3 النهايات

الشعب :
- تقني رياضي
- رياضي
- علوم تجريبية

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية 2020 – 2021

صفحة الأستاذة نرجس مرواني فروض دروس سلاسل تمارين ملخصات التعليم الثانوي MATHEMATICS

للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

صفحة الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات   profmerouani   الأستاذة ن مرواني للرياضيات

merouaninardjiss@gmail.com

0770349020

ثانوية : أحمد رضا حوحو **السنة الدراسية :** 2021 – 2020 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 03 تقني رياضي **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** النهايات **موضوع الحصة :** نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	تذكير	د5
البناء و الترسيخ		د30

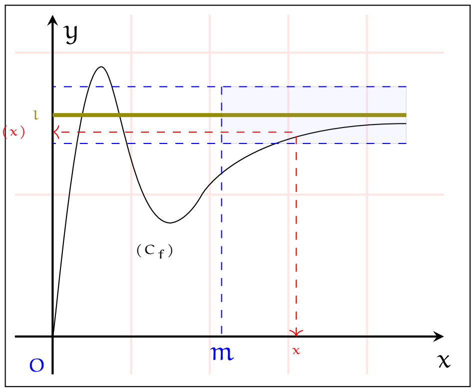
تذكير

❶ نهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

تعريف

f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0\,;+\infty[$ و l عدد حقيقي.

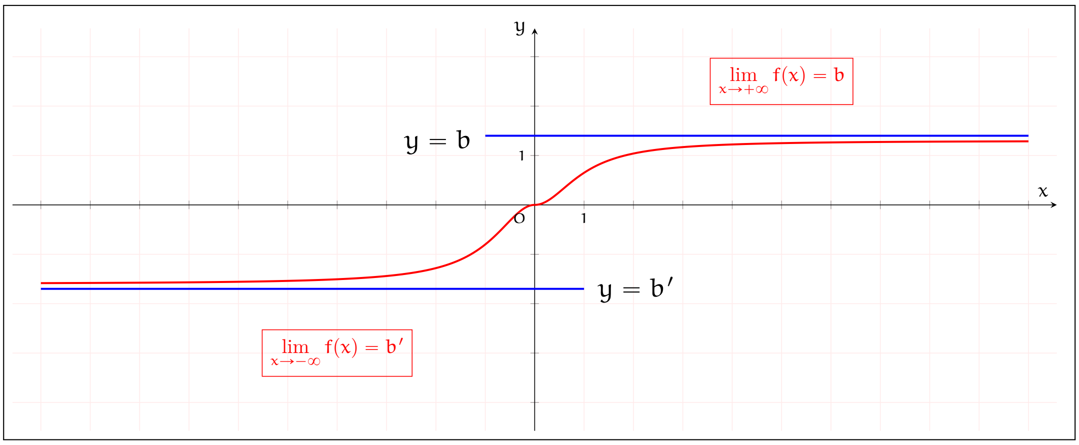
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي و نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$



ملاحظة : نعرف بطريقة مماثلة النهاية لدالة f عند $-\infty$

❷ التفسير الهندسي (المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل) :

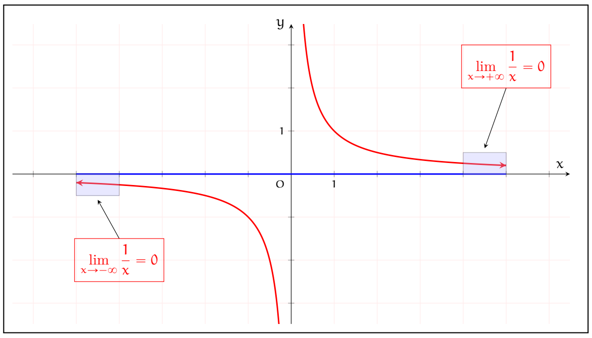
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ أو ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$) نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو عند $(-\infty)$ على الترتيب.



