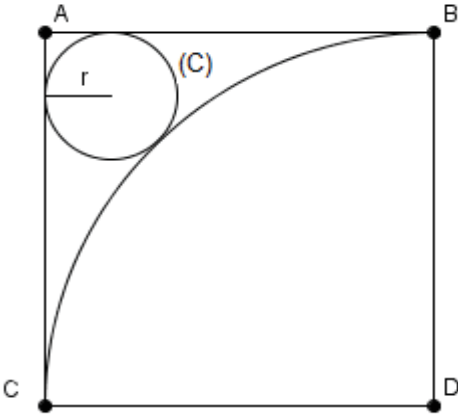


أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x + y + z = 1$
بين أن : $\frac{x(1-x)}{yz} + \frac{y(1-y)}{xz} + \frac{z(1-z)}{xy} \geq 6$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABDC$ مربع و $BD = R$ و r هو شعاع الدائرة (C)

بين أن : $r = R(3 - 2\sqrt{2})$

تمرين 3

حل المعادلة : $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = 8$

تمرين 4

x و y عدنان حقيقيان موجبان غير منعدمان

بين أن : $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

حل أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

لدينا : $(x - y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

يعني : $x^2 + y^2 \geq 2xy$

يعني : $z \times (x^2 + y^2) \geq z \times 2xy$

إذن : $z(x^2 + y^2) \geq 2xyz$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $y(x^2 + z^2) \geq 2xyz$ (2)

و $x(y^2 + z^2) \geq 2xyz$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$z(x^2 + y^2) + y(x^2 + z^2) + x(y^2 + z^2) \geq 2xyz + 2xyz + 2xyz$$

أي : $zx^2 + zy^2 + yx^2 + yz^2 + xy^2 + xz^2 \geq 6xyz$

أي : $x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(y + x) \geq 6xyz$

ونعلم أن : $x + y + z = 1$ يعني : $x + y = 1 - z$ و $x + z = 1 - y$ و $y + z = 1 - x$

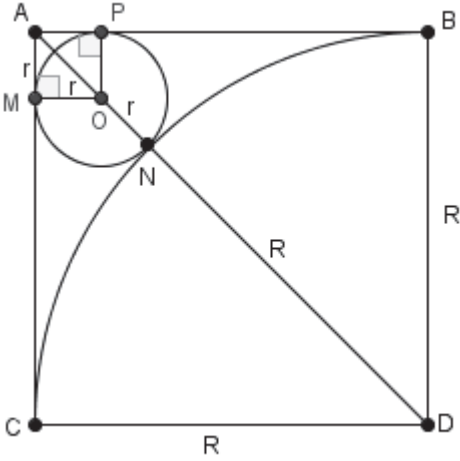
أي : $x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(y + x) = x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) \geq 6xyz$

أي : $\frac{1}{xyz} \times (x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z)) \geq \frac{1}{xyz} \times 6xyz$

أي : $\frac{x^2(1 - x)}{xyz} + \frac{y^2(1 - y)}{xyz} + \frac{z^2(1 - z)}{xyz} \geq 6$

وبالتالي : $\frac{x(1 - x)}{yz} + \frac{y(1 - y)}{xz} + \frac{z(1 - z)}{xy} \geq 6$

تمرين 2



لدينا (AM) و (AP) مماسا للدائرة (C)

إذن : $(AM) \perp (OM)$ و $(AP) \perp (OP)$

ومنه $\hat{AMO} = \hat{APO} = 90^\circ$

لدينا : $\hat{POM} = 360 - \hat{AMO} - \hat{APO} - \hat{MAP}$

إذن : $\hat{POM} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $OP = OM$ و $\hat{POM} = \hat{AMO} = \hat{APO} = \hat{MAP} = 90^\circ$

فإن الرباعي $AMOP$ مربع

حساب AO :

لدينا المثلث AMO قائم الزاوية في M

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AO^2 = AM^2 + MO^2$

أي : $AO^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$

ومنه : $AO = \sqrt{r^2 2} = r\sqrt{2}$

حساب AD :

لدينا المثلث ABD قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AD^2 = AB^2 + BD^2$

أي : $AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

ومنه : $AD = \sqrt{R^2 2} = R\sqrt{2}$

حساب r :

لدينا : $AD = AO + ON + ND$

يعني : $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + R$

يعني : $R\sqrt{2} - R = r\sqrt{2} + r$

يعني : $R(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} + 1)$

يعني : $r = \frac{R(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1}$

يعني :

$$\begin{aligned} r &= \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{R(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} \\ &= \frac{R(2-2\sqrt{2}+1)}{1} \\ &= R(3-2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

وبالتالي : $r = R(3-2\sqrt{2})$

تمرين 3

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 8$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = 8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{x-(x-2)} + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x+2-x} = 8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2} + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} = 8$

يعني : $\frac{\cancel{\sqrt{x}}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}-\cancel{\sqrt{x}}}{2} = 8$

يعني : $-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2} = 8$

يعني : $(-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})^2 = 8^2$

يعني : $x - \cancel{2} - 2\sqrt{(x-2)(x+2)} + x + \cancel{2} = 64$

يعني : $2x - 2\sqrt{x^2-4} = 64$

يعني : $2(x - \sqrt{x^2-4}) = 64$

يعني : $x - \sqrt{x^2-4} = 32$

يعني : $-\sqrt{x^2-4} = 32-x$

يعني : $(-\sqrt{x^2-4})^2 = (32-x)^2$

يعني : $x^2 - 4 = 1024 - 64x + x^2$

يعني : $64x = 4 + 1024$

يعني : $64x = 1028$

وبالتالي : $x = \frac{1028}{64} = \frac{257}{16}$

تمرين 4

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) &= \frac{x^2 + y^2}{y^2 x^2} - \frac{y + x}{xy} \\ &= \frac{x^3 + y^3}{y^2 x^2} - \frac{xy}{xy} \times \frac{y + x}{xy} \\ &= \frac{x^3 + y^3}{y^2 x^2} - \frac{xy^2 + x^2 y}{x^2 y^2} \\ &= \frac{x^3 + y^3 - xy^2 - x^2 y}{x^2 y^2} \\ &= \frac{x^2(x - y) - y^2(x - y)}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 - y^2)}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x - y)(x - y)(x + y)}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x - y)^2 (x + y)}{x^2 y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

لأن $(x - y)^2 \geq 0$ و $(x + y) > 0$ و $x^2 y^2 > 0$ و $x > 0$ و $y > 0$

إذن : $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$