

▶ التمرين 01 ◀

(1) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بجدول تغيراتها كما يلي:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$\alpha$	$0$	$\beta$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$		$\vdots$	$1$	$\vdots$	
			$5$		$0$	$0$	
				$-\infty$			$-\infty$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) عيّن الأعداد الحقيقية  $a, b$  و  $c$  حيث:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$$

(2) عيّن  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(3) عيّن معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $(-2)$ .

(4) أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير:

(أ)  $f(2) > f(1)$

(ب)  $f'(1) > 0$

(ج) المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد في  $\mathbb{R} - \{-1\}$

(5) عيّن إشارة الدالة  $f$

(II) نضع فيما يلي:  $a = -1$  و  $b = 1$  و  $c = 1$ :

(1) بيّن أنه من أجل كل  $x \in D_f$  لدينا:

$$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

(2) بيّن أن  $(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً  $(\Delta)$  ثم عيّن معادلة له

(3) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

(4) عيّن إحداثيات النقطة  $\omega$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  مع

المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة  $x = -1$ .

(5) بيّن أن النقطة  $\omega$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .

(6) ارسم كل من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

(7) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = -x + m$$

(III) لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ:

$$g(x) = [f(x)]^2$$

(1) عيّن نهايات الدالة  $g$  عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) احسب:  $g(\alpha)$ ،  $g(\beta)$ ،  $g(0)$  و  $g(-2)$

(3) باستعمال مشتق مركب دالتين، احسب  $g'(x)$

(4) استنتج تغيرات الدالة  $g$  دون دراسة تغيراتها.

▶ التمرين 02 ◀

(1) لتكن الدالة  $f$  المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$

ثم بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $D_f$  فإن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2}$$

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

(2)

(أ) ادرس تغيرات الدالة  $f$

(ب) أوجد المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$ .

(ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمقارب الأفقي  $(\Delta)$ :

(3) عين تقريب تآلفي للدالة  $f$  عند  $0$ .

(4) أنشئ بيانياً المنحنى  $(C_f)$ .

(II) نعرف الدالة  $h$  كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة  $h$ .

(2) اكتب  $h(x)$  دون رمز القيمة المطلقة.

(3) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة  $h$  عند  $0$ .

(4) ادرس شفعية الدالة  $h$ .

(5) استنتج التمثيل البياني  $(C_h)$  للدالة  $h$  انطلاقاً من  $(C_f)$ .

(ب) ناقشاً بيانياً حسب الوسيط الحقيقي  $m$  وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m - 1)x^2 - (3m + 2)x + 2m - 1 = 0$$

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

5) تعيين إشارة الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$\alpha$	$\beta$	$+\infty$
$f(x)$	+	-	0	+	0

(II)

1

/أ تبين أنه  $f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$ 

$$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1} = \frac{(-x+2)(x+1) - 1}{x+1}$$

$$= \frac{-x^2 - x + 2x + 2 - 1}{x+1} = \frac{-x^2 + x + 1}{x+1}$$

ب/ استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً  $(\Delta)$  بجوار  $\pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x + 2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ -x + 2 - \frac{1}{x+1} + x - 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ -\frac{1}{x+1} \right] = 0$$

إذن  $(C_f)$  يقبل م م مائلاً  $(\Delta)$  بجوار  $\pm\infty$  معادلته:

$$y = -x + 2$$

ج/ دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ :

$$f(x) - (-x + 2) = -\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-x-1}$$

لدينا:  $0 = -x - 1$  ومنه  $x = -1$  ومنه:

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x) - y(\Delta)$	+	-	
الوضعية	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$	$(C_f)$ تحت $(\Delta)$	

2

/أ تعيين إحداثيات النقطة  $\omega$ :

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ لدينا}$$

بتعويض القيمة  $(x = -1)$  في معادلة  $(\Delta)$  نجد  $(y = 3)$ إذن:  $\omega(-1; 3)$ ب/ تبين أن النقطة  $\omega$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ :• نبين أولاً أن  $D_f \cap D_{f'} = \emptyset$  أي  $(-2 - x) \in D_f$ لدينا:  $x \in D_f$  معناه:  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ معناه:  $x > -1$  أو  $x < -1$  معناه:  $(-x) < 1$  أو  $(-x) > 1$ معناه:  $(-2 - x) < -1$  أو  $(-2 - x) > -1$ معناه:  $(-2 - x) \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ معناه:  $(-2 - x) \in D_f$ • نبين ثانياً أن  $f(-2 - x) + f(x) = 6$ 

$$f(-2 - x) + f(x)$$

## تصحيح التمرين 01

(I)

1) تعيين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$ :

$$\text{لدينا من جدول التغيرات: } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f(-2) = 5 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{c}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x + 1) - (ax^2 + bx + c)}{(x + 1)^2}$$

وبما أن  $f'(0) = 0$  فإن:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{b - c}{1} = 0 \Rightarrow c = \boxed{b = 1}$$

ولدينا:

$$f(-2) = 5 \Rightarrow \frac{4a - 2b + c}{-1} = 5 \Rightarrow 4a = 2b - c - 5$$

$$\Rightarrow a = \frac{2b - c - 5}{4} \Rightarrow a = \frac{-4}{4} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

2) تعيين  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

 $+\infty$ 

- التفسير الهندسي:

 $(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً بجوار  $\pm\infty$  معادلته:  $x =$  $-1$ 3) تعيين معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة $(-2)$ :لما  $x = -2$  الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية محلية، أي أن المماسيكون موازياً لمحور الفواصل، ومنه معادلة المماس هي:  $y = 5$ 

4) الإجابة بصحيح أم خطأ مع التبرير:

$$f(2) > f(1) \text{ /أ}$$

خطأ، لأن: الدالة متناقصة على المجال  $]0; +\infty[$  ولدينا:  $\{1; 2\} \in$ 

$$f(2) < f(1) \text{ ومنه } ]0; +\infty[$$

ب/ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد في  $\mathbb{R} - \{-1\}$ :خطأ، لأن: لدينا من الجدول:  $f(x)$  تنعدم من أجل قيمتين هما  $\alpha$ و  $\beta$ .

$$f'(1) > 0 \text{ /ج}$$

خطأ، لأن: الدالة متناقصة على المجال  $]0; +\infty[$  ولدينا:  $1 \in$  $]0; +\infty[$  ومنه  $f'(1) > 0$ ، (لما الدالة  $f$  متناقصة تكون

$$f'(x) < 0$$

لما $m \in ]-\infty; 1[$ للمعادلة حل وحيد سالب
لما $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف معدوم
لما $m \in ]1; 2[$ للمعادلة حل وحيد موجب
لما $m = 2$ للمعادلة لا تقبل حلول
لما $m \in ]2; 3[$ للمعادلة حل وحيد سالب
لما $m = 3$ للمعادلة حل مضاعف سالب
لما $m \in ]3; +\infty[$ للمعادلة حل وحيد سالب

(III)

1 تعيين نهايات الدالة  $g$  عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا: الدالة  $g = u \circ f$  حيث:  $u(x) = x^2$  ومنه:

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$

2 حساب:  $g(\beta)$ ،  $g(\alpha)$ ،  $g(0)$  و  $g(-2)$ :

لدينا من جدول التغيرات  $f(\alpha) = 0$  و  $f(\beta) = 0$  ومنه:

$$g(\beta) = [f(\beta)]^2 = 0 \quad ; \quad g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$

$$\text{ولدينا: } g(-2) = [f(-2)]^2 = 5^2 = 25$$

$$g(0) = [f(0)]^2 = 1^2 = 1$$

3 باستعمال مشتق مركب دالتين، حساب  $g'(x)$ :

لدينا:  $g(x) = (u \circ f)(x) = u(f(x))$

ومنه:  $g'(x) = f'(x) \times u'(f(x))$

إذن:  $g'(x) = f'(x) \times 2f(x)$

4 استنتاج تغيرات الدالة  $g$  دون دراسة تغيراتها:

إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $f'(x)$  في إشارة  $f(x)$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$\alpha$	$0$	$\beta$	$+\infty$
$f(x)$	+	+	-	0	+	+	-
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-	-
$g'(x)$	-	0	+	-	0	-	+
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$0$	$1$	$0$	$+\infty$

$$= -(-x - 2) + 2 - \frac{1}{-x - 2 + 1} - x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

$$= 6 - \frac{1}{-x - 1} - \frac{1}{x + 1} = 6 + \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 1} = 6$$

إذن النقطة  $\omega$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى  $(C_f)$  يشمل النقطة  $\omega$ :

يوجد مماس يشمل النقطة  $\omega$  معناه يوجد  $a$  حقيقي، يحقق:

$$y_\omega = f'(a)(x_\omega - a) + f(a) \dots (*)$$

نفرض أن  $(*)$  محققة، ونصل إلى تناقض:

$$\text{قبل ذلك لدينا: } f'(x) = -1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ومنه:

$$y_\omega = f'(a)(x_\omega - a) + f(a)$$

$$\Rightarrow -1 = f'(a)(3 - a) + f(a)$$

$$\Rightarrow -1 = \left(-1 + \frac{1}{(a+1)^2}\right)(3 - a) + \frac{-a^2 + a + 1}{a + 1}$$

$$\Rightarrow -1 = \left(\frac{-(a+1)^2 + 1}{(a+1)^2}\right)(3 - a) + \frac{-a^2 + a + 1}{a + 1}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{(-a^2 - 2a + 1)(3 - a)}{(a+1)^2} + \frac{(-a^2 + a + 1)(a + 1)}{(a+1)^2}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{(-a^2 - 2a - 1 + 1)(3 - a) + (-a^2 + a + 1)(a + 1)}{(a+1)^2}$$