البناء و الترسيخ

30د

مثال



ليكن التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

و منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لمنحنى الدالة عند $+\infty$ و عند $-\infty$

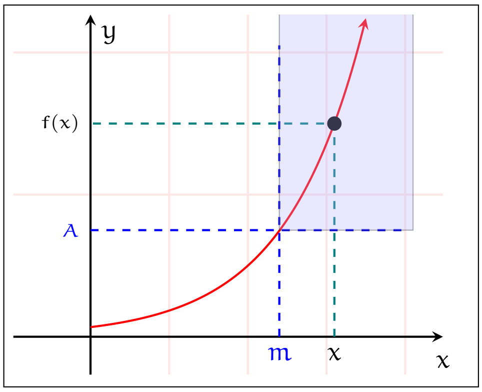
❷ نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

تعريف

f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0\,;+\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A\,;+\infty[$ حيث ($A \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

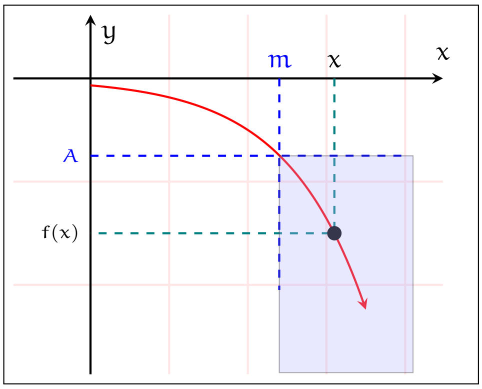


تعريف

f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0\,;+\infty[$.

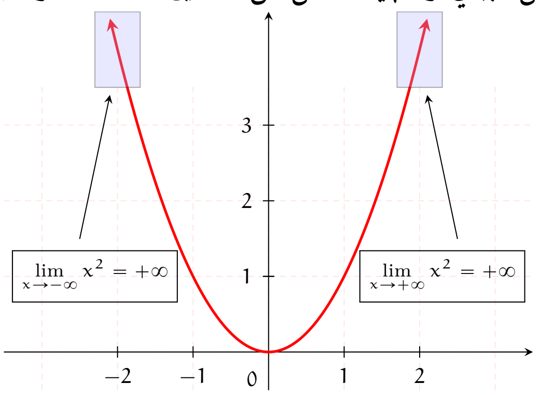
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty\,;A]$ حيث $A \in \mathbb{R}$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

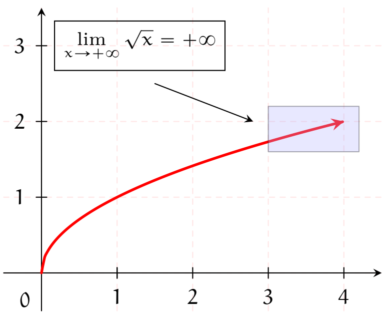
نكتب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ddot{}+\infty$



مثال

التمثيل البياني و النهايات لكل من الدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto \sqrt{x}$





30د	**تطبيق** 1 لتكن f الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بِـ : $f(x)=\frac{2}{x-3}$ ◂ أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 2 لتكن f الدالة المعرفة على $[3;+\infty[$ بِـ $f(x)=\sqrt{x-3}$ ◂ أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	التقويم

مذكرة رقم : 02

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2021 – 2020
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 03 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : نهاية دالة عند عدد

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية عند عدد .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	تذكير	5د
البناء و الترسيخ	(انظر أدناه)	30د

