طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

الوظيفة المنزلية

①

(حول الدوال العددية)

سُلمت يوم: 2020/12/03 نُشِر الحل يوم: 2020/12/10

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

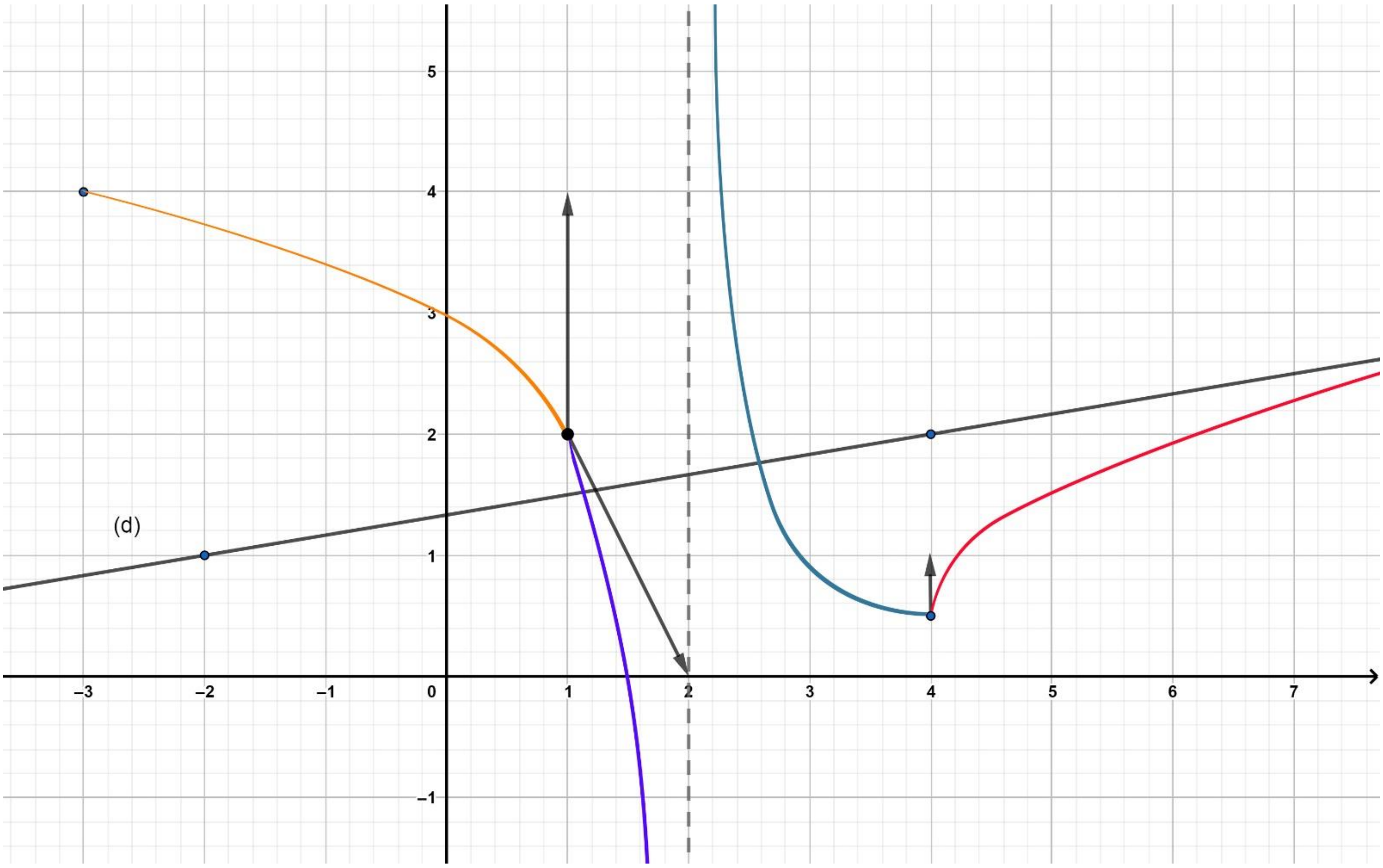
آخر تحديث:

2020 / 12 / 09

التمرين الأول

ليكن $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجموعة D حيث: $D = [-3; 2[\cup]2; +\infty[$

