**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

- **الأستاذ** : بخدة أمين
- **المستوى** : السنة ثالثة رياضيات
- **المدة** : 2 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** الإشتقاقية و الإستمرارية
- **ميدان التعلم:** التحليل
- **موضوع الحصة** : حساب مشتقة دالة

- **المكتسبات القبلية** : حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
- **الكفاءات المستهدفة** : تذكير:حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
- **المراجع** : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق | (see below, section 1) | 30د |
| مرحلة بناء المعارف | (see below, section 2) | 15د |

**المراحل: مرحلة الإنطلاق — المدة: 30د**

## 1 مناقشة نشاط 1 صفحة 40

**1** حساب الأعداد المشتقة :

لدينا: $f'(-1)=0$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-1$

نختار نقطتين من المماس مثلا: $A(-1;2)$ و $B(-2;2)$ ومنه $f'(-1)=\frac{2-2}{-1+2}=\frac{0}{1}=0$

- $g'(-1)=\frac{-1-0}{-1-2}=\frac{1}{3}$ • $f'(2)=\frac{0-2}{2-0}=-1$ • $g'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$
- $(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=\frac{1}{3}$ • $(fg)'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=-2$
- $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)=-\frac{3f'(-1)}{(f'(-1))^2}$ • $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)\times g(2)-g'(2)\times f(2)}{(g(2))^2}=-\frac{1}{2}$

**2** من أجل كل $x$ من $[0;2]$ نضع : $h(x)=f(2x-1)$

-حساب $h'(0)$ :

لدينا: $h'(x)=2f'(2x-1)$ ومنه: $h'(0)=2f'(-1)=0$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'(2)=-2$

**المراحل: مرحلة بناء المعارف — المدة: 15د**

## 2 العدد المشتق-الدالة المشتقة

**تعريف**

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ .

$x_0$ و $x_0+h$ عددان حقيقيان من $I$ مع : $h\neq 0$ .

نقول أنّ $f$ تقبل الإشتقاق عند $x_0$ إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول $h$ إلى $0$.

تسمى هذه النهاية : العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ و نرمز لها بـ $f'(x_0)$ .

نكتب إذن : $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ أو نكتب : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

( بوضع $x=x_0+h$ )

**ملاحظة:** إذا قبلت الدالة $f$ الإشتقاق عند كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ فهي تقبل الإشتقاق على $I$

ونرمز لدالتها المشتقة بـ: $f'$

15د

## مثـــــال

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x^2+x$

**1** برهن أنّ $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

**2** عيّن $f'(x)$

✍ ليكن $x_0$ عدد حقيقي كيفي

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+x-x_0^2-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0+1)}{x-x_0}$$

ومنه $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0+1)=2x_0+1$

إذن $2x_0+1$ عدد حقيقي ومنه $f$ دالة قابلة للإشتقاق عند $x_0$

لكن $x_0$ يمسح $\mathbb{R}$ ومنه $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

✍ لتكن $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$

لدينا : $f'(x)=2x+1$

20د

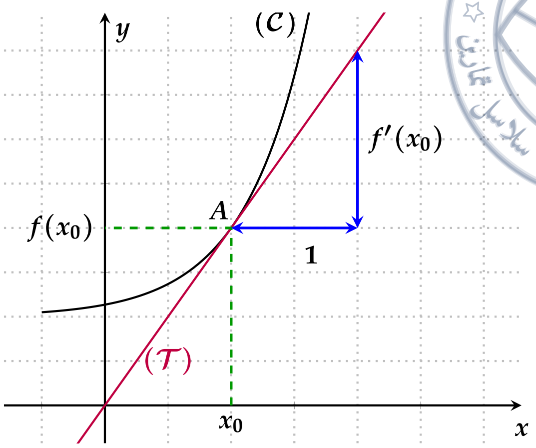
## 3 التفسير البياني (مماس منحنى دالة )

### تعريف

$f$ دالة معرفة على مجال $D$ من $\mathbb{R}$ . و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ من $D$ وَ $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ فإن المستقيم الذي يشمل النقطة $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ يسمى مماس المنحنى $(\mathcal{C})$ عند النقطة $A$

. معادلته هي: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ .




### البـرهـان

المماس $(\mathcal{T})$ هو عبارة عن مستقيم معامل توجيهه $f'(x_0)$.

إذن معادلة $(\mathcal{T})$ من الشكل $y=f'(x_0)x+b$ والنقطة $A(x_0;f(x_0))$ تنتمي إلى $(\mathcal{T})$ فإن

$f(x_0)=f'(x_0)\times x_0+b$ ومنه بالتعويض

. $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$

وبالتالي $y=f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)$

ومنه :

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$

■

5د

## مثـــــال

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+2$

معادلة المماس لمنحنى $f$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هي :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=5x-2$

40د

التطبيق : حل تمريـ $\{8-7-4\}$ ـــن صفـ $\{58\}$ ـحة

**ملاحظات حول سير الدرس**

✍ ..............................................................................

..............................................................................

مرحلة بنــــاء مفــــاهيــــم معـــارف

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

- **الأستاذ** : بخدة أمين
- **المستوى** : السنة ثالثة رياضيات
- **المدة** : 1 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** الإشتقاقية و الإستمرارية
- **ميدان التعلم:** التحليل
- **موضوع الحصة** : الإستمرارية

- **المكتسبات القبليـة** : مفاهيم أولية حول الدوال العددية
- **الكفاءات المستهدفة** : دراسة السلوك التقاربي للدالة
- **المراجع** : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مـرحـلة الإنـطـلاق | انظر أدناه | 30د |

**التهيئة النفسية**

## 1 مناقشة نشاط 3 صفحة 7

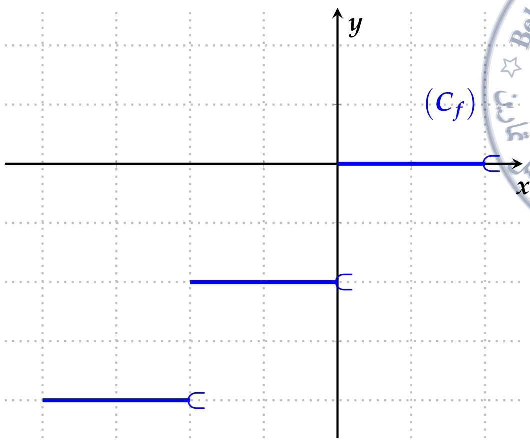
**1** حساب $[-2.3]$ ، $E(-1)$ ، $[\sqrt{3}]$ و $E(11,01)$.