تذكير

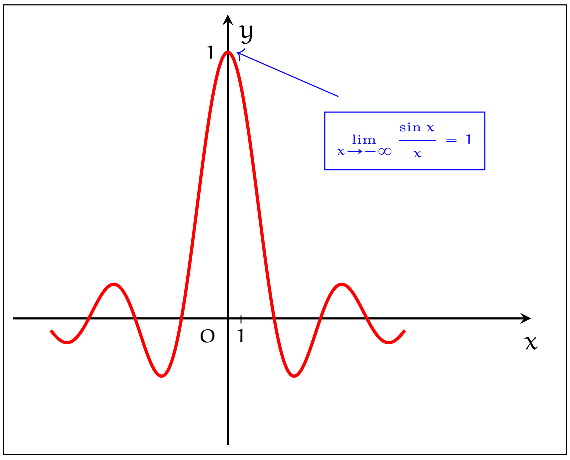
❶ نهاية منتهية عند عدد حقيقي:

تعريف

f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a\,;x_0[\bigcup]x_0\,;b[$ و l عدد حقيقي.
القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0، نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

مثال

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.
يشير كل من الجدول و التمثيل البياني للدالة f أنه كلما أخذ المتغير x قيما قريبة جدا من 0 (بقيم موجبة أو بقيم سالبة) فإن $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر إلى 1 و نكتب عندئذ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



x	$f(x)$
-0.04	0.999733
-0.03	0.999850
-0.02	0.999933
-0.01	0.999983
0	
0.01	0.999983
0.02	0.999933
0.03	0.999850
0.04	0.999733

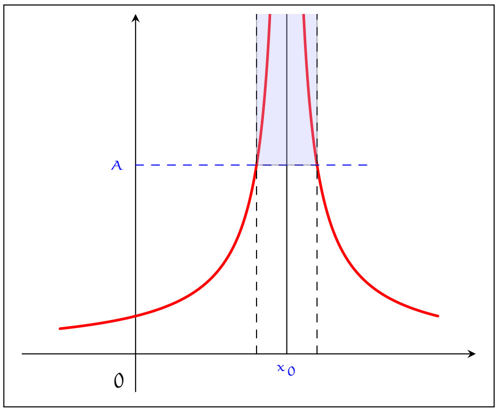
❷ نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي:

البناء و الترسيخ

30د

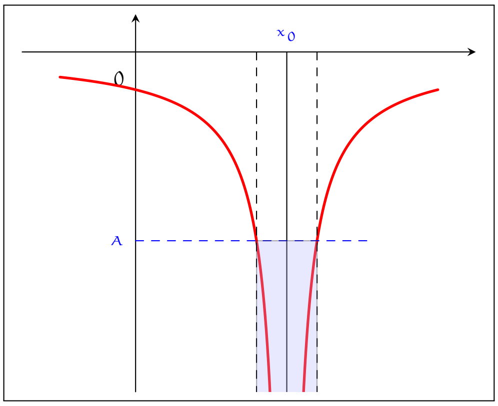
تعريف

x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة بجوار x_0.
القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0، و نكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



تعريف

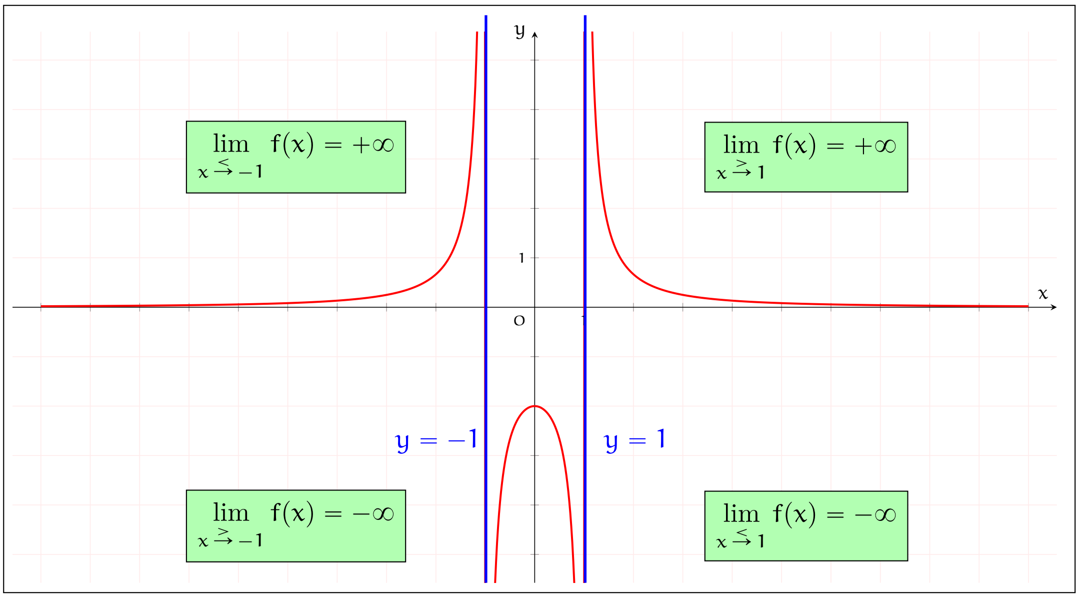
x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة بجوار x_0.
القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty; A]$ $(A \in \mathbb{R})$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0، و نكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



