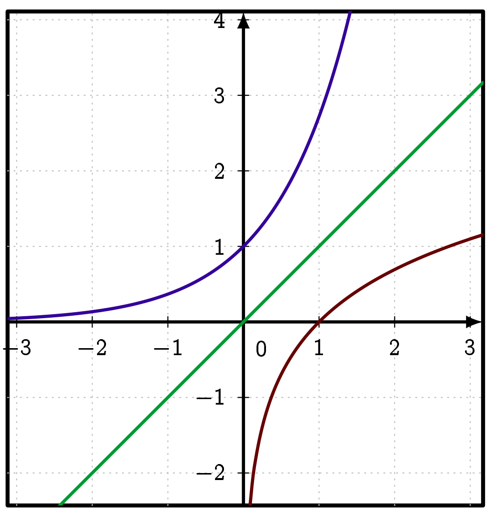
3

الدالة اللوغاريتم النيبيري

الكفاءات المستهدفة

الكفاءات المستهدفة من خلال هذا المحور هي :

- تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري
- خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري
- حل معادلات و متراجحات
- دراسة الدالة $\ln(u(x))$
- تعريف دالة اللوغاريتم العشري
- حل معادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$



ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : السنة ثالثة رياضيات

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسيةو اللوغاريتمية

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

المكتسبات القبلية : خواص الـدوال الأسية

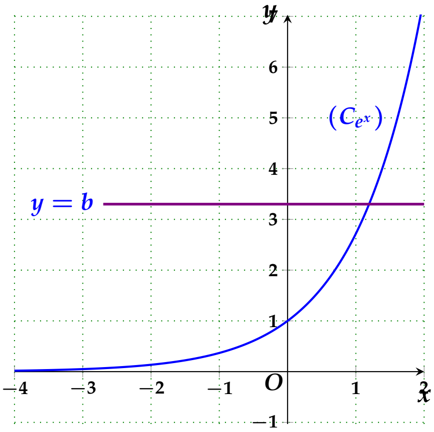
الكفاءات المستهدفة : حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم و الدوال الأسية و دوال القوى.

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	مناقشة نشاط 2 صفحة 77	20د
مرحلـــة بنـــاء المعـــارف		

1 مناقشة نشاط 2 صفحة 77

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$exp'(x)$		+	
$exp(x)$	$-\infty$	b	$+\infty$



الدالة الأسية مستمرة و متزايدة تماما (رتيبة تماما) على المجال $]-\infty;+\infty[$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة و الرتابة ، من أجل كل عدد حقيقي b من $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a = b$.

بوضع $a = \ln(b)$ نكون قد عرفنا دالة جديدة .

نعلم أن في حالة $b \leq 0$ المستقيم ذو المعادلة $y = b$ لا يقطع المنحنى (C_{e^x}) لأن $e^x > 0$

ومنه نستنتج حتى يكون للمعادلة $e^x = b$ حل يجب أن يكون $b > 0$ ، إذن نستنتج مجموعة تعريف الدالة $\ln$ هي $]0;+\infty[$

تعريف

تسمى هذه الدالة " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " و نرمز لها بالرمز "ln"

حساب بعض الصورة : لدينا $e^a = b$ يعني $a = \ln(b)$

لدينا: $1 = e^0$ يعني $\ln(1) = 0$

لدينا: $e = e^1$ يعني $\ln(e) = 1$

لدينا: $\frac{1}{e} = e^{-1}$ يعني $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

لدينا $e^2 = e^2$ يعني $\ln(e^2) = 2$

لدينا: $e^a = 2$ يعني $a = \ln(2) \approx 0,693$

إثبات أن $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

نضع $a = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه $e^a = \frac{1}{2}$ ونضع $b = -\ln(2)$ أي $-b = \ln(2)$ ومنه $e^{-b} = 2$

ومنه $e^a = \frac{1}{e^{-b}}$ إذن $e^a = e^b$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,693$

2 الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

اللوغاريتم النيبيري لعدد :

5د

مبرهنة و تعريف ① — أضف إلى معلوماتك

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0,+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث : $e^b = a$ يسمى هذا العدد اللوغاريتم النيبيري للعدد a ونرمز له بالرمز $"lna"$

