

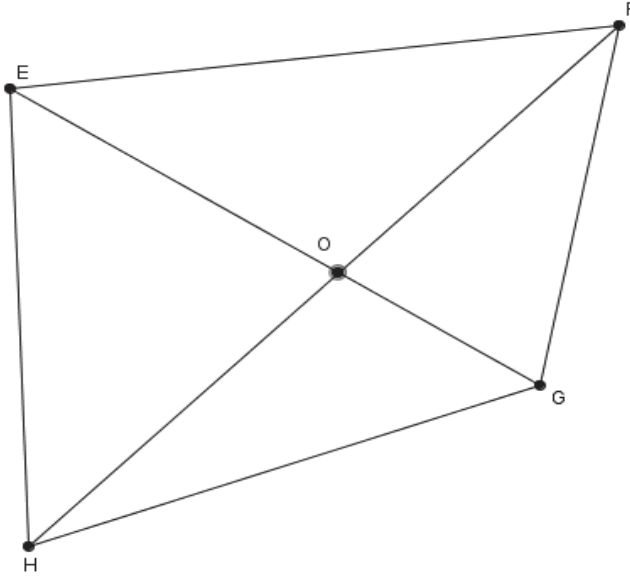
أولمبياد الخامس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{بين أن : } (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$$

تمرين 2



رباعي محدب قطراه $EFGH$

$[EG]$ و $[FH]$ يتقاطعان

في النقطة O كما هو مبين

في الشكل جانبه

P : محيط الرباعي $EFGH$

$$\text{بين أن : } \frac{1}{2}P < EG + FH < P$$

تمرين 3

$$\text{احسب } \frac{\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}}{\frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \dots + \frac{1}{99 \times 52} + \frac{1}{100 \times 51}}$$

تمرين 4

أنشئ قطعة طولها $\sqrt{10}$ (تبرير الإنشاء)

حل أولمبياد الخامس

تمرين 1

نحدد إشارة الفرق : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9$

لدينا :

$$\begin{aligned}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9 &= \frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-9 \\&= 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1-9 \\&= \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}-6 \\&= \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2 \\&= \frac{x^2+y^2-2xy}{xy}+\frac{y^2+z^2-2zy}{zy}+\frac{x^2+z^2-2xz}{xz} \\&= \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz}\end{aligned}$$

نعلم أن $(z-y)^2 \geq 0$ و $(x-y)^2 \geq 0$ و $(x-z)^2 \geq 0$

بما أن $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ فإن : $xy > 0$ و $zy > 0$ و $xz > 0$

$$\text{إذن : } (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9 = \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz} \geq 0$$

وبالتالي : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

تمرين 2

محيط الرباعي EFGH هو :

$$P = EF + FG + GH + HE$$

في المثلثين EFG و EHG لدينا : $EG < EF + FG$ و $EG < EH + HG$

نجمع المتفاوتتين طرف بطرف : $EG + EG < EF + FG + EH + HG$

أي : $2EG < P$

إذن : $EG < \frac{P}{2}$ (1)

في المثلثين EHF و HGF لدينا : $FH < EF + EH$ و $FH < GF + HG$

نجمع المتفاوتتين طرف بطرف : $FH + FH < EF + EH + GF + HG$

أي : $2FH < P$

إذن : $FH < \frac{P}{2}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $EG + FH < P$ (3)

في المثلثات EFO و FOG و HGO و EOH لدينا : $EF < EO + OF$

و $FG < OF + OG$ و $HG < OG + OH$ و $EH < OH + OE$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف : $EF + FG + HG + EH < EO + OF + OF + OG + OG + OH + OH + OE$

أي : $P < 2(EO + OG) + 2(OF + OH)$ أي : $P < 2EG + 2FH$

أي : $P < 2(EG + FH)$ أي : $\frac{P}{2} < EG + FH$ (4)

من 3 و 4 نستنتج أن : $\frac{1}{2}P < EG + FH < P$

تمرين 3

نضع : $X = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$

و $Y = \frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \dots + \frac{1}{99 \times 52} + \frac{1}{100 \times 51}$

لدينا : $X = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$

يعني : $X = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$

يعني : $X = \left(1 + \left(\frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{4}\right)\right) + \left(\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6}\right)\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} + \left(\frac{1}{100} - 2 \times \frac{1}{100}\right)\right)$

يعني : $X = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right)$

يعني : $X = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right)$

يعني : $X = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$

يعني : $X + X = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right)$

$$2X = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{98}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{52}\right) + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{51}\right) : \text{يعني}$$

$$2X = \frac{151}{51 \times 100} + \frac{151}{52 \times 99} + \frac{151}{53 \times 98} + \dots + \frac{151}{99 \times 52} + \frac{151}{100 \times 51} : \text{يعني}$$

$$2X = 151 \left(\frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \dots + \frac{1}{99 \times 52} + \frac{1}{100 \times 51} \right) : \text{يعني}$$

$$2X = 151Y : \text{يعني}$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{151}{2} : \text{وبالتالي}$$

تمرين 4

المرحلة الأولى :

ننشئ المثلث ABC قائم الزاوية في B بحيث :

$$AB = BC = 1$$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC = \sqrt{2} : \text{يعني} : AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة D بحيث المثلث ADC قائم الزاوية في

$$DC = 2 : \text{بحيث}$$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AD^2 = AC^2 + DC^2$

$$AD = \sqrt{6} : \text{يعني} : AD^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$

المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة A' بحيث المثلث ADA' قائم الزاوية في D بحيث : $DA' = 2$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AA'^2 = DA'^2 + AD^2$

$$AA'^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 = 4 + 6 = 10 : \text{يعني}$$

$$AA' = \sqrt{10} : \text{ومنه}$$