❷ التفسير الهندسي (المستقيم المقارب الموازي لحامل محور التراتيب) :

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ أو ($\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x = x_0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f) الممثل للدالة f

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$



التقويم	**تطبيق** 1 لتكن f الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بِـ : $f(x)=\frac{2}{x-3}$ ◂ أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 2 لتكن f الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بِـ $f(x)=\sqrt{x-3}$ ◂ أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	30د

مذكرة رقم : 03

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : أحمد رضا حوحو	**المستوى :** 03 تقني رياضي
السنة الدراسية : 2020 – 2021	**ميدان التعلم :** تحليل
يوم :	**الوحدة :** النهايات
المدة : 02 ساعة	**موضوع الحصة :** العمليات على النهايات

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيين .

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	تذكير	5د
البناء و الترسيخ		30د

تذكير

طريقة:

يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.

إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.

يمكن لدالة الا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها، مثلا الدالة $x \mapsto \sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

❶ مبرهنات أولية على النهايات :

f و g دالتان و x_0 يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، l و l' أعداد حقيقية.

نهاية مجموعة دالتين

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\times g(x)]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

❷ حالات عدم التعيين :

◁ تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : **عدم التعيين** حيث توجد أربع ح ع ت و هي من الشكل $+\infty - \infty$ أو $(+\infty - \infty)$، $0\times\infty$، $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$

◁ تتطلب حالات عدم تعيين دراسة خاصة في كل حالة

البناء
و
الترسيخ

30د

❸ النهايات بعض الدوال المألوفة :

نهاية دالة كثير حدود

مبرهنة

نهاية دالة كثير حدود عند المالانهاية $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حدها الاعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

نهاية دالة ناطقة

مبرهنة

نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

نهاية دالة الجذر تربيعي

مبرهنة

f دالة موجبة و l عدد حقيقي موجب

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$

إذا كان $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

مثال

1. $\lim_{x\to +\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ ، $\lim_{x\to -\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$
2. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+2x}{x^2+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x-2}{2x} = +\infty$ و منه نستنتج أن $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{4x-2}{2x}} = \sqrt{2}$

❹ إزالة حالات عدم التعيين :

دراسة مثال 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}$

* أحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} -\sqrt{x^2} = +\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

و منه نجد $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

دراسة مثال 02 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{4x^2-3}+2x-2$

* أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x-2\right)\left(\sqrt{4x^2-3}-2x-2\right)\Big)}{\left(\sqrt{4x^2-3}-2x-2\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x-7}{\left(\sqrt{4x^2-3}-2x-2\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{-2x\left(\sqrt{1}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(8+\frac{1}{x})}{-2\cancel{x}\left(\sqrt{1}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ حيث $(a=\alpha)$

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$ حيث $(\sqrt{a}=|\alpha|)$

نزيل حالة عدم تعيين بالضرب في المرافق.

