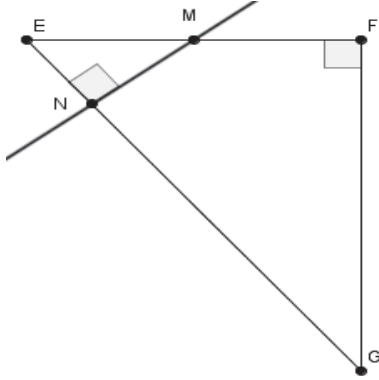


أولمبياد التاسع

تمرين 1

x و y عددين حقيقيين بحيث : $x > 1$ و $y > 1$
بين أن : $\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8$

تمرين 2



EFG مثلث قائم الزاوية في F بحيث : $EF < FG$
النقطة M منتصف $[EF]$
النقطة N هي المسقط العمودي للنقطة E على FG
بين أن : $GN^2 - EN^2 = FG^2$

تمرين 3

m عدد حقيقي موجب قطعاً قطعاً

1- بين أن $m + \frac{1}{m} \geq 2$

2- x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة قطعاً

بين أن : $(x+y+z+t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$

تمرين 4

$ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصفا $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

في المثلث AMD الارتفاع المار من D يقطع (AM) في E

بين أن : $CE = CD$

حل أولمبياد التاسع

تمرين 1

لدينا : $x > 1$ و $y > 1$

يعني : $x-1 > 0$ و $y-1 > 0$

نضع : $a = x-1$ و $b = y-1$

يعني : $x = a+1$ و $y = b+1$

إذن : $x^2 = (a+1)^2$ و $y^2 = (b+1)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} &= \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \\ &= \frac{a^2 + 2a + 1}{b} + \frac{b^2 + 2b + 1}{a} \\ &= \frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

لدينا : $(a+b)^2 \geq 0$

يعني : $a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$ يعني : $a^2 + b^2 \geq -2ab$

يعني : $\frac{1}{ab} \times (a^2 + b^2) \geq \frac{1}{ab} \times (-2ab)$ يعني : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq -2$

إذن : $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq -4$ (1)

لدينا : $(a-1)^2 \geq 0$

يعني : $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ يعني : $a^2 + 1 \geq 2a$ يعني : $\frac{1}{b} \times (a^2 + 1) \geq \frac{1}{b} \times 2a$

إذن : $\frac{a^2 + 1}{b} \geq \frac{2a}{b}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{b^2 + 1}{a} \geq \frac{2b}{a}$ (3)

نجمع المتفاوتتين 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$$

$$\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \text{ أي :}$$

$$(4) \quad \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \text{ ومنه :}$$

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} = \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4+4 : \text{ نستنتج أن :}$$

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8 \text{ وبالتالي}$$

تمرين 2

لدينا المثلثان MEN و MNG قائما الزاوية

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $ME^2 = MN^2 + EN^2$ و $MG^2 = MN^2 + GN^2$

$$\text{ومنه : } EN^2 = ME^2 - MN^2 \text{ و } GN^2 = MG^2 - MN^2$$

$$\text{ومنه : } GN^2 - EN^2 = MG^2 - MN^2 - (ME^2 - MN^2)$$

$$\text{ومنه : } GN^2 - EN^2 = MG^2 - ME^2$$

$$(1) \quad \text{ومنه : } GN^2 - EN^2 = MG^2 - MF^2$$

$$(ME = MF \text{ لأن النقطة } M \text{ منتصف } [EF])$$

لدينا المثلثان MGF قائم الزاوية

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MG^2 = MF^2 + FG^2$

$$(2) \quad \text{ومنه : } FG^2 = MG^2 - MF^2$$

$$\text{من 1 و 2 نستنتج أن : } GN^2 - EN^2 = FG^2$$

تمرين 3

$$1- \text{ لدينا : } m + \frac{1}{m} - 2 = \frac{m^2+1}{m} - 2 = \frac{m^2+1-2m}{m} = \frac{(m-1)^2}{m} \geq 0 \text{ إذن : } m + \frac{1}{m} \geq 2$$

$$2- \text{ لدينا :}$$

$$\begin{aligned} (x+y+z+t)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) &= 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{t} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{y}{t} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + 1 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{x}{t} + \frac{t}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{y}{t} + \frac{t}{y}\right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) + 4 \end{aligned}$$

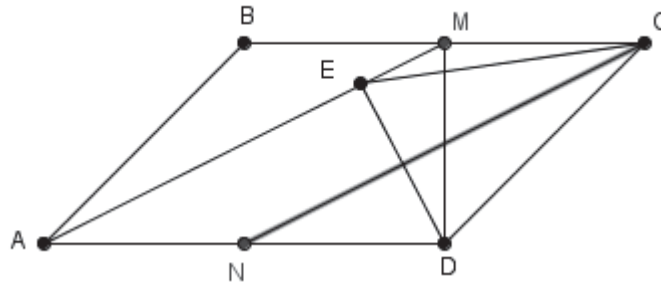
حسب السؤال 1 لدينا : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ و $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$ و $\frac{x}{t} + \frac{t}{x} \geq 2$ و $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ و $\frac{y}{t} + \frac{t}{y} \geq 2$ و $\frac{z}{t} + \frac{t}{z} \geq 2$

إذن :

$$\begin{aligned} (x+y+z+t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) &= 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{t} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{y}{t} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + 1 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{x}{t} + \frac{t}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{y}{t} + \frac{t}{y} \right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z} \right) + 4 \\ &\geq 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 \end{aligned}$$

وبالتالي : $(x+y+z+t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$

تمرين 4



لدينا $ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصف $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

إذن : $(MC) \parallel (AN)$ و $MC = AN$

ومنه : الرباعي $ANCM$ متوازي الأضلاع

ومنه : $(AM) \parallel (NC)$

ومنه : $(CN) \perp (DE)$ (1) لأن $(AM) \perp (DE)$

في المثلث ADE لدينا N منتصف $[AD]$ و $(CN) \parallel (AE)$

إذن (CN) يمر من منتصف (DE) (2)

من 1 و 2 نستنتج أن (CN) هو واسط القطعة $[DE]$

وبالتالي : $CE = CD$