لدينا: $-3 \leq -2,3 < -2$ ومنه $[-2,3] = -3$ ، $E(-1) = -1$ ، $1 \leq \sqrt{3} < 2$ ومنه $[\sqrt{3}] = 1$ ، $E(11,01) = 11$

**2** نعتبر الدوال $f$ ، $g$ و $h$ المعرفة على المجال $[-2;1[$ كمايلي :

$f(x) = [x]$ ، $g(x) = x - [x]$ ، $h(x) = x^2 + 1$ ولتكن $(C_f)$ ، $(C_g)$ و $(C_h)$. تمثيلاتها البيانية على الترتيب

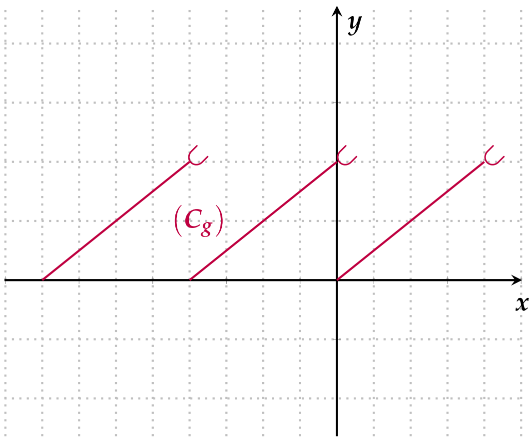
**رسم $(C_f)$**




- من أجل $[-2;-1[$ : $x \in$ $f(x) = -2$
- من أجل $[-1;0[$ : $x \in$ $f(x) = -1$
- من أجل $[0;1[$ : $x \in$ $f(x) = 0$

إذن
$$f(x) = \begin{cases} -2; x \in [-2;-1[ \\ -1; x \in [-1;0[ \\ 0; x \in [0;1[ \end{cases}$$

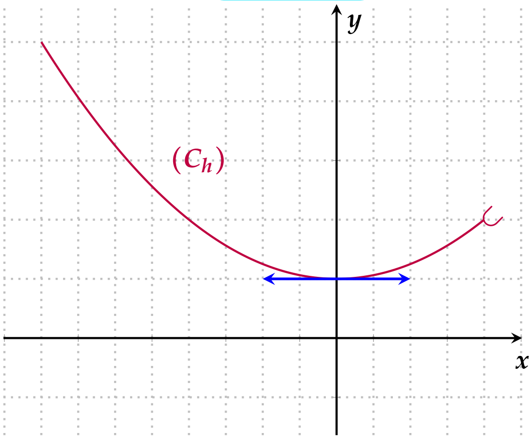
**رسم $(C_g)$**




- من أجل $[-2;-1[$ : $x \in$ $g(x) = x + 2$
- من أجل $[-1;0[$ : $x \in$ $g(x) = x + 1$
- من أجل $[0;1[$ : $x \in$ $g(x) = x$

إذن
$$f(x) = \begin{cases} x+2; x \in [-2;-1[ \\ x+1; x \in [-1;0[ \\ x; x \in [0;1[ \end{cases}$$

رسم $(C_h)$




✍ هل بإمكانك رسم المنحنيات $(C_f)$ ، $(C_g)$ و $(C_h)$ دون رفع القلم (اليد)

- لايمكن رسم المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ دون رفع القلم (اليد)
- بينما يمكن رسم المنحنى $(C_h)$ دون رفع القلم ( اليد)

✍ هل تقبل الدوال $f$ ، $g$ و $h$ نهاية عند $-1$ ؟ عند $0$ ؟

- الدالتان $f$ و $g$ لا تقبلان نهاية عند $-1$ وكذا عند الصفر .
- الدالة $h$ تقبل نهاية عند $-1$ و عند $0$ لأنها معرفة عندهما : $h(-1) = 2$ و $h(0) = 1$

**خلاصة**

✍ يمكن رسم المنحنى $(C_h)$ دون رفع القلم (اليد) ، فنقول أن الدالة $h$ مستمرة على المجال $[-2;1]$ .

✍ أما $f$ ، $g$ فهما غير مستمرتين على المجال $[-2;1]$

## 2 الإستمرارية

### ❶ إستمرارية دالة عند القيمة $a$

**تعريف**

$f$ دالة مجموعة تعريفها $I$ و $a$ عدد حقيقي غير معزول من $I$

✍ القول أن الدالة $f$ مستمرة عند $a$ يعني أن نهاية الدالة $f$ عند $a$ هي $f(a)$

✍ $f$ مستمرة عند $a$ يعني أنّ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

5د

### ❷ الإستمرار من اليمين

**تعريف**

$f$ دالة معرفة على المجال $]x_0;a[$ و $a < 0$ ، القول أن الدالة $f$ مستمرة عند $a$ من اليمين يعني أنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

5د

**مثال**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-2;4]$ كمايلي : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x; x \in [-2;1[ \\ x - 1; x \in [1;4] \end{cases}$

✍ بيّن أنها مستمرة على يمين الـ $1$

5د

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 1 = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) =$ كذلك $f(1) = 1 - 1 = 0$ ،إذن الدالة $f$ مستمرة على يمين الـ $1$

### ❸ الإستمرار من اليسار

**تعريف**

$f$ دالة معرفة على المجال $]x_0;a[$ و $a > 0$ ، القول أن الدالة $f$ مستمرة عند $a$ من اليساريعني أنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$

5د



مرحلة إعداد المستعرف

مرحلة بناء معارف

## مثـــال

5د

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-2;4]$ كمايلي : $f(x)=\begin{cases} x^2+x; x\in[-2;1[ \\ x-1; x\in[1;4] \end{cases}$

✍ بيّن أنها مستمرة على يسار الـ $1$

لدينا : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x^2+x=2$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=2$ و كذلك $f(1)=1+1=2$، إذن الدالة $f$ مستمرة على يمين الـ $1$

### ❹ إستمرارية دالة على مجال من مجموعة التعريف

**تعريف**

5د

✍ $f$ دالة معرفة على مجال $I$

✍ القول أن $f$ مستمرة على $I$ يعني $f(x)$ مستمرة عند كل عدد $a$ من المجال $I$

### ❺ التفسير البياني

الدالة $f$ مستمرة على المجال $I$ من $\mathbb{R}$ يعني يمكن رسم منحناها البياني $(C_f)$ دون رفع القلم (دون رفع اليد )

## مـــثال

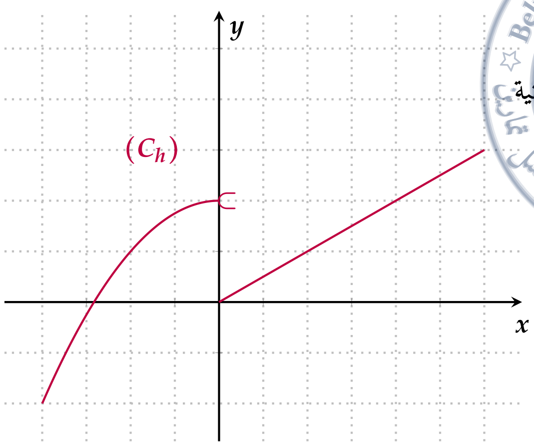
10د

لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $[-2;3]$ بـ: $f(x)=\begin{cases} -x^2+2; x\in[-2;0[ \\ x; x\in[0;3] \end{cases}$.