دراسة مثال 03 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[\frac{3}{2};+\infty]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-3}-3x+2$

* أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

. **الحل :**

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} -3x+2=-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}\right)}-3x+2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-3x+2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

دراسة مثال 04 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{4x^2-3}+x-2$

* أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}x-2=-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}+x-2$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\sqrt{\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}+x-2$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}+1-\frac{2}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax+b}-\alpha x+\beta$

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$ حيث $(\sqrt{a}\neq|\alpha|)$

نزيل حالة عدم تعيين باستخراج x كعامل مشترك.

دراسة مثال 05 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\{1\}$ كما يلي : $\frac{x^2-1}{x-1}$

* أحسب $\lim_{x\to1}f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x\to1}x^2-1=0$ و $\lim_{x\to1}x-1=0$ حالة عدم تعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$

إزالتها

التحليل :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}x+1$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$$

دراسة مثال 06 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

* أحسب $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\sqrt{x+3}-2=0$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}1}x-1=0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{1}{4}$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

✍ إذا كانت الدالة f تتضمن كثيرات حدود نقوم بتحليل البسط و المقام على الشكل
$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$ ثم نختزل العوامل المشتركة

✍ إذا كانت الدالة f تتضمن جدرا نقوم بالضرب في المرافق $f(x) \times \frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$ ثم نختزل العوامل المشتركة

دراسة مثال 07 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

* أحسب $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$.

الحل :

لدينا $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \sqrt{x+3}-2 = 0$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} x-1 = 0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

إزالتها

طريقة العدد المشتق :

لدينا $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ نلاحظ $f(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ حيث $g(x) = \sqrt{x+3}$ و $x_0 = 1$

باستعمال تعريف العدد المشتق نجد :

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$ حيث $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ و منه $g'(1) = \frac{1}{4}$

و منه $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{1}{4}$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ و كان مقام الدالة f يكتب من الشكل $(\alpha x + \beta)$

نزيل حالة عدم تعيين باستعمال طريقة العدد المشتق و ذلك بإظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

أي نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ حيث $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$

ثم نستنتج $\lim_{x \to x_0} f(x)$

تطبيق

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ 3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$

4) $\lim_{x \overset{>}{\to} 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{\frac{x}{5}-1}$ 5) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ 6) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

مذكرة رقم : 04

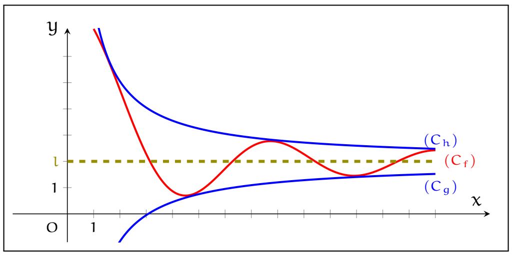
الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 03 تقني رياضي
السنة الدراسية : 2020 – 2021	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : النهايات
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : العملبات على النهايات

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : حساب النهايات باستعمال المقارنة أو الحصر، حساب نهاية مركب دالتين .

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	**نشاط مقترح** لكتن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{x^2}$ ❶ أثبت أنه من أجل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $1 - \frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x^2}$. ❷ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.	د20
البناء و الترسيخ	**حساب النهايات بالمقارنة:** ① مبرهنة الحصر : **مبرهنة** f ، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) =$ l ، و $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$  **مثال** نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ و منه فإن من أجل كل x من $]0; +\infty[$، $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ و علية نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ② مبرهنة الحد من الأعلى: **مبرهنة** f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $f(x) \geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	د30

البناء و الترسيخ

③ مبرهنة الحد من الأسفل:

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و $f(x) \leq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن :
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x) = x + \sin x$ نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $x - 1 \leqslant x + \sin x \leqslant x + 1$
بما أن $\lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
بما أن $\lim_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

التقويم

تطبيق

f دالة عددية معرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

1 أثبت أنه من أجل كل $x > 0$: $\dfrac{2x-1}{x-1} < f(x) < \dfrac{2x+1}{x-1}$

2 أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

20د

نشاط مقترح

لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ : $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$

❶ أثبت أن $f = g \circ h$ حيث g و h دالتين يطلب تعيينهما.