مثال

العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 2$ هو $ln2$

تعريف الدالة $\ln$:

5د

تعريف

نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز لها بالرمز $\ln$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln(x)$

نتائج

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $x = e^y$ معناه $y = lnx$
2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{lnx} = x$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $ln(e^x) = x$
3. بما أن $e^0 = 1$ فإن $ln1 = 0$ ، وبما أن $e^1 = e$ فإن $lne = 1$

ملاحظة: نعبر النتيجة 1 بالقول أن الدالة $"ln"$ هي الدالة العكسية لـ $"exp"$

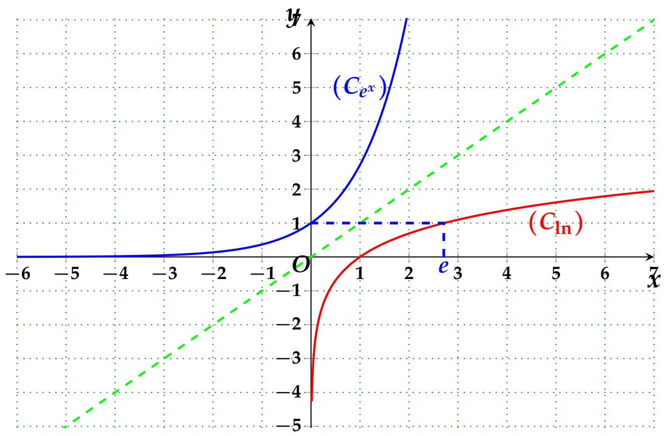
متابعة مناقشة النشاط

10د

النقطتان $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول أي المستقيم الذي معادلته $y = x$

لتكن $M(a;b)$ تنتمي إلى (C) و هذا يعني أن $e^a = b$ إذن $\ln(b) = a$ فإن : $M'(b;a)$ تنتمي إلى (C') .

نستنتج أن المنحنين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى المنصف الأول ذي المعادلة $y = x$



مرحلة بناء المعارف

وضع تخمينات

الدالة $\ln$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$

خاصية ❶ أضف إلى معلـوماتك

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية واللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول)

تطبيق

التقويم

20د

ليكن $(C_{\ln})$ التمثيل البياني للدالة $\ln$ في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f

بين في كل حالة من الحالات التالية كيفية رسم (C_f) ، ثم أرسمه

1. $f(x) = -2+\ln(x)$
2. $f(x) = -\ln(x)$
3. $f(x) = \ln(x-2)$
4. $f(x) = |\ln(x)|$

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : خواص الدالة اللوغاريتمية

المكتسبات القبلية : خواص الـدوال الأسية
الكفاءات المستهدفة : حل معادلات و المتراجحات بإستعمال خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**1 نشاط مقترح** من أجل a و b من $]0;+\infty[$ **1** قارن بين $e^{\ln(ab)}$ و $e^{\ln(a)+\ln(b)}$ ، ماذا تستنتج؟ **2** بين أن : $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$ **3** إستنتج $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ **4** بوضع $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$ ، إستنتج أن : $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$	30د
مرحلة بناء التعلمات	**مناقشة النشاط** **1** لدينا : $e^{\ln(ab)}=ab$ ولدينا $e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(a)}\times e^{\ln(b)}=a$. ومنه $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ **الخاصية الأساسية** **خاصية ①** أضف إلى معلوماتك من أجل كل عددين حقيقين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ **ملاحظة:** يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا: من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ،..., a_n من $]0;+\infty[$ $\ln(a_1\times a_2\times\cdots\times a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\cdots+\ln(a_n)$ **نتيجة** أضف إلى معلوماتك من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n : $\ln(a^n)=n\ln(a)$ **متابعة مناقشة النشاط** **2** $0=\ln\left(\frac{1}{a}\right)+\ln(a)=\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=\ln(1)$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$	

التقويم

10 دق

20 دق

3 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

4 $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln(a)$ و $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$ إذن $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$ ومنه $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

ملاحظة: إذا كان x عدد حقيقي غير معدوم فإن $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$

اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية :

خاصية 1 — أضف إلى معلوماتك

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

البــرهــان

a و b عددان حقيقيان كيفيان من $]0,+\infty[$ حيث $a < b$ ومنه $e^{lna} < e^{lnb}$ وبما أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $lna < lnb$ ■

نتائـــــــــج

من أجل كل عددين حقيقين a و b من $]0,+\infty[$

- $lna = lnb$ يعني $a = b$ • $lna < lnb$ يعني $a < b$
- $\ln(x) > 0$ يعني $x > 1$ • $\ln(x) < 0$ يعني $0 < x < 1$

تطبيق 1

بسط العبارات التالية

1 $\ln(16) - \ln(4)$

2 $\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

3 $\ln(10000) + \ln(0,01)$

4 $e^{\ln(4)} + e^{-\ln(2)}$

تطبيق 2

أحسب بدلالة n المجموع

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

تمرين منزلي 60 صفحة 106

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حل معادلات و متراجحات

المكتسبات القبلية : خواص الـدوال الأسية و الوغاريتم
الكفاءات المستهدفة : حل معادلات و المتراجحات بإستعمال خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية تذكير بخواص الدالة اللوغاريتم **حل المعادلات و المتراجحات**	
مرحلة بناء المعارف	**طريقة** — أضف إلى معلوماتك لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = a$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < a$) نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة). نحل في D المعادلة $u(x) = e^a$ (المتراجحة $u(x) < e^a$). **تطبيــــق** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية : $\ln(x) = 3$ ، $\ln(2x-3) = 1$ ، $\ln(\lvert 1-x \rvert) - 1 = 0$ ، $\ln(x) + \ln(4) > 0$ ، $\ln(-x^2+2x) < 0$	د30
	طريقة — أضف إلى معلوماتك لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = ln[v(x)]$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < ln[v(x)]$) نعين D مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة). نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$ (المتراجحة $u(x) < v(x)$). **تطبيق 2** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية : $\ln^2(x) - 1 = 0$ ، $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$ ، $\ln(\lvert 1-x \rvert) - \ln(3x) = 0$ ، $\ln(x) + \ln(4) = 0$ ، $\ln(-x^2+2x) > \ln(2x)$ ، $x\ln(x) - \ln(x) < 0$ education-onec-dz.blogspot.com	د30
تقويم	**حل تمرين 67 و 68 صفحة 107** ملاحظات حول سير الدرس	

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- **الأستاذ :** بخدة أمين
- **المستوى :** السنة ثالثة رياضيات
- **المدة :** 1 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** الدوال الأسية و اللوغاريتمية
- **ميدان التعلم:** التحليل
- **موضوع الحصة :** دراسة الدالة اللوغاريتمية

- **المكتسبات القبليـة :** خواص الدالة الأسية
- **الكفاءات المستهدفة :** دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية
- **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية: تذكير بقواعد الحساب في الدالة الأسية – النهايات – نشاط مقترح 1	15د
مرحلة بناء المعارف	مناقشة النشاط – الإشتقاقية و الإستمرارية – نشاط مقترح 2 – مناقشة النشاط	15د

التهيئة النفسية

تذكير بقواعد الحساب في الدالة الأسية

النهايات

1 نشاط مقترح

1. بوضع $x = e^X$ إستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
2. بوضع $x = e^X$ إستنتج أن $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$

مناقشة النشاط

1. لما x يؤول إلى $+\infty$ فإن X يؤول إلى $+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(e^X) = \lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty$
2. لما x يؤول إلى 0^+ فإن X يؤول إلى $-\infty$ ومنه

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \ln(x) = \lim_{X\to-\infty} \ln(e^X) = \lim_{X\to-\infty} X = -\infty$$

خواص

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$

الإشتقاقية و الإستمرارية

خاصية

الدالة $\ln$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$

2 نشاط مقترح

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^{\ln(x)}$

1. أحسب $f'(x)$ بإستعمال مشتق مركب دالتين
2. إستنتج $\ln'(x)$

مناقشة النشاط

1. الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة f' حيث $f'(x) = \ln'(x)e^{ln(x)}$
2. نعلم أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x) = x$ أي $f'(x) = 1$ ومنه $\ln'(x)e^{ln(x)} = 1$ أي