**1** مثل بيانيا الدالة $f$. هل تقبل الدالة $f$ نهاية عند $0$ ؟

**2** هل الدالة $f$ مستمرة على المجال : $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة .

**الحـل**




**1** أنظر لدينا من جهة : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=2$ و من جهة ثانية $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=0$ ، إذن الدالة $f$ لاتقبل نهاية عند $0$

**2** الدالة $f$ غير مستمرة عند $0$ و بالتالي فهي غير مستمرة على المجال : $[-2;3]$.

الدالة $f$ مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$



**ملاحظة :**

إذا كانت الدالة $f$ معرفة على المجال $[a;b]$ و مستمرة على $]a,b[$ و على $a$ من اليمين و على $b$ من اليسار نقول أنها مستمرة على $[a;b]$

10د

**خواص( تقبل دون برهان):**

✍ $f$ مستمرة عند $a$ يعني $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)=f(a)=\ell$

✍ الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها

✍ مجموع و جداء دوال مستمرة عند $a$ هي دالة مستمرة عند $a$ .

✍ الدوال كثيرات الحدود و الدوال $\cos$ ، $\sin$ مستمرة على $\mathbb{R}$ .

✍ الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود ) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها

10د

**تطبيق :** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1; x\leq 2\\ x^2+x-5; x>2\end{cases}$

✍ أدرس إستمرارية الدالة $f$ عند 2

✍ هل الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

الـحل

**1** ✍ لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2}(x^2-2x+1)=1$ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=$ و $f(2)=1$ ، إذن الدالة مستمرة على يمين 2

✍ لدينا : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2}(x^2+x-5)=1$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=$ و $f(2)=1$ ، إذن الدالة مستمرة على يسار 2

ومنه الدالة $f$ مستمرة عند الـ 2

**2** ✍ لدينا : $x\mapsto x^2-2x+1$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]-\infty;2]$

✍ $x\mapsto x^2+x-5$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]2;+\infty[$

ولدينا حسب سؤال 1 $f$ مستمرة عند 2 ومنه الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

15د

**تطبيق :**

**1** بيّن أنّ الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2-2x)\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ .

**2** بيّن أنّ الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$ مستمرة على $]1;+\infty[$

الحل

**1** ✍ لدينا: $x\mapsto x^2-2x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود

✍ لدينا: $x\mapsto \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$

الدالة $f$ جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ ،إذن الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ .

**2** الدالة $g$ دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها ومنه $g$ مستمرة على $]1;+\infty[$

تمرين منزلي : تمرين 45-49 صفحة 29

حل تمرين 45 صفحة 29

**1** دراسة إستمرارية الدالة $f$ عندالعدد 1

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ ولدينا : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

ومنه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$ إذن، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ ومنه الدالة $f$ مستمرة عند العدد 1

**2** لدينا: $x\mapsto\dfrac{x^3-1}{x-1}$ دالة ناطقة فهي معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ومنه $f$ مستمرة على $\mathbb{R}-\{1\}$

و مما سبق $f$ مستمرة عند العدد 1 إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$

تقويم

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

## ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- **الأستاذ** : بخدة أمين
- **المستوى** : السنة ثالثة رياضيات
- **المدة** : 2 ساعة
- **الوحدة التعلمية**: الإشتقاقية و الإستمرارية
- **ميدان التعلم**: التحليل
- **موضوع الحصة** : مبرهنة القيم المتوسطة

- **المكتسبات القبليـة** : إستمرارية دالة على مجال ،رتابة دالة
- **الكفاءات المستهدفة** : تبيان وجود حل للمعادلة $f(x)=k$
- **المراجع** : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|

**مرحلة الإنطلاق**

### التهيئة النفسية

❶ مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

(5د)

**مبرهنة** — أضف إلى معلوماتك

✍ إذا كانت $f$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان العدد الحقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ على الأقل في المجال $]a;b[$

**مرحلة بـنـاء المـعـارف**

❷ التفسير البياني

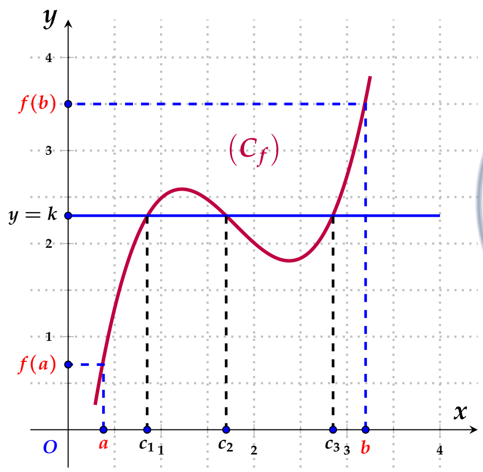
(10د)

✍ المستقيم ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة منحنى الدالة $f$ في نقطة فاصلتها محصورة بين $a$ و $b$

✍ بالنسبة للشكل المقابل المستقيم ذو المعادلة $y=k$ يقطع منحنى الدالة $f$ في ثلاث نقط فواصلها $c_1$ ، $c_2$ و $c_3$.

**حالة خاصة** :

إذا كانت $f$ دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $f(c)=0$




❸ المعادلة $f(x)=k$

(5د)

✍ إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا $c$ محصور بين $a$ و $b$

**ملاحظة** : مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيّين الحلول او قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة .

### مـــثال

(15د)

برهن بإستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أنّ المعادلة $x^5+3x^4-6x^2=1$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[1;2]$

**طريقة**

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$
- تحقق من إستمرارية الدالة $f$ على المجال $[a;b]$
- تحقق من أن العدد $k$ محصور بيّن $f(a)$ و $f(b)$

**الحل** : لتكن $f$ الدالة المعرفة على $[1;2]$ بـ: $f(x)=x^5+3x^2-6x^2$

• $f$ دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على المجال $[1;2]$ و لدينا : $f(1)=-2$ و $f(2)=56$

ولدينا : $56>1>-2$ أي $f(1)<1<f(2)$، إذن المعادلة $f(x)=1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$

**طريقة 2**

المعادلة السابقة تكافئ : $x^5+3x^2-6x^2-1=0$ ، نضع $f(x)=x^5+3x^2-6x^2-1$

$f$ مستمرة على المجال $[1;2]$ و $f(1)=-2$ ، $f(2)=56$ ومنه $f(1)\times f(2)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[1;2]$

## تطبيق

لتكن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$

**1** أحسب : $f(-1)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$

**2** إستنتج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

15د

## الحل

**1** حساب الصور : $f(-1)=-\frac{5}{4}$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$ ، $f(0)=-\frac{1}{4}$ ، $f(1)=\frac{1}{4}$

**2** إستنتاج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

لدينا: $f$ دالة كثيرة حدود ، فهي معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي فهي مستمرة على المجال $[-1;1]$

✍ لدينا $f$ مستمرة على المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ و أنّ: $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(-1)<0$ أي $0$ محصور بين $f(-1)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ (1)

✍ لدينا $f$ مستمرة على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ و أنّ: $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(0)<0$ أي $0$ محصور بين $f(0)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ (2)

✍ لدينا $f$ مستمرة على المجال $[0;0]$ و أنّ: $f(0)\times f(1)<0$ أي $0$ محصور بين $f(0)$ و $f(1)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $]0;1[$ (3)

**النتيجة:** من (1) و (2) و (3) فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1;1[$

### ❹ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على المجال $[a;b]$

**مبرهنة** — أضف إلى معلوماتك

✍ إذا كانت $f$ دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ وكان العدد الحقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ وحيدا في المجال $]a;b[$

5د

**البرهان**

نفرض أن الدالة $f$ مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$

و ليكن $k$ عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $f(c)=k$ .

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي أخر $c'$ مختلف عن $c$ محصور بين $a$ و $b$ و يحقق $f(c')=k$

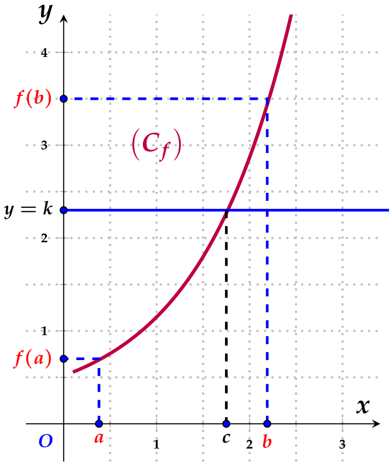
يكون حينئذ $c\neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة $f$ على $[a,b]$ .

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد $c$ من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ ■

ملاحظات

مرحلة بناء معارف

**التفسير البياني**




✍ المستقيم ذو المعادلة $y=k$ يقطع مرة واحدة منحنى الدالة $f$ في نقطة فاصلتها $c$ محصورة بين $a$ و $b$ .
✍ إذا كان $k=0$ منحنى الدالة $f$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]a;b[$ .

5د

مرحلة التقويم

## تطبيق ❶

15د

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث جدول تغيراتها كمايلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $8$ |

✍ عيّن عدد حلول المعادلات التالية محددا المجال الذي ينتمي إليه كل حل $f(x)=0$ ، $f(x)=-2$ ، $f(x)=9$

## تطبيق ❷

15د

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^3-2x+5$

**1** أحسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

**2** برهن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ في المجال $[1;2]$

**3** إستنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$.

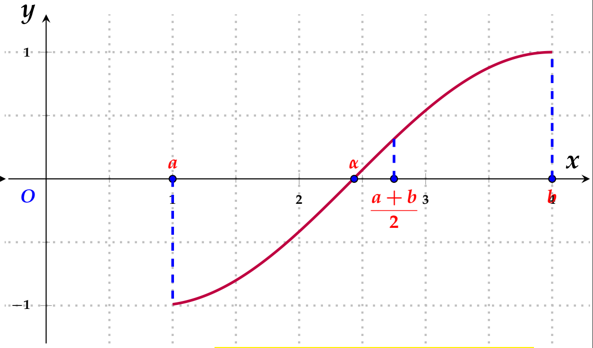


### ❺ إجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف

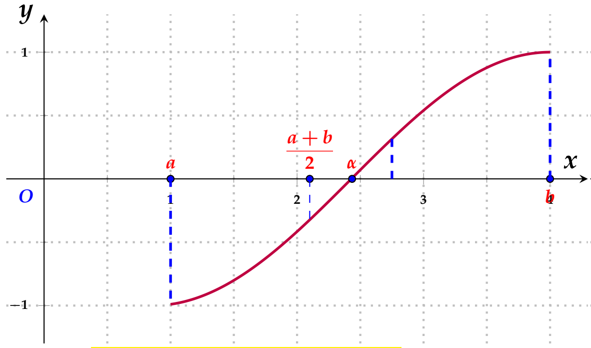
10د

◄ للحصول على حصر أدق للعدد $\alpha$ نتبع طريقة التصنيف التالية :
- نحسب كل من $m=\dfrac{a+b}{2}$ (مركز المجال $[a;b]$) و $f(m)$
- نقارن بينّ $f(a)$ و $f(m)$ و نميز حالتين :

◄ إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ فإن الحل $\alpha$ موجود في المجال $]a;m[$
◄ إذا كان $f(a)\times f(m)>0$ فإن الحل $\alpha$ موجود في المجال $]m;b[$
- نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض : $a$ أو $b$ بـ $m$ و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه .




الحالة الأولى $\alpha\in\left]a;\dfrac{a+b}{2}\right[$




الحالة الثانية $\alpha\in\left]\dfrac{a+b}{2};b\right[$

## تطبيق ❸

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $1,1$ | $8,95$ |
| $1,7$ | $0,12$ |
| $1,85$ | $-0,18$ |
| $2$ | $-0,41$ |
| $-0,75$ | $-0,75$ |

20د

1 أدرس إتجاه تغير الدالة $f$ .

2 برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ في المجال $]1,1;2,3[$.

3 بإستعمال طريقة التنصيف عيّن حصرا للعدد $\alpha$ سعته (طوله) $0,15$

4 أثبت أن: $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

### الحل

**1 دراسة إتجاه تغير الدالة $f$**

الدالة $f$ معرفة و قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ حيث : $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

بماأن $-\frac{1}{(x-1)^2}<0$ و $-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي $f$ دالة متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

**2 لنبرهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ في المجال $[1,1;2,3]$**

✍ $f$ دالة مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $[1,1;2,3]$.

✍ $f(1,1)\approx 8,95$ و $f(2,3)\approx -0,75$ ومنه $f(1,1)\times f(2,3)<0$ .

✍ $f$ دالة متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فهي متناقصة تماما على المجال $[1,1;2,3]$.

إذن حسبة مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ حيث : $\alpha\in]1,1;2,3[$.

**3 تعيين حصرا للعدد $\alpha$ سعته $0,15$**

✍ مركز المجال $]1,1;2,3[$ هو $m=\frac{1,1+2,3}{2}=1,7$ و $f(1,7)\approx 0,12$ ومنه $f(1,7)\times f(2,3)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;2,3[$

✍ مركز المجال $]1,7;2,3[$ هو $m=\frac{1,7,1+2,3}{2}=2$ و $f(2)\approx -0,41$ ومنه $f(1,7)\times f(2)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;2[$

✍ مركز المجال $]1,7;2[$ هو $m=\frac{1,7,1+2}{2}=1,85$ و $f(1,85)\approx -0,18$ ومنه $f(1,7)\times f(1,85)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;1,85[$

لاحظ أنّ طول المجال الأخير هو $1,85-1,7=0,15$ إذن نتوقف عن تنصيف المجال .

**4 إثبات أنّ $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$**

لدينا $\alpha$ حل للمعادلة $f(x)=0$ معناه $f(\alpha)=0$ تكافئ: $\frac{1}{\alpha-1}-\sqrt{\alpha}=0$ تكافئ: $\frac{1}{\alpha-1}=\sqrt{\alpha}$

بالتربيع الطرفين نجد: $\sqrt{\alpha^2}=\frac{1}{(\alpha-1)^2}$ تكافئ: $\alpha(\alpha-1)^2=1$ تكافئ : $\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)=1$ تكافئ:

$\alpha^3-2\alpha^2+\alpha=1$

إذن : $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

الدوال العددية

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : قابلية الإشتقاق دالة عند عدد

**المكتسبات القبلية :** حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
**الكفاءات المستهدفة :** قابلية إشتقاق دالة عند عدد من اليمين و من اليسار و تفسير الهندسي
**المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق | | 20د |

## 1 قابلية إشتقاق الدالة عند عدد

### ❶ قابلية الإشتقاق على اليمين

**تعريف**

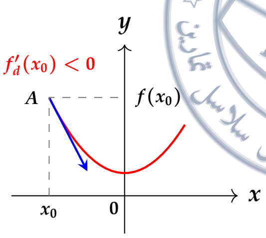
$f$ دالة معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل ، $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث : $x_0$ و $\alpha$ عددان حقيقيان مع $\alpha>0$

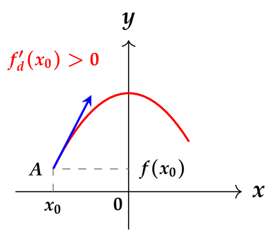
✍ نقول عن الدالة $f$ أنها تقبل الإشتقاق عند $x_0$ من اليمين إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_1$

حيث $\ell_1$ عدد حقيقي و يسمى العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ من اليمين

❖ **التفسير البياني**

✍ إذا قبلت الدالة الإشتقاق في $x_0$ من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كمايلي:
من أجل $x \geq x_0$ : $y=\ell_1(x-x_0)+f(x_0)$




**مـــثال**

الدالة المعرفة بـ $f(x)=x\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأنها معرفة على $[0;+\infty[$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x\sqrt{x}-0\sqrt{0}}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x}=0$

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مرحلة بناء المعارف | | 20د |

### ❷ قابلية الإشتقاق على اليسار

**تعريف**

$f$ دالة معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل ، $]x_0-\alpha;x_0]$ حيث : $x_0$ و $\alpha$ عددان حقيقيان مع $\alpha>0$

✍ نقول عن الدالة $f$ أنها تقبل الإشتقاق عند $x_0$ من اليسار إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_2$

حيث $\ell_2$ عدد حقيقي و يسمى العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ من اليسار

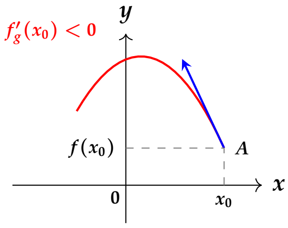
مرحلة بناء معارف

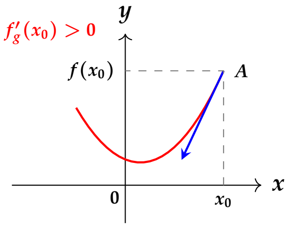
20د

## ❖ التفسير البياني

✍ إذا قبلت الدالة الإشتقاق في $x_0$ من السار فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كمايلي:

من أجل $x \leq x_0$ : $y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0)$




### مــــثال

✍ الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

- ندرس قابلية الإشتقاق للدالة $f$ من اليسار العدد 3

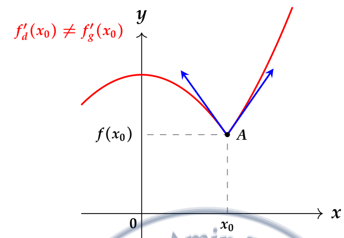
لدينا: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & ; x \in ]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[ \\ -(x^2 - 9) & ; x \in [-3:3] \end{cases}$

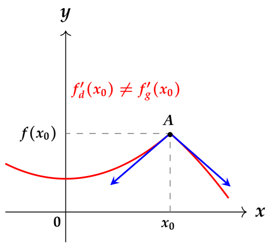
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} \frac{-(x^2-9)}{x-3} = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} -(x+3) = -6$$

إذن الدالة تقبل الإشتقاق على يسار 3 و هي تقبل نصف مماس على اليسار معادلته $y_g = -6(x-3) + f(3)$

## ❸ نقطة زاوية

إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن النقطة ذات الفاصلة $x_0$ تدعى نقطة زاوية






### مــــثال

✍ الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

- ندرس قابلية الإشتقاق للدالة $f$ عند العدد 3

لدينا: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & ; x \in ]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[ \\ -(x^2 - 9) & ; x \in [-3:3] \end{cases}$

- $\lim_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{-(x^2-9)}{x-3} = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} -(x+3) = -6$

إذن الدالة $f$ تقبل الإشتقاق على يسار 3 و عددها المشتق هو $-6$

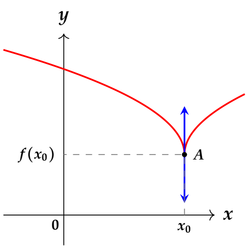
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{(x^2-9)}{x-3} = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} (x+3) = 6$

إذن الدالة $f$ تقبل الإشتقاق على يمين 3 و عددها المشتق هو 6

بما أن العدد المشتق على اليمين يختلف عن اليسار فالدالة لا تقبل الإشتقاق عند 2 و تقبل نقطة زاوية

## ❹ مماس موازي لمحور التراتيب

إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty$ فإن التمثيل البياني $(C_f)$ للدالة $f$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ مماسا يوازي حامل محور التراتيب .

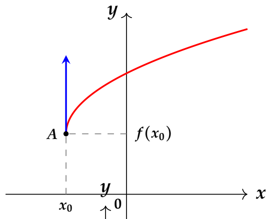


مرحلة التكوين

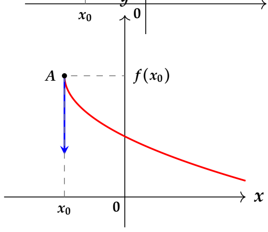
20د

### حالات خاصة

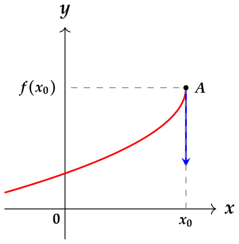
إذا كان $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن $f$ غير قابلة للإشتقاق عند يمين $x_0$ ونقول أن $(C_f)$ يقبل عند يمين النقطة $A\left(x_0; f(x_0)\right)$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$ .



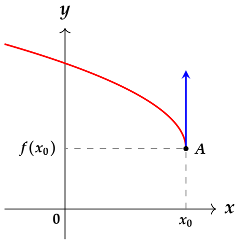

إذا كان $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن $f$ غير قابلة للإشتقاق عند يمين $x_0$ ونقول أن $(C_f)$ يقبل عند يمين النقطة $A\left(x_0; f(x_0)\right)$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$ .




إذا كان $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن $f$ غير قابلة للإشتقاق عند يسار $x_0$ ونقول أن $(C_f)$ يقبل عند يسار النقطة $A\left(x_0; f(x_0)\right)$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$ .




إذا كان $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن $f$ غير قابلة للإشتقاق عند يسار $x_0$ ونقول أن $(C_f)$ يقبل عند يسار النقطة $A\left(x_0; f(x_0)\right)$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$ .




التقويم

**مـــثال**

الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \sqrt{x}$ غير قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

إذن الدالة $f$ غير قابلة لإشتقاق عند **0** و $(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي على حامل محور التراتيب معادلته نحوا الأعلى $x = 0$



20د

## 2 الإشتقاقية و الإستمرارية

**مبرهنة:** إذا كانت الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند عدد $x_0$ فإنها مستمرة عند $x_0$

**ملاحظة:** عكس هذه المبرهنة ليس دوما صحيح

**مـــثال**

الدالة $f : x \mapsto |x|$ مستمرة عند **0** و لكن غير قابلة للإشتقاق عند **0**

لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x-0}{x} = 1$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{-x-0}{x} = -1$

ومنه المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار $(f'_d \neq f'g)$

إذن $f$ لا تقبل الإشتقاق عند **0**

20د

**تطبيق** : أدرس قابلية إشتقاق الدالة $f$ عند $x_0$ في كل حالة ثم فسر النتيجة بيانيا .

❶ $f(x) = -x^2+2\ ;\ x_0 = 1$ ❷ $f(x) = \sqrt{x-4}\ ;\ x_0 = 4$ ❸ $f(x) = x|x-3|\ ;\ x_0 = 3$

❹ $f(x) = \dfrac{|x|x^2}{x+2}\ ;\ x_0 = 0$

**حل التطبيق**

❶ $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x-1)}{x-1}$$

ومنه $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} -(x+1) = -2$$

**نتيجة**

: الدالة $f$ تقبل الإشتقاق عند $x_0 = 1$ و $f'(1) = -2$

❷ $$\lim_{x \underset{>}{\to} 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \underset{>}{\to} 4}\left(\frac{\sqrt{x-4}}{x-4}\right) = \lim_{x \underset{>}{\to} 4}\frac{\sqrt{x-4}\times\sqrt{x-4}}{(x-4)\sqrt{x-4}}$$

ومنه $$\lim_{x \underset{>}{\to} 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \underset{>}{\to} 4}\frac{(x-4)}{(x-4)\sqrt{x-4}} = \lim_{x \underset{>}{\to} 4}\frac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$$

**نتيجة**

: الدالة $f$ غير قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 4$

❸ **كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة :**

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-3) & ;x<3 \\ x(x-3) & ;x>3 \end{cases}$$

**دراسة قابلية إشتقاق الدالة $f$ عند $x_0 = 3$ :**

✍ أولا دراسة قابلية إشتقاق الدالة $f$ على يمين $x_0$ .

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \underset{>}{\to} 3}\frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x \underset{>}{\to} 3} x = 3$$

✍ ثانيا دراسة قابلية إشتقاق الدالة $f$ على يسار $x_0$ .

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \underset{>}{\to} 3}\frac{-x(x-3)}{x-3} = \lim_{x \underset{>}{\to} 3} -x = -3$$

**نتيجة**

إذن النسبة $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ليس لها نهاية عندما $x$ يؤول إلى 3 ومنه $f$ غير قابلة للإشتقاق عند العدد 3

❹ **كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة :**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x+2} & ;\ x \in x \in [0;+\infty[ \\ \dfrac{-x^3}{x+2} & ;\ x \in x \in ]-\infty;-2[\cup]-2;0[ \end{cases}$$

**دراسة قابلية إشتقاق الدالة $f$ عند $x_0 = 0$ :**

✍ أولا دراسة قابلية إشتقاق الدالة $f$ على يمين $x_0$ .

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{\frac{x^3}{x+2}-0}{x} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{x^2}{x+2} = \frac{0}{2} = 0$$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن $f$ قابلة للأشتقاق على يمين $x_0 = 0$.

✍ ثانيا دراسة قابلية إشتقاق الدالة $f$ على يسار $x_0$ .

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{\frac{-x^3}{x+2}-0}{x} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\frac{-x^2}{x+2} = \frac{0}{2} = 0$$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن $f$ قابلة للأشتقاق على يسار $x_0 = 0$.

**نتيجة**

: بما أن $f$ قابلة للأشتقاق على يمين و يسار $x_0 = 0$ ولهما نفس النهاية فإن $f$ دالة قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

**ملاحظات حول سير الدرس**

✍ ..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

التقويم

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

- **الأستاذ :** بخدة أمين
- **المستوى :** السنة ثالثة رياضيات
- **المدة :** 1 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** الإشتقاقية و الإستمرارية
- **ميدان التعلم:** التحليل
- **موضوع الحصة :** حساب مشتقة دالة

- **المكتسبات القبلية :** حساب مشتقة دالة ، تعين معادلة مماس عند نقطة
- **الكفاءات المستهدفة :** حساب مشتقات الدوال المألوفة
- **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق | **التهيئة النفسية** | |
| مرحلة بنـــاء المعــــارف | (انظر أدناه) | 10د ، 10د |

**التهيئة النفسية**

## المشتقات و العمليات

❶ **مشتقات دوال مألوفة** (تقديم أمثلة)

| الدالة $f$ | مجالات قابلية الإشتقاق | الدالة المشتقة $f'$ |
|---|---|---|
| $x \longmapsto a$ | $\mathbb{R}$ | $x \longmapsto 0$ |
| $x \longmapsto ax+b$ | $\mathbb{R}$ | $x \longmapsto a$ |
| $x \longmapsto x^2$ | $\mathbb{R}$ | $x \longmapsto 2x$ |
| $x \longmapsto x^n\ (n \in \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}$ | $x \longmapsto nx^{n-1}$ |
| $x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ | $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ |
| $x \longmapsto \frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N})$ | $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ | $x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $]0;+\infty[$ | $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x \longmapsto \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $x \longmapsto \cos x$ |
| $x \longmapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $x \longmapsto -\sin x$ |

❷ **المشتقات و العمليات على الدوال**

النتائج ملخصة في الجدول التالي :

| الدالة $f$ | مجالات قابلية الإشتقاق | الدالة المشتقة $f'$ |
|---|---|---|
| $u+v$ | $u$ و $v$ قابلتان الإشتقاق على $I$ | $u'+v'$ |
| $u.v$ | $u$ و $v$ قابلتان الإشتقاق على $I$ | $u'.v+u.v'$ |
| $\lambda u\ (\lambda \in \mathbb{R})$ | $u$ قابلة للإشتقاق على $I$ | $\lambda u'$ |
| $\frac{1}{u}$ | $u$ قابلة للإشتقاق على $I$ ومن أجل كل $x$ من $I$ : $u(x) \neq 0$ | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $u$ و $v$ قابلتان الإشتقاق على $I$ و من أجل كل $x$ من $I$ : $v(x) \neq 0$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |

المدة: 10د ، 10د

## نتائج:

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة قابلة للإشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها

5د

### أمـــــثلة

لنعين مشتقة الدوال التالية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

❶ $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-8$ ❷ $f(x)=(x-2)\sqrt{x}$ ❸ $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x}$

5د

### الـــــــحل

❶ $f'(x)=4x^3-6x^2+8x$ ❷ $f'(x)=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}}$ ❸ $f'(x)=\dfrac{2x^2-6}{4x^2}$

### مـــبرهنة

- $a$ و $b$ عددان حقيقيان مع $a\neq 0$ ، $u$ دالة قابلة للإشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$
ليكن $J$ المجال المكون من الأعداد الحقيقية$x$ حيث : $ax+b$ ينتمي إلى $I$ .
- الدالة $f:\mapsto u(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على $J$ ولدينا : $f'(x)=au'(ax+b)$

5د

### أمـــــثلة

- $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\sin(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=a\cos(ax+b)$
- $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\cos(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=-a\sin(ax+b)$
- $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $(ax+b)^n$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=na(ax+b)^{n-1}$

5د

**تطبيق :** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

**1** عين مشتقة الدالة $f$

**2** لتكن $g$ و $h$ الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=g(3x-1)$

- عين $g'(x)$ و $h'(x)$ دون تعين $g(x)$ و $h(x)$

التقويم

10د

### الـــــــحل

**1** الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'$ حيث

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'(x^2+1)-(x^2+1)'(2x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

**2** الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'$ حيث : $g'(x)=-f'(-x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{(x^2+1)^2}$

- الدالة $h$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $h'$ حيث :

$$h'(x)=3g'(3x-1)=\frac{2(3x-1)^2+2(3x-1)-2}{((3x-1)^2+1)^2}=\frac{18x^2+4x-2}{(9x^2-6x+2)^2}$$

**تطبيق منزلي** : حل تمريـــ $\{13-17-24\}$ ـــن صفـ $\{60-59\}$ ـــحة

**ملاحظات حول سير الدرس**

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

- **الأستاذ** : بخدة أمين
- **المستوى** : السنة ثالثة رياضيات
- **المدة** : 1 ساعة و نصف
- **الوحدة التعلمية**: الإشتقاقية و الإستمرارية
- **ميدان التعلم**: التحليل
- **موضوع الحصة** : حساب مشتق الدالة مركب

- **المكتسبات القبلية** : حساب مشتقة دوال المألوفة
- **الكفاءات المستهدفة** : حساب مشتق :الدالة مركب ، $\sqrt{u(x)}$ ، $\frac{1}{u(x)^n}$ ، $u(x)^n$
- **المراجع** : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق<br>مرحلة بـناء المعارف | **التهيئة النفسية**<br>التذكير بتفكيك دالة و تركيب دالة و مشتقات الدوال $x \mapsto f(ax+b)$<br><br>**1 نشاط مقترح**<br>$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x+3$ .<br>**1** عيّن عبارة الدالة $(f\circ g)(x)$ .<br>**2** أحسب $f'(x)$ ، $g'(x)$ و $(f\circ g)'(x)$.<br>**3** قارن بين $(f\circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$<br>**مناقشة النشاط**<br>✍ لدينا : $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+3)$.<br>إذن $(f\circ g)(x)=(x+3)^2-1=x^2-6x+8$.<br>✍ لدينا: $f'(x)=2x$ و $g'(x)=1$ و $(f\circ g)'(x)=2x+6$ .<br>✍ المقارنة بين $(f\circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$<br>لدينا: $g'(x)f'(g(x))=1f'(x+3)=1[2(x+3)]=2x+6$<br>ومنه : $(f\circ g)'(x)=g'(x)f'(g(x))$<br>**مشتق الدالة مركب**<br><br>**مبرهنة** — أضف إلى معلوماتك<br>✍ إذا قبلت الدالة $u$ الإشتقاق على المجال $I$ من $\mathbb{R}$ ، و إذا قبلت الدالة $v$ الإشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ قابلة للإشتقاق على $I$ ، و لدينا من أجل كل $x$ من $I$ $[v(u(x))]'=u'(x)v'(u(x))$<br><br>**مـــثال**<br>لتكن الدالة العددية $f$ المعرفةعلى $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ .<br>✍ نضع : $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=\sqrt{x}$ .<br>ومنه : $f(x)=(v\circ u)(x)$ و $[v(u(x))]'=u'(x)v'(u(x))$ . لدينا: $u'(x)=2x$ و $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$<br>. إذن $f'(x)=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ | |

## 2 المشتقات المتتابعة

**تعريف**

$f$ دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$ ، $f'$ دالتها المشتقة على هذا المجال.

✍ إذا كانت $f'$ قابلة للإشتقاق على مجال $I$ فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة $f$ و يرمز لها بالرمز $f''$ أو $f^{(2)}$ .

وهكذا إذا كانت الدالة $f$ قابلة للإشتقاق $n$ مرة فإن دالتها المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $f^{(n)}$.

**مثـــال**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$

لدينا: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$ ، $f''(x) = 12x^2 - 6$ ، $f^{(3)}(x) = 24x$ و $f^{(4)}(x) = 24$

**ملاحظة:** $f$ دالة ، $n$ عدد طبيعي غير معدوم .

✍ $f^n$ هي الدالة $f$ قوى العدد $n$

✍ $f^{(n)}$ هي مشتقة ذات الرتبة $n$ (المشتقة النونية)

**تطبيق :** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \cos x$

**1** عيّن الدوال المشتقة المتتابعة $f'$ ، $f''$ ، $f'''$ ، $f^{(4)}$ و $f^{(5)}$ .

**2** خمن حسب قيم العدد الطبيعي $n$ عبارة $f^{(n)}(x)$ المشتقة ذات المرتبة $n$.



**الحل**

❶ **تعيين الدوال المشتقة المتتابعة**

من أجل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = -\sin(x)$ ، $f''(x) = -\cos(x)$ ، $f'''(x) = sin(x)$ ، $f^{(4)} = \cos(x)$

$f^{(5)} = -\sin(x)$

❷ **تخمين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ عبارة $f^{(n)}(x)$**

✍ من أجل $n = 2k+1$ نجد : $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sin(x)$ حيث $k \in \mathbb{N}$

✍ من أجل $n = 2k$ نجد : $f^{(2k+2)}(x) = (-1)^{k+1}\cos(x)$ حيث $k \in \mathbb{N}$

## 3 التطبيقات

### مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

**مبرهنــة** — أضف إلى معلوماتك

✍ إذا كانت الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على المجال $I$ من $\mathbb{R}$ و كانت $u$ موجبة تماما على $I$ فإن الدالة $\sqrt{u}$ قابلة للإشتقاق على $I$ ، ولدينا من أجل كل $x$ من $I$ $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

البرهان

نضع $f(x)=\sqrt{u(x)}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ ومنه $f(x)=v\circ u$

لدينا $u$ قابلة للإشتقاق على $I$ من $\mathbb{R}$ وموجبة أي $u(x)>0$ أي $u(x)\in ]0;+\infty[$

إذن $f$ قابلة للإشتقاق على $I$ و دالتها المشتقة $f'$ حيث : $f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$ لكن $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ ■

مثال

لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

✍ لدينا: $f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

## مشتقة الدالة $x\mapsto (u(x))^n$

مبرهنة — أضف إلى معلوماتك

✍ $n$ عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن $1$ ، إذا كانت الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على $I$ من $\mathbb{R}$ فإن الدالة $u^n$ قابلة للإشتقاق على $I$ ولدينا : من أجل كل $x$ من $I$ $(u(x)^n)'=nu'(x)\,(u(x))^{n-1}$

البرهان

نضع $f(x)=(u(x))^n$ و $v(x)=x^n$ ومنه $f(x)=v\circ u$

الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على المجال $I$ من $\mathbb{R}$

الدالة $v$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ($u(x)\in\mathbb{R}$ محققة دوما)

إذن $f$ قابلة على $I$

من أجل كل $x$ من $I$ $f'(x)=((v\circ u)(x))'=u'(x)v'(u(x))$ لكن $v'(x)=nx^{n-1}$

ومنه $v'(u(x))=n(u(x))^{n-1}$ ومنه $f'(x)=nu'(x)u(x)^{n-1}$ ■



مثال

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^4+2x)^6$ .

لدينا : $f'(x)=6(4x^3+2)(x^4+2x)^5$ أي : $f'(x)=(24x^2+12)(x^4+2x)^5$

## مشتقة الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{(u(x))^n}$

مبرهنة — أضف إلى معلوماتك

✍ $n$ عدد طبيعي غير معدوم ، إذا كانت $u$ دالة قابلة للإشتقاق على المجال $I$ من $\mathbb{R}$ و كانت $u$ لا تنعدم على $I$ فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ قابلة للإشتقاق على $I$ ولدينا: من أجل كل $x$ من $I$ $\left(\dfrac{1}{u(x)^n}\right)'=-\dfrac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$

## البرهان

نضع : $f(x)=\dfrac{1}{(u(x))^n}$

لدينا : $f=v\circ u$ حيث : $v(x)=\dfrac{1}{x}$

الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على $I$ ومنه $x\mapsto (u(x))^n$ قابلة للإشتقاق على $I$ ولا تنعدم على $I$ ومنه حسب مبرهنة مشتقة مقلوب قابلة للإشتقاق

$\dfrac{1}{(u(x))^n}$ قابلة للإشتقاق على $I$ أي $f$ قابلة للإشتقاق على $I$ و دالتها المشتقة $f'$ حيث

$$\begin{aligned}
f'(x)&=u'(x)v'(u(x))\\
&=-\frac{(u(x)^n)'}{(u(x)^n)^2}\\
&=-\frac{nu'(x)u(x)^{n-1}}{(u(x))^{2n}}\\
&=-\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n}u(x)^{-n+1}}\\
&=-\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n-n+1}}\\
&=-\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}
\end{aligned}$$

ومنه $f'(x)=-\dfrac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$ ■

## مثال

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+3)^3}$

لدينا : $f'(x)=-\dfrac{6x}{(x^2+3)^4}$



### تطبيق

✍ حل التمرين 78 صفحة 66

✍ حل التمرين 40 صفحة 61

التقويم

مرحلة بناء المعارف

**ملاحظات حول سير الدرس**

✍ ..................................................

..................................................

..................................................

## ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : السنة ثالثة رياضيات

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : تطبيقات الإشتقاقية

**المكتسبات القبلية :** حساب مشتقة دوال المألوفة

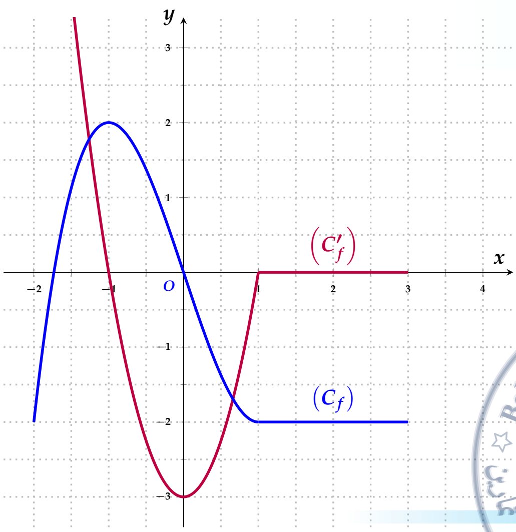
**الكفاءات المستهدفة :** إتجاه تغير دالة بإستعمال الدالة المشتقة

**المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق | التهيئة النفسية | |

## 1 نشاط مقترح

20د




في الشكل المقابل $(C_f)$ و $(C'_f)$ منحنى الدالة $f$ ودالتها المشتقة $f'$

**1** أتمم الجدول التالي :

| المجال | إشارة $f'(x)$ | تغيرات الدالة $f$ |
|---|---|---|
| $I=[-2;-1]$ | | |
| $J=[-1;1]$ | | |
| $k=[-1;3]$ | | |

**2** ذكر بالخاصية التي تربط إشارة $f'(x)$ بتغيرات الدالة $f$

مرحلة بناء المعارف

## 2 إتجاه تغير دالة

5د

❶ **المشتقة و إتجاه التغير**

**مبرهنة** — أضف إلى معلوماتك

- ✍ $f$ دالة قابلة للإشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$
- ✍ إذا كان من أجل كل $x$ من $D_f$ ، $f'(x)>0$ موجبة تماما على المجال $D_f$ فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على $D_f$ .
- ✍ إذا كان من أجل كل $x$ من $D_f$ ، $f'(x)<0$ موجبة تماما على المجال $D_f$ فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على $D_f$ .
- ✍ إذا كان من أجل كل $x$ من $D_f$ ، $f'(x)=0$ موجبة تماما على المجال $D_f$ فإن الدالة $f$ ثابتة على $D_f$ .

10د

مثال تطبيقي : الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)(x^2-4)^2$

✍ أدرس إتجاه تغير الدالة $f$

**الحل**

$f$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'$ حيث $f'(x)=2(2x)(x^2-4)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

مرحلة بناء معارف

الدالة $f$ متزايدة تماما على المجالين $[-2;0]$ و $]2;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $[0;2]$

**ملاحظة:**

✍ نقول أنّ الدالة $f$ رتيبة تماما على المجال $D_f$ ، إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما على المجال $D_f$

✍ تبقى هذه المبرهنة صحيحة إذا إنعدمت المشتقة من أجل قيم معزولة في المجال المذكور

5د

### مــــثال

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3$

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $3x^2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |

ومنه $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، لأن مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ مجموعة منتهية و هي $\{0\}$

التقويم

20د

**تطبيق** لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

**1** أدرس إتجاه تغير الدالة $f$ ، أحسب $f(-1)$ .

**2** شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ثم إستنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**3** بإستعمال سؤال 1 أدرس إتجاه تغير الدالة $g$ المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ $g(x) = \dfrac{1}{2} - 3x - \dfrac{4}{x}$

**الحل**

**1** دراسة إتجاه تغير الدالة $f$

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'$ حيث $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

جدول إشارة $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |



ومنه $f$ متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$

و متناقصة على المجال $[0;2]$

حساب $f(-1)$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 0$$

نهايات الدالة $f$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

**2** جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

• من جدول التغيرات $f$ نستنتج أنّ $f(2)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة $f$ و $f(0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة $f$

إشارة $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

### 3 دراسة إتجاه تغير الدالة $g$

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة $g'$ حيث : $g'(x) = x - 3 + \frac{4}{x^2}$ ومنه

$$g'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

إشارة $g'(x)$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-1;0[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$

ملاحظات حول سير الدرس

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : تطبيقات الإشتقاقية (تابع)

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة : قيم الحدية المحلية لدالة، نقطة إنعطاف
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق | | 10د |
| مرحلة بناء المعارف | | 10د |
| | | 5د |

## 1 القيم الحدية المحلية

**تعريف**

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0$ عدد حقيقي من $I$ .

✍ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة $f$ يعني أنه يوجد مجال مفتوح $I'$ محتوي في $I$ و يشمل $x_0$ بحيث من أجل كل $x$ من $I'$ : $f(x) \leq f(x_0)$

✍ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة $f$ يعني أنه يوجد مجال مفتوح $I'$ محتوي في $I$ و يشمل $x_0$ بحيث من أجل كل $x$ من $I'$ : $f(x_0