❷ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

30د

❸ عين b نهاية الدالة h عند $+\infty$ ثم نهاية الدالة g عند b، ماذا تلاحظ؟

البناء و الترسيخ

نهاية مركب دالتين:

مبرهنة

a، b و c تمثل أعداد حقيقية أو $\pm\infty$ و f، g و h دوال عددية حيث : $f = g \circ h$.
إذا كانت $\lim_{x\to a} h(x) = b$ و $\lim_{x\to b} g(x) = c$ فإن $\lim_{x\to a} (g \circ h)(x) = c$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بِـ $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{x}\right)$ و نريد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v ($f = v \circ u$) حيث $u(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{x}$ و $v(x) = \sin x$
بما أن $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \dfrac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} v(x) = 1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

التقويم	تطبيق	
	f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2+x+1}{x^2+1}}$ 1 أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها	10د

مذكرة رقم : 05

الأستاذة : نرجس مرواني

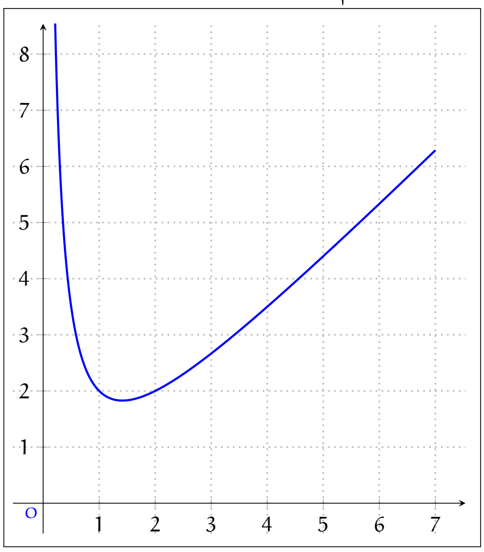
ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 01 ساعة

المستوى : 03 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : المستقيم المقارب المائل

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب لمنحنى دالة .

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	**نشاط مقترح** لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$، (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل و ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$  * لتكن $M(x,f(x))$ نقطة من (C_f) و $P(x,y)$ نقطة من (Δ) . ❶ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ فإن : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x}$. ❷ أحسب بدلالة x المسافة MP . ❸ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$, ماذا يمكنك القول عن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]$ ؟. ❹ في نفس المعلم أرسم المستقيم (Δ) ، ماذا تلاحظ؟.	20د
البناء و الترسيخ	**المستقيم المقارب المائل:** **تعريف** (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ حيث $(a\neq 0)$. القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ على الترتيب.	30د

البناء و الترسيخ

ملاحظة هامّة

إذا كانت f و g دالتين بحيث : $f(x) = (ax+b) + g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ يكون مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
نفس الملاحظة لما x يؤول $(-\infty)$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\{-2\}$ بـ : $f(x) = x+1+\dfrac{2}{x+2}$
بما أن :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2} = 0$$

إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$

التقويم

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2[$ بـ : $f(x) = \dfrac{-x^2+3x+2}{x-2}$, (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
2. عين الأعداد الحقيقية a , b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]-\infty;2[$: $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$
3. إستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = -x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

30د

طريقة: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ حيث $(a \neq 0)$.
يكون المستقيم (Δ) هو مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$ على الترتيب)،
إذا وفقط إذا كان : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = b}$
(على الترتيب $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a}$ و $\boxed{\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax] = b}$)

التقويم

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\{-2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$
بما أن : $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$ ومنه $a = 1$
و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+3}{x+2} - x \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x} = 1$ ومنه $b = 1$
إذ المستقيم ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$
بنفس الطريقة نجد أن المستقيم ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$