(Δ) المستقيم المقارب المائل لـ $\left(C_f\right)$



بقراءة بيانية أجب بصحيح أو خطأ مع تصحيح الخطأ

1) f غير مستمرة على D

2) f غير مستمرة عند 1

3) f تقبل الاشتقاق عند 1

4) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلان على D

5) f تقبل الاشتقاق على يمين 4

6) f تقبل الاشتقاق على يسار 1

الخليل للرياضيات

7) الدالة f متناقصة على $[-3;2[\cup]2;4]$

8) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty$

9) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = +\infty$

10) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$

11) $y = -\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}$ معادلة المستقيم (Δ)

التمرين الثاني

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2;+\infty[$.

ب- أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α.

جـ- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) عيّن نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها واعط تفسيرا هندسيا للنتائج.

2) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a

الخليل للرياضيات

3) أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f).

4) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f.

ب- بين أنّ (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 \leq \beta \leq 0$.

ج- بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين و(C_f).

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$

أ- بين أن الدالة h زوجية.

ب- أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.

ج- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = m \quad \text{و} \quad f(x) = x + m$$

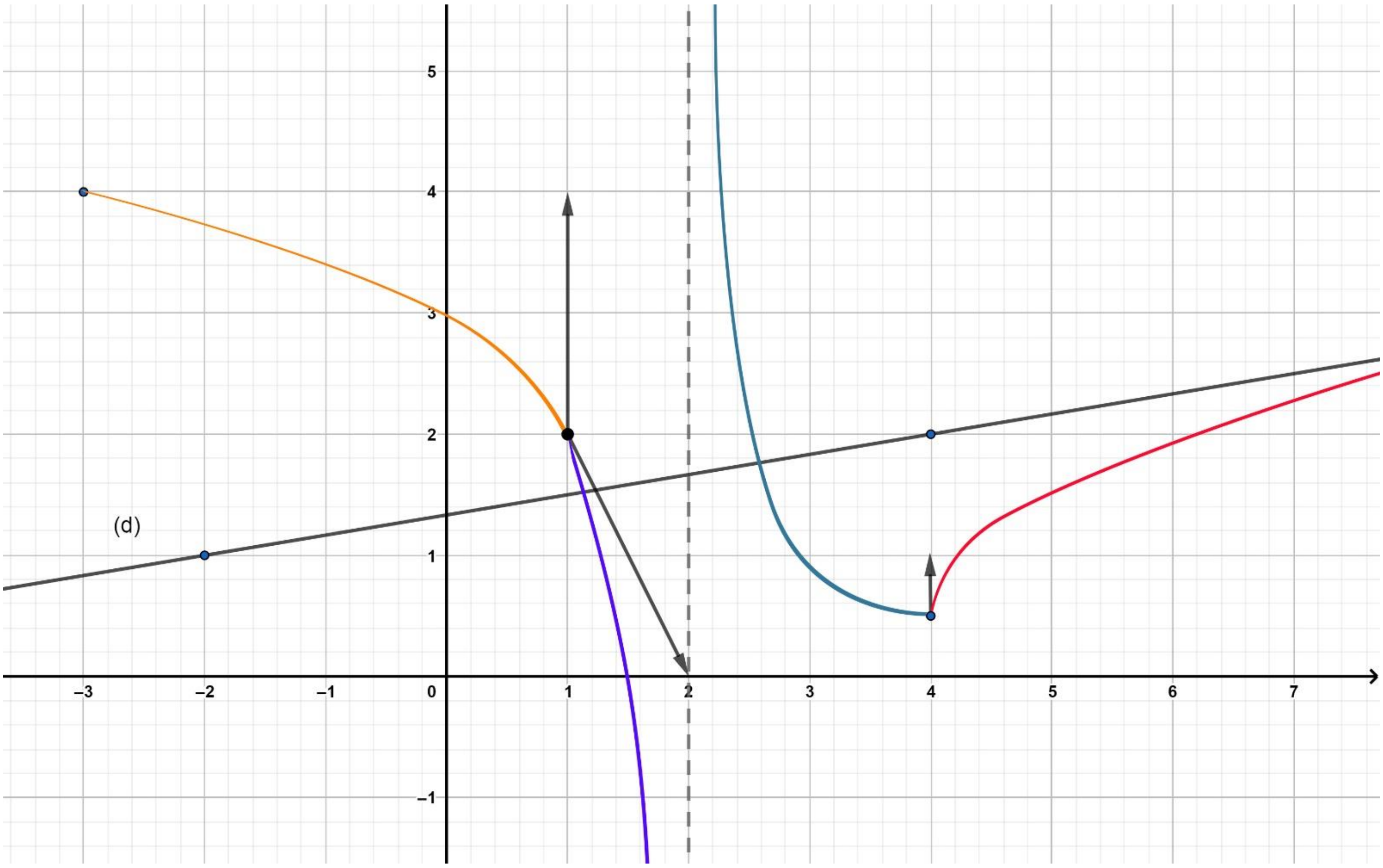
◄بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات

حل الوظيفة المنزلية ①

(حول الدوال العددية)

التمرين الأول:



1) f غير مستمرة على D ؟

خطأ. الدالة f مستمرة، لأنه يمكن رسمها بدون رفع القلم.

2) f غير مستمرة عند 1؟

خطأ. لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}}[f(x)] = f(1)$

3) f تقبل الاشتقاق عند 1 ؟

الخليل للرياضيات

خطأ. لأن:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right] = +\infty$$

4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان على D ؟

خطأ. لأن: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة.

5) f تقبل الاشتقاق على يمين 4؟

خطأ. لأن:

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \left[\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\right] = +\infty$$

6) f تقبل الاشتقاق على يسار 1؟

خطأ. لأن:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right] = +\infty$$

7) الدالة f متناقصة على $[-3;2[\cup]2;4]$ ؟

صحيح. واضح من الرسم

8) $\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty$ ؟

صحيح. لأن (C_f) يقبل نصف مماس على يسار الـ 1 عمودي موجه نحو الأعلى.

9) $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = +\infty$

صحيح. لأن (C_f) يقبل نصف مماس على يمين الـ 4 عمودي موجه نحو الأعلى

الخليل للرياضيات

10) $\lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$ ؟

خطأ. لأن: ميل المماس من اليمين هو:

$$a = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

11) $y = -\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}$ معادلة المستقيم (Δ)

خطأ. لأن: ميل المستقيم (Δ) هو

$$a = \frac{2-1}{4-(-2)} = \frac{1}{6}$$

التمرين الثاني

I)

1) أ/ حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to -\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] = \lim\limits_{x\to -\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x\to +\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)\right] = -\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة g:

أولا: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما.

ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$

2) أ/ تبيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

لدينا الدالة g رتيبة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

ولدينا: $\lim_{x \to +\infty} [g(x)] = +\infty$ و $g(2) = -3$

ولدينا: $\lim_{x \to +\infty} [g(x)] \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ حصر العدد α:

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.9	0.9	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.6$

الخليل للرياضيات

ج/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

1) تعيين نهايات الدالة f:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to1}[f(x)] = \lim_{x\to1}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

2) تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + x^2(-2a+b) + x(a-2b) + b + c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

الخليل للرياضيات

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

3) أ- تبيين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d):

ليكن: $y = x - 1$

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} - (x-1)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2}{(x-1)^2}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f):

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	||	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (d)	||	(C_f) فوق (d)

4) أ- دراسة تغيرات الدالة f:

الخليل للرياضيات

أولا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 4}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		α		$-\infty$
$g(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$	||	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب- تبيين أنّ $\left(C_f\right)$ يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(-1) = -1.5$ و $f(0) = 1$

ولدينا $f(-1) \times f(0) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1 \leq \beta \leq 0$

ج- تبيين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$:

لدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ ، إذن:

$$f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

الخليل للرياضيات

$$= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{0}{(\alpha-1)^2} = 0$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$2.5 < \alpha < 2.7$$

$$1.5 < \alpha - 1 < 1.7$$

$$2.25 < (\alpha-1)^2 < 2.89$$

$$\frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25}$$

$$\frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{2.25}$$

$$2.07 < f(\alpha) < 2.66$$

5) إنشاء (C_f):

حساب $f(0)$:

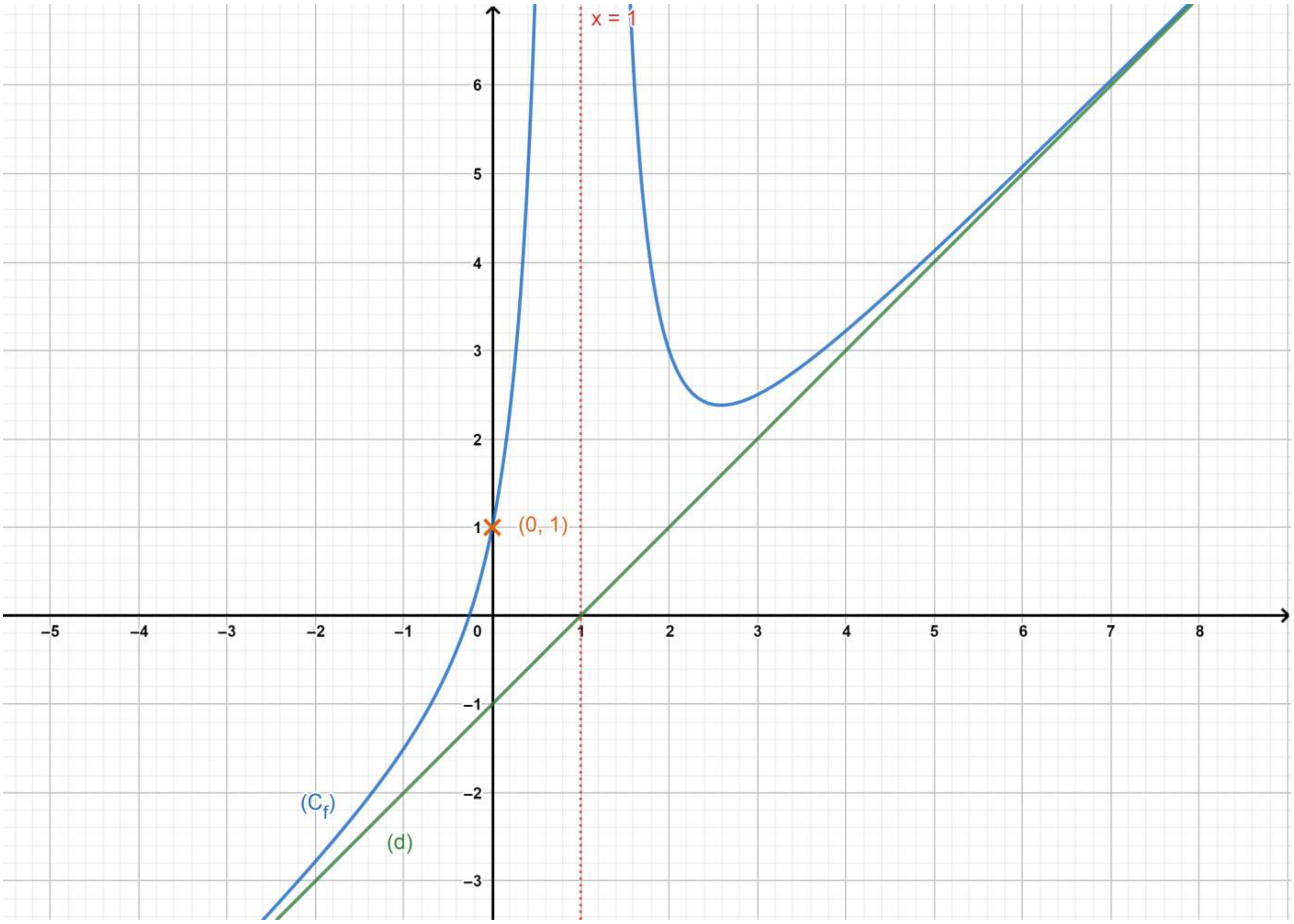
$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')

الخليل للرياضيات

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6) أ- تبيين أن h زوجية:

تذكير

لدراسة شفعية دالة (زوجية / فردية): نبين مايلي:

لتبيين أنّ الدالة f فردية نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

لتبيين أنّ الدالة f زوجية نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

لدينا: $x \in D_h$ **معناه:** $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < -1$ أو $-1 < x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $-x > 1$ أو $1 > -x > -1$ أو $-x < -1$

معناه: $-x \in]1;+\infty[$ أو $-x \in]-1;1[$ أو $-x \in]-\infty;-1[$

معناه: $-x \in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup][1;+\infty[$