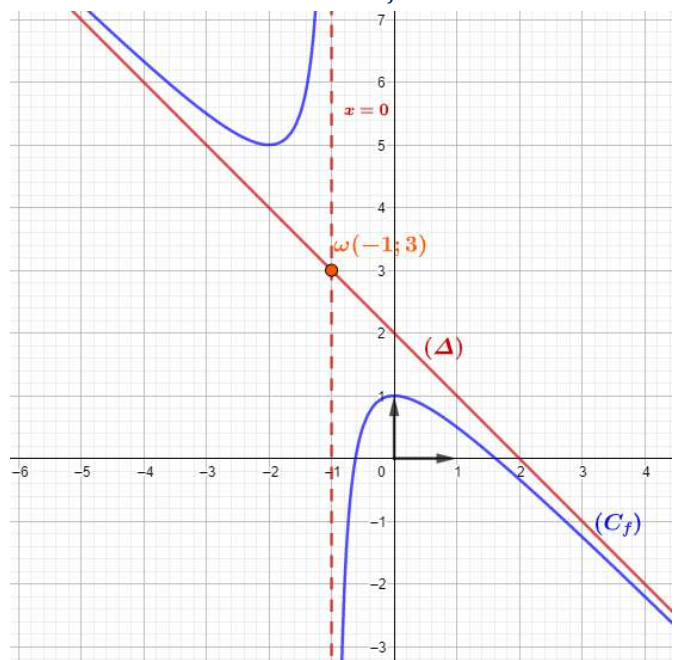
$$\Rightarrow -(a+1)^2 = -3a^2 - 6a + a^3 + 2a^2 - a^3 + a^2 + a - a^2 + a + 1$$

$$\Rightarrow -a^2 - 2a - 1 = -a^2 - 4a + 1 \Rightarrow -2a = 2$$

$$\Rightarrow a = -1$$

وهذا تناقض لأن  $a \notin D_f$  ومنه لا يوجد أي مماس يشمل  $\omega$ .

3 رسم كل من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ :



4 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيمات ذات

المعادلة  $y_m = -x + m$ ، وهي:

1 تعيين مجموعة تعريف الدالة  $f$ :

لكي تكون الدالة  $f$  معرفة يجب أن يكون:  $x^2 - 3x + 2 \neq 0$

$$(x-1)(x-2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

ومنه:  $D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; 2[ \cup ]2; +\infty[$

- تبين أنه:  $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} = \frac{a(x-1)(x-2) + b(x-2) + c(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax^3 + (-3a+b+c)x + (2a-2b-c)}{x^2-3x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ -3a+b+c=2 \\ 2a-2b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+c=5 \\ 2b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=9 \end{cases}$$

أ/ دراسة تغيرات الدالة  $f$ :

أولاً: حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = 1$  •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{4}{0^-} = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{4}{0^+} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\frac{4}{0^-} = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\frac{4}{0^+} = -\infty$

ثانياً: حساب  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-2)^2} = \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{4(x^2-4x+4) - 9(x^2-2x+1)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-5x^2+2x+7}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-5(x+1)(x-\frac{7}{5})}{(x^2-3x+2)^2}$$

لدينا: المقام  $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq 0$  ومنه الإشارة من البسط:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{أو} \quad x-\frac{7}{5}=0 \Rightarrow x=\frac{7}{5}$$

ثالثاً: جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$\frac{7}{5}$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$-$
$f(x)$	$1$	$0$	$+\infty$	$-24$	$-\infty$	$1$

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني  $(C_f)$ :

$y = 1$  مستقيم مقارب أفقي بجوار  $\pm\infty$

$x = 1$  و  $x = 2$  مستقيمان مقاربان عموديان بجوار  $\pm\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني  $(C_f)$  والمقارب الأفقي  $(\Delta)$ :

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$ :

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1 = -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} = \frac{-4(x-2) + 9(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط  $\times$  إشارة المقام

دراسة إشارة البسط: لدينا:  $5x - 1 = 0$  ومنه  $x = \frac{1}{5}$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

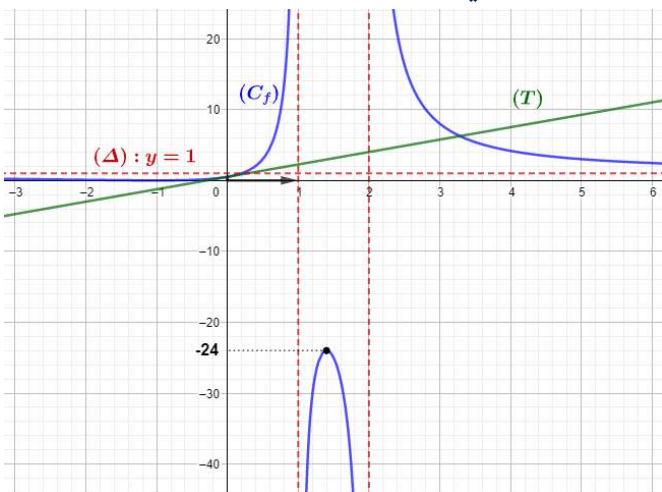
$x$	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$1$	$2$	$+\infty$
$5x-1$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$x^2-3x+2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)-y$	$-$	$0$	$+$	$-$	$+$

- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما  $x \in ]\frac{1}{5}; 1[ \cup ]2; +\infty[$
- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; \frac{1}{5}[ \cup ]1; 2[$
- $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  لما  $x = \frac{1}{5}$

2 تعيين تقريب تآلفي للدالة  $f$  عند  $0$ .

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

3 التمثيل البياني:



(II)

1 تعيين مجموعة تعريف الدالة  $h$ :

لتكون الدالة  $h$  معرفة يجب أن يكون:

#### 4 دراسة شفعية الدالة $h$ :

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 + 2|-x| + 1}{(-x)^2 - 3|-x| + 2} = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} = h(x)$$

إذن الدالة  $h$  زوجية

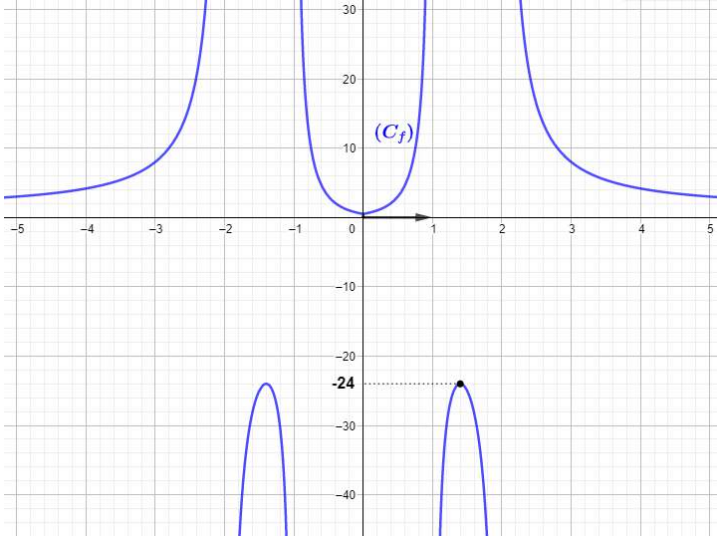
#### 5 استنتاج التمثيل البياني $(C_h)$ للدالة $h$ انطلاقاً من $(C_f)$ :

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

لما  $x \geq 0$  لدينا:  $h(x) = f(x)$ ، ومنه  $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$

لما  $x < 0$  ولما  $x \geq 0$  لدينا:  $h(x) = f(-x)$ ، ومنه  $(C_h)$

ينظر  $(C_f)$  بالنسبة لمحور الترتيب.



#### 6 المناقشة البيانية:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيمات ذات

المعادلة:  $y = m$

لما:  $m < -24$  المعادلة تقبل حلان موجبان

لما:  $m = -24$  المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

لما:  $-24 < m < 0$  المعادلة لا تقبل حلول

لما:  $m = 0$  المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالب

لما:  $0 < m < \frac{1}{2}$  المعادلة تقبل حلان سالبان

لما:  $m = \frac{1}{2}$  المعادلة تقبل حلا موجبا وحلا معدوم

لما:  $\frac{1}{2} < m < 1$  المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة

لما:  $m = 1$  المعادلة تقبل حل موجب

لما:  $m > 1$  المعادلة تقبل حلان موجبان

$$x^2 - 3|x| + 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0, & x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1) \neq 0 \\ (x+2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

ومنه:  $D_h = \mathbb{R} - \{-2; -1; 1; 2\}$

#### 2 كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}; & x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}; & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x); & x \geq 0 \\ f(-x); & x < 0 \end{cases}$$

#### 3 دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $h$ عند 0:

◀ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند  $a$  وكلا

النهايتان تساوي  $f(a)$ ، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right) = \left( \frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right) = \left( \frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [h(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [h(x)] = \frac{1}{2} \text{ بما أن:}$$

فالدالة  $h$  مستمرة عند 0

#### - قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 7x}{2x(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+7}{2(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 7x}{2x(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-7}{2(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

ومنه الدالة  $h$  غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ونقول أن  $(C_h)$  يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما:

$$-\frac{7}{4} \text{ و } \frac{7}{4}$$

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •