ثانوية: المجاهد صديقي نوري		الموسم الدراسي: 2021 / 2022
المستوى: 3 ثانوي علوم تجريبية	# الواجب المنزلي رقم ①	الأستاذ: قويسم براهيم الخليل
سُلم يوم: 05|10|2021		يُعاد يوم: 12|10|2021

◆ التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

① $\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$ ② $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{x-2}\right)$ ③ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$

◆ التمرين 02:

عيّن النهايات التالية:

① $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ ② $\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)$ ③ $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$

◆ التمرين 03:

برهن أنّ المنحنى الممثل للدالة f على المجال I يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات التالية:

① $f(x)=\frac{1}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$ ② $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+x-2}$ ، $I=]-\infty;-2[$

◆ التمرين 04:

برهن أنّ المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

① $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ ، $I=]2;+\infty[$ ، $D: y=x$

② $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ ، $I=]-\infty;-1[$ ، $D: y=x-1$

◆ التمرين 05:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

② اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-1) :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

حيث: a، b و c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

③ استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

④ حدد الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

⑤ مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحنى (C_f)

◆ التمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x^3+3x^2-4$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.

② عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

③ برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

④ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

⑤ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

⑥ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3+3x^2-4-m=0$.

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

تصحيح الواجب المنزلي رقم ①

◆ التمرين 01:

①
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)=\frac{\sqrt{4}}{1-4}=\boxed{-\frac{2}{3}}$$

②
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(2-x)(2+x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-(x-2)(2+x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}(-(2+x))=-(2+2)=\boxed{-4}$$

③
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\frac{0^2+0}{|0^2-1|+1}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

◆ التمرين 02:

①
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)=\boxed{+\infty}$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}(\sqrt{x}-1)=0^+$$
و $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$

②
$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)=\boxed{+\infty}$$

لأنّ:

$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}((x-3)^2)=0^+$ و

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{0^+}\right)=+\infty$$

③
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2\sqrt{x}+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x^2-2\sqrt{x}+1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4+2x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x^3+x^2+3x-1)}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3+x^2+3x-1}{x^2+2\sqrt{x}+1}\right)=\frac{4}{4}=\boxed{1}$$

◆ التمرين 03:

① لدينا:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=2$

② لدينا:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$$
$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\left(\frac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=+\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=1$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=-2$

◆ التمرين 04:

① لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x)-y=\frac{x^2-1}{x}-x=\frac{x^2-1-x^2}{x}=\frac{-1}{x}$$

x	$-\infty$ 0	2 $+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)

ومنه (C_f) يقع تحت (D) في المجال I

② لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-(x-1)(x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x-1$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow x+1\neq0\Rightarrow x\neq-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		$+$
الوضعية	(C_f) تحت (D)		(C_f) فوق (D)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

◆ التمرين 05:

① تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=-\infty$

- $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=+\infty$

لأنّ: $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}(x+1)=0^-$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{0^-}\right)=+\infty$

- $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

② اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}=\frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=1\\b+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\end{cases}$

- استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

بما أنّ: $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=-\infty$

فإنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x=-1$

ولدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{3}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{x+1}\right)=0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=x$.

③ تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$f(x)-x=\frac{-3}{x+1}\Rightarrow f(x)-x=\frac{3}{-x-1}\Rightarrow -x-1\neq0\Rightarrow x\neq-1$$

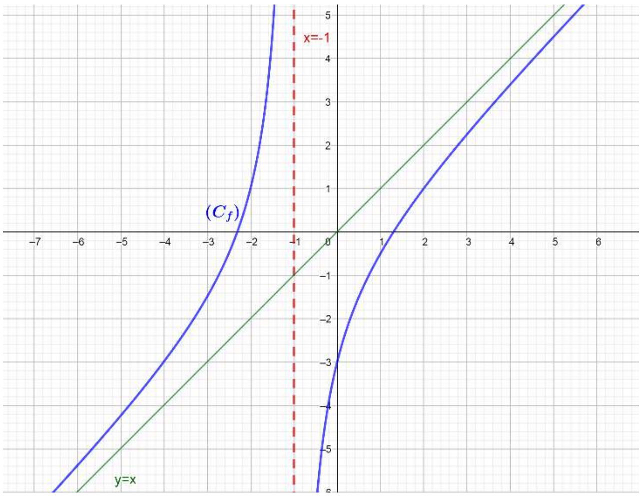
ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

④ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحنى البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحنى (C_f) .



◆ التمرين 06:

① دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- تعيين النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-4)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-4)=+\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x)=3x^2+6x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ \text{أو} \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=-2 \end{cases}$$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

② تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- مع محور الفواصل:

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3+3x^2-4=0$$

لدينا:

$$f(1)=1^3+3(1)^2-4=0$$

نلاحظ أنّ 1 حل للمعادلة $f(x)=0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x)=x^3+3x^2-4 \Rightarrow f(x)=(x-1)(x^2+ax+b) \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a-1=3 \\ b-a=0 \\ -b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$

إذن: $f(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$ ومنه:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+4x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+4x+4=0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$ ومنه: $x=1$

ولدينا: $x^2+4x+4=0$: لحلها نستعمل المميز Δ:

$$\Delta=4^2-4(1)(4)=0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x=-\frac{4}{2}$ أي $x-2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي : $s = \{1; -2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور التراتيب:

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

إذن (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0; -4)$

③ برهان أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

لدينا: $x \in \mathbb{R}$ ومنه: $(-x) \in \mathbb{R}$ إذن $\Big(\underbrace{2(-1) - x}_{2\alpha - x}\Big) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(2(-1) - x) + f(x) &= (-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 - 4 + x^3 + 3x^2 - 4 \\ &= -(-2 - x)^2(2 + x) + 3(2 + x)^2 - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -(4 + x^2 + 4x)(2 + x) + 12 + 3x^2 + 12x - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -8 - 4x - 2x^2 - x^3 - 8x - 4x^2 + 4 + 6x^2 + 12x + x^3 \\ &= -4 = 2(-2) \end{aligned}$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

④ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

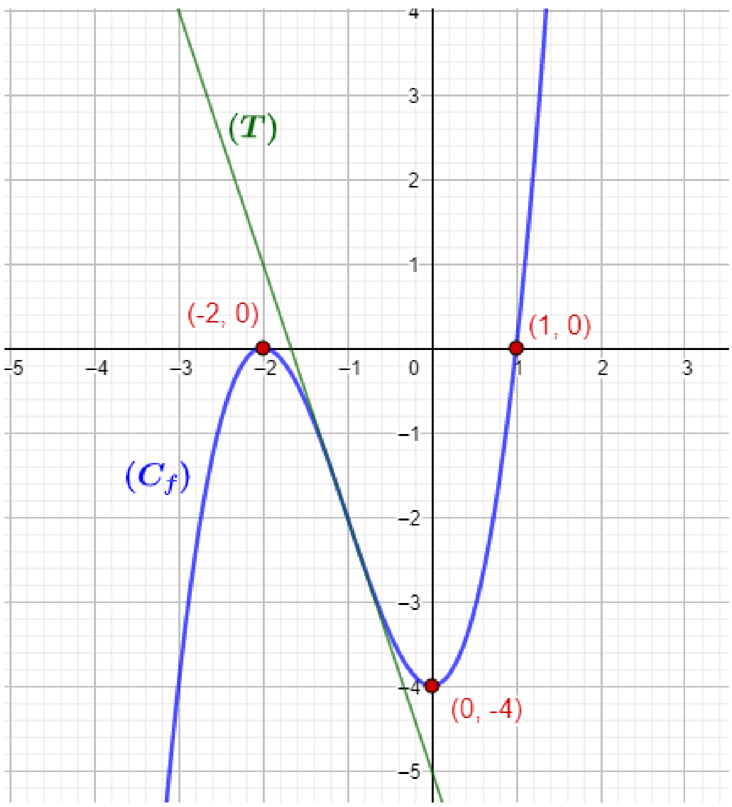
$$\begin{aligned} (T)&: y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1) \\ (T)&: y = \big(3(-1)^2 + 6(-1)\big)(x + 1) + (-1)^3 \\ &\qquad + 3(-1)^2 - 4 \\ (T)&: y = -3x - 3 - 2 \\ (T)&: y = -3x - 5 \end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس (T) هي $y = -3x - 5$.

⑤ التمثيل البياني كل من (T) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الاحداثيات.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y = -3x - 5$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



⑥ المناقشة البيانية:

لدينا: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0 \Rightarrow f(x) = m$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$ وعليه المناقشة أفقية:

لما	$m < -4$	أي	$x < -4$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما	$m = -4$	أي	$x = -4$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر مضاعف
لما	$-4 < m < 0$	أي	$-4 < x < 0$	المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب
لما	$m = 0$	أي	$x = 0$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب
لما	$m > 0$	أي	$x > 0$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •