \dots + (99 \times (100)) + (100 \times (-99))$$

$$= \cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{12} - \cancel{12} + \dots + \cancel{9900} - \cancel{9900}$$

$$= 0$$

تمرين 3



لدينا قائم الزاوية في A

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MN^2 = MA^2 + AN^2$

أي : $AN^2 = MN^2 - MA^2$ أي : $AN^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2$

أي : $AN = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2}$ أي : $AN = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - a^2 + 2ac - c^2}$

ومنه : $(1) AN = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$

و لدينا قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $NP^2 = ND^2 + DP^2$

أي : $ND^2 = NP^2 - DP^2$ أي : $ND^2 = (c+b)^2 - (b-c)^2$

أي : $ND = \sqrt{(c+b)^2 - (b-c)^2}$ أي : $ND = \sqrt{c^2 + 2cb + b^2 - b^2 + 2cb - c^2}$

ومنه : $(2) ND = \sqrt{4cb} = 2\sqrt{cb}$

و لدينا قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MP^2 = MF^2 + PF^2$

$$MF^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2 \text{ أي } MF^2 = MP^2 - PF^2$$

$$MF = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2} \text{ أي } MF = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2}$$

$$(3) \text{ ومنه } MF = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$$

$$(4) \text{ لدينا } MF = AD = AN + ND$$

$$\text{من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن } 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb}$$

$$\text{أي } \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2\sqrt{ab} = \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times (2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb})$$

$$\text{وبالتالي } \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

تمرين 4

لدينا a و b و c أطوال أضلاع مثلث

يعني $b+c > a$ و $c+a > b$ و $a+b > c$

يعني $b+c-a > 0$ و $c+a-b > 0$ و $a+b-c > 0$

نضع : $z = c+a-b > 0$ و $y = b+c-a > 0$ و $x = a+b-c > 0$

لدينا : $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ يعني $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$ يعني $2\sqrt{xy} \leq x+y$

$$\text{إذن : } (1) \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$$(2) \sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2} \text{ بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$(3) \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2} \text{ و}$$

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\sqrt{xy} \times \sqrt{xz} \times \sqrt{yz} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$$

$$\text{أي } \sqrt{(xyz)^2} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2} \text{ أي } xyz \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$$

أي :

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{a+b-c}{2} \times \frac{b+c-a}{2} \times \frac{a+c-b}{2}$$

$$\text{أي : } (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{2b}{2} \times \frac{2a}{2} \times \frac{2c}{2}$$

وبالتالي : $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq abc$