ومنه: $-x \in D_h$

ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

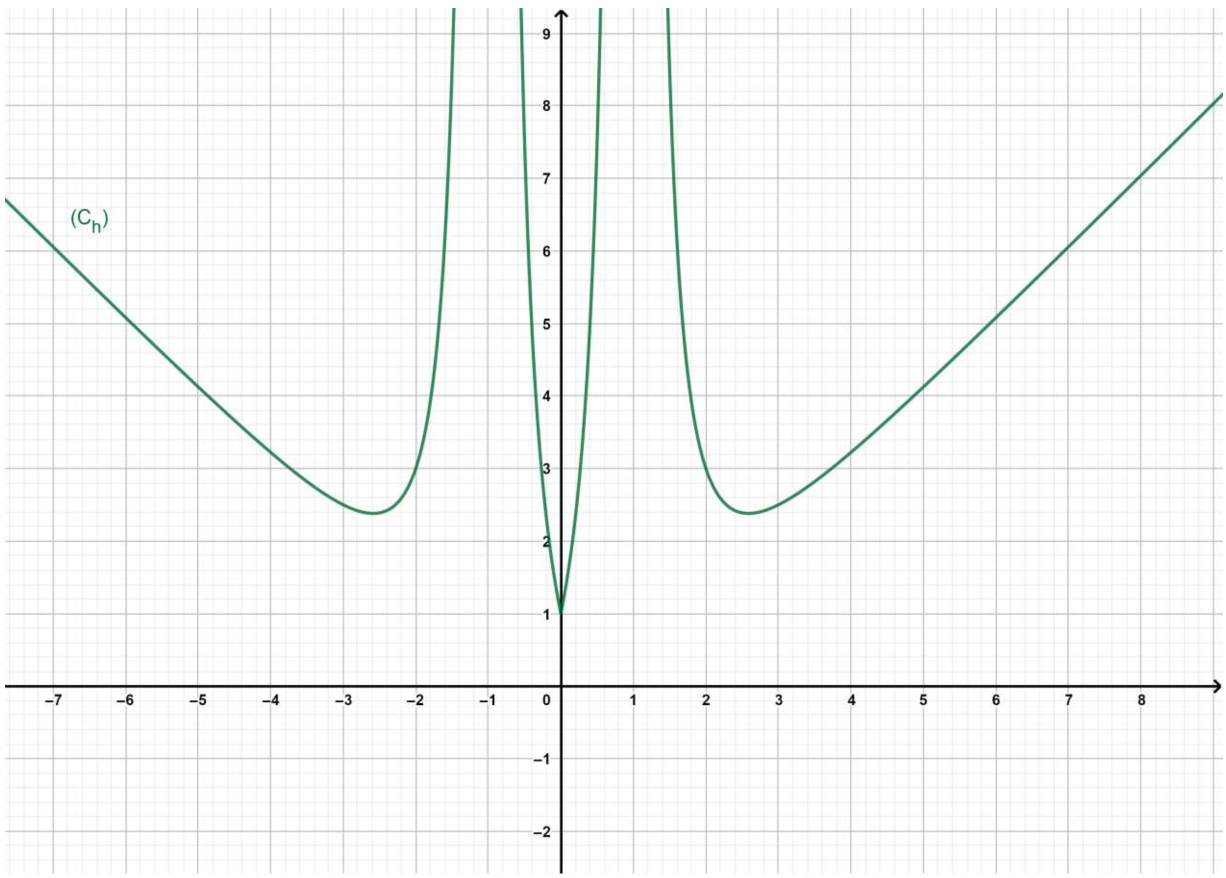
ومنه الدالة h زوجية.

ب/ انشاء (C_h):

لدينا: $f(|x|) = h(x)$ ومنه:

لما $x \geq 0$، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')



الخليل للرياضيات

ج- المناقشة البيانية:

أولا: $f(x)=m$:

لما $m<1$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $m=1$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $1<m<f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين موجبين أحدهما: $x=\alpha$

لما $m>f(\alpha)$ المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة

ثانيا: $f(x)=x+m$:

لما $m\leq -1$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $-1<m<1$ المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة

لما $m=1$ المعادلة تقبل حلان هما: $x=2$ ،$x=0$

لما $m>1$ المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان

الخليل للرياضيات