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

مرحلة بناء المعارف

خاصية

أضف إلى معلوماتك

✍ الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

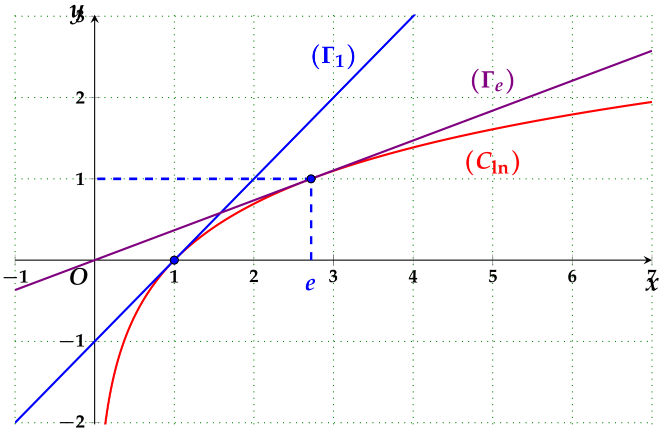
جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية

5د

x	0	1	e	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖	+		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$

التمثيل البياني للدالة $\ln$

5د



ملاحظة:

✍ المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب

✍ المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته $y=x-1$

✍ بإستعمال مفهوم العدد المشتق نجد: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(h+1)}{h}=1$

نتيجة

الدالة $x\mapsto x$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x\mapsto \ln(x+1)$ بجوار 0

أي : من أجل x قريب من 0 لدينا : $\ln(x+1)\approx x$

تطبيق

التقويم

20د

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1-(\ln(x))^2$

✍ أحسب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

✍ أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

✍ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن α و β حيث : $0<\alpha<1$ و $2<\beta<3$

✍ أرسم التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

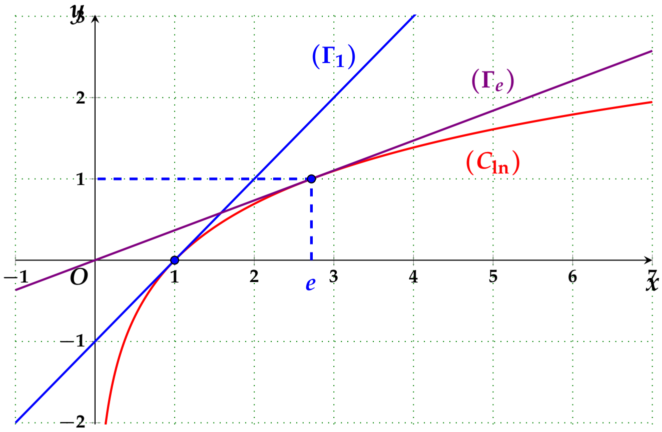
تـــمريــــن منــــــــــــــــــــــزلي

(I

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$
A نقطة من (C_f) فاصلتها m حيث m عدد حقيقي موجب تماما . و (Γ_m) مماس لـ (C_f) في النقطة A .

1 أ) أثبت أن $y=\dfrac{1}{m}x-1+\ln(m)$ معادلة للمماس (Γ_m)

ب) تحقق أنّ المماس (Γ_e) للمنحنى (C_f) في النقطة $B\,(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.



2 لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{m}x-1+\ln(m)-\ln(x)$

أ) أثبت أنّ الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 إستنتج ماسبق أنّ المنحنى (C_f) يقع تحت أي مماس له .

(II

1 أ) إستنتج من الجزء (I) أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون
$\ln(x)\leq ln(m)+\dfrac{x-m}{m}$

ب) إستنتج من (أ) أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون $\ln(m+1)-\ln(m)\leq\dfrac{1}{m}$

(III

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ المعرفة بـ $f(x)=\ln(x)+x-1$ و إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x صحة المتباينة $\ln(x)\leq x-1$

2 أ) أثبت أنه من أجل $t>-1$ يكون لدينا : $\ln(t+1)\leq t$

ب) بوضع : $x=\dfrac{1}{1+t}$ ، أثبت أنه من أجل $t>-1$ يكون لدينا : $\dfrac{t}{1+t}\leq\ln(1+t)$

ج) إستنتج من أجل $t>-1$ صحة المتباينة : $\dfrac{t}{1+t}\leq\ln(1+t)\leq t$

تـــــمريـــــن منــــــــــــــــــــزلي

(I

ليكن $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$
A نقطة من $\left(C_f\right)$ فاصلتها m حيث m عدد حقيقي موجب تماما . و (Γ_m) مماس لـ $\left(C_f\right)$ في النقطة A .

1 أ) أثبت أن $y = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m)$ معادلة للمماس (Γ_m)

ب) تحقق أنّ المماس (Γ_e) للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة $B\,(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

2 لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m) - \ln(x)$

أ) أثبت أنّ الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 إستنتج مماسبق أنّ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع تحت أي مماس له .

(II

1 أ) إستنتج من الجزء (I) أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون $\ln(x) \leq ln(m) + \dfrac{x-m}{m}$

ب) إستنتج من (أ) أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون $\ln(m+1) - \ln(m) \leq \dfrac{1}{m}$

(III

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ المعرفة بـ $f(x) = \ln(x) + x - 1$ و إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x صحة المتباينة $\ln(x) \leq x - 1$

2 أ) أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\ln(t+1) \leq t$

ب) بوضع : $x = \dfrac{1}{1+t}$ ، أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$

ج) إستنتج من أجل $t > -1$ صحة المتباينة : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

تـــــمريـــــن منــــــــــــــــــــزلي

(I

ليكن $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$
A نقطة من $\left(C_f\right)$ فاصلتها m حيث m عدد حقيقي موجب تماما . و (Γ_m) مماس لـ $\left(C_f\right)$ في النقطة A .

1 أ) أثبت أن $y = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m)$ معادلة للمماس (Γ_m)

ب) تحقق أنّ المماس (Γ_e) للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة $B\,(e;1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

2 لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \dfrac{1}{m}x - 1 + \ln(m) - \ln(x)$

أ) أثبت أنّ الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 إستنتج مماسبق أنّ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع تحت أي مماس له .

(II

1 أ) إستنتج من الجزء (I) أنه من أجل كل عددين حقيقين موجبين تماما m و x يكون $\ln(x) \leq ln(m) + \dfrac{x-m}{m}$

ب) إستنتج من (أ) أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون $\ln(m+1) - \ln(m) \leq \dfrac{1}{m}$

(III

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ المعرفة بـ $f(x) = \ln(x) + x - 1$ و إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x صحة المتباينة $\ln(x) \leq x - 1$

2 أ) أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\ln(t+1) \leq t$

ب) بوضع : $x = \dfrac{1}{1+t}$ ، أثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$

ج) إستنتج من أجل $t > -1$ صحة المتباينة : $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دراسة الدالة $\ln \circ u$

المكتسبات القبلية : النهايات، الاشتقاقية ،اتجاه التغير،خواص الدالة اللوغاريتمية
الكفاءات المستهدفة : دراسة الدالة $\ln \circ u$
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** تذكير بنهاية و مشتق مركب دالتين	
مرحلة بناء المعارف	**النهايات** **مبرهنة** a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ نعتبر الدوال التالية u ، $\ln x$ و f حيث $f = \ln \circ u$ و u معرفة وموجبة على مجال I إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x\to b} \ln x = c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ أضف إلى معلوماتك **مـــثال** f دالة عددية معرفة على $]4;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x-4)$ لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} (x-4) = 0^+$ وبما أن $\lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} \ln(X) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \ln(x-4) = -\infty$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-4) = +\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ **تطبيق** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)]$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	10د
	إتجاه التغير **مبرهنة** إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس إتجاه التغير على المجال I أضف إلى معلوماتك **البـرهـان** بماأن الدالة $\ln$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن للدالتين $\ln \circ u$ و u نفس إتجاه التغير على I (حسب المبرهنة الخاصة بإتجاه تغير دالة مركب) ■ **مـــثال** fدالة عددية معرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x) = \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ لدينا $x \mapsto -\frac{1}{x}$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$	10د

مشتقة $\ln \circ u$

خاصية

أضف إلى معلوماتك

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln \circ u$ قابلة للإشتقاق على I
ولدينا من أجل كل x من I، $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

البــرهــان

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على I و موجبة تماما من أجل كل x من I
لدينا : الدالة $\ln$ قابلى للإشتقاق على $]0;+\infty[$ إذن $\ln \circ u$ قابلة للإشتقاق على I
من أجل كل x من I $(\ln \circ u)'(x) = u'(x)\,(\ln' \circ u)(x) = u'(x)\ln'((u(x))$ ولدينا: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
أي $\ln'(u(x)) = \dfrac{1}{u(x)}$ ومنه $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ■

ملاحظة: إذا كانت u سالبة على المجال I فإن
$(\ln \circ(-u))'(x) = \dfrac{-u'(x)}{-u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ **نتيجة** $(\ln \circ |u|)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

مـــثال

10د

عيّن مشتقة الدالة f في كل حالة

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad I =]1;+\infty[$
2. $f(x) = \ln|2x-1|$ $\quad I = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$
3. $f(x) = \ln(x^2-3x)$ $\quad I =]3;+\infty[$

التقويم

تطبيق

20د

نعتبر الدالة العددية f المعرفة $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln|x^2-x-2|$
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أدرس تغيرات الدالة f
2. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$
3. أنشئ (T) و (C_f).

ملاحظات حول سير الدرس

....
....
....

10د

مرحلة بناء المعارف

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دالة اللوغاريتم العشري

المكتسبات القبلية : خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري
الكفاءات المستهدفة : خواص الدالة اللوغاريتم العشري و تطبيقاتها
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		25د
مرحلة بناء المعارف		

1 نشاط مقترح

تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي يرمز إليها بالرمز log والمعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

1. أحسب $log(1)$ ، $log(10)$
2. أثبت من أجل كل عددين حقيقين a و b من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح n

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log(a^n) = n\log(a)$$

3. (إعتماد على دالة ln) أدرس إتجاه تغير الدالة log ، ثم أشرح كيف يمكن إنشاء منحناها البياني

مناقشة النشاط

1. $\log(1) = \dfrac{\ln(1}{\ln(10)} = 0$ ، $\log(10) = \dfrac{\ln(10}{\ln(10)} = 1$

2. $$\log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)}{\ln(10)} + \frac{\ln(b)}{\ln(10)} = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)-\ln(b)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)}{\ln(10)} - \frac{\ln(b)}{\ln(10)} = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln(10)} = \frac{n\ln(a)}{\ln(10)} = n\log(a)$$

3. إتجاه تغير

لدينا : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

$10 > 1$ و منه $\ln(10) > 0$ إذن $\dfrac{1}{\ln(10)} > 0$

لدينا الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ومنه الدالة $\dfrac{\ln}{10}$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

إذن الدالة log متزايدة تاما على $]0;+\infty[$ (نترك للتلميذ بإستعمال المشتق)

النهايات

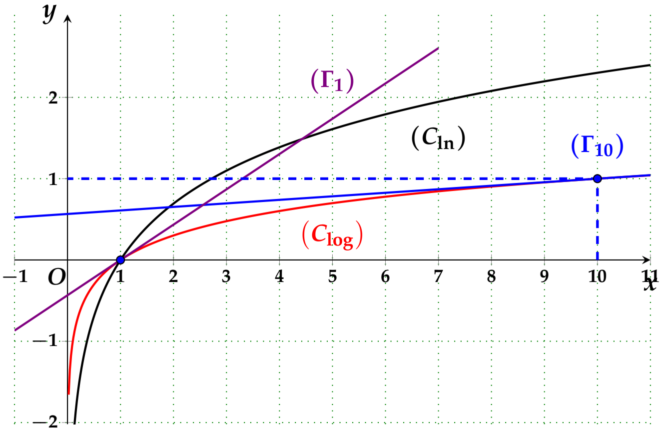
$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = +\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \log(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة اللوغاريتم العشري

x	0	1	10	$+\infty$
$\log'(x)$	||		$+$	
$\log(x)$	|| $-\infty$	0	1	$+\infty$

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتم العشري ln

نضرب ترتيبة النقطة من $(C_{\ln})$ فاصلتها x في العدد $\dfrac{1}{\ln(10)}$



بعض إستعمالات اللوغاريتم العشري

في الكيمياء : تقاس درجة حموضة محلول بال PH الذي يساوي $PH = -\log[H_3O^+]$ حيث $[H_3O^+]$ هو تركيز شوارد H_3O^+ في المحلول مقاسة بواحد مول في الليتر .

10د

1 ماهي قيمة PH علما أن المحلول يحتوي على 5×10^{-8} من شوارد H_3O^+ في اللتر الواحد .

2 ماهو التركيز المولي بشوارد H_3O^+ لمحلول معتدل $(PH = 1)$ ؟

في علم الزلزال يشير المقدار I_0 إلى شدة قاعدية مرجعية ، و عندها نقول إن درجة زلزال شدته I تساوي M إذا علمت أن $M = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ ، فما درجة الزلزال الذي وقع في لوس انجلوس عام 1971 إذا علمت أن $I = 50,01 \times 10^6 I_0$

في علم الصوتيات تعطى الشدة $\mathcal{I}$ مقاسة بالدسيبل لصوت إستطاعته $\mathcal{P}$ بالصيغة $10\log\left(\dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}\right)$ حيث تمثل $\mathcal{P}_0$ حدّ الصوت المسموع به ، الذي لا يسمع أي صوت إستطاعته أدني منه .

معرفة عدد الأرقام في الكتابة العشرية

10د

نعتبر العدد الطبيعي n حيث : $n = 2^{1234}$

1 عيّن بإستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log(n)$.

2 إستنتج الحصر التالي : $10^{371} \le n < 10^{372}$.

3 حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n .

التقويم	**تطبيق** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية : **1** $\log(x) = 4$ **2** $\log(x) = -3$ **3** $\log(x) = 0,01$ **4** $\log(x) < -10$ **5** $\log(x) < \log(1-x)$ **تمرين منـــــــــــــــــــزلي** **1** أحسب المجموع التالي : $S = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) + \log\left(\frac{4}{5}\right) + \log\left(\frac{5}{6}\right) + \log\left(\frac{6}{7}\right) + \log\left(\frac{7}{8}\right) + \log\left(\frac{8}{9}\right) + \log\left(\frac{9}{10}\right)$ **2** حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\log\left(\frac{x+3}{x-4}\right) - 1 < 0$ **3** حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية : $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$ **ملاحظات حول سير الدرس**	15د

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية و اللوغاريتمية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

المكتسبات القبلية : خواص الدالة الأسية
الكفاءات المستهدفة : حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية التذكير بأهمية المعادلات التفاضلية **تمهيد** المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرمز إليها غالبا بالرمز y ، z ، ... كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى . حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق : $f'(x) = af(x) + b$	10د
مرحلة بناء المعارف	**1 نشاط مقترح** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = Ce^{ax}$ مع c عدد حقيقي ثابت . أحسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية : $y' = ay$	5د
	المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay$ مع $a \neq 0$ **مبرهنة** — أضف إلى معلوماتك a عدد حقيقي غير معدوم حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $c \mapsto ce^{x}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .	10د
	مـــثال لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' + 2y = 0$ لدينا : $y' + 2y = 0$ معناه $y' = -2y$ ومنه حلول هذه المعادلة هي الدوال : $x \mapsto ce^{2x}$ حيث c عدد حقيقي ثابت	
	المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ **مبرهنة** — أضف إلى معلوماتك a عدد حقيقي غير معدوم حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $c \mapsto ce^{x} - \frac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .	10د

مـــــثال

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' = -3y + 2$

حلول هذه المعادلة هي الدوال $x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$

خاصية

أضف إلى معلوماتك

✍ من أجل كل ثنائية الأعداد حقيقية $(x_0; y_0)$ ، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$
تقبل حلا وحيدا يحقق : $f(x_0) = y_0$

5د

التقويم

تطبيق

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) \cdots 2y' + y = 1$

20د

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E)

2 عيّن الحل الخاص للمعادلة (E) بحيث $f(-1) = 2$

3 أدرس تغيرات الدالة f ، ثم أرسم تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

حل تمرين 106–105–102 صفحة 110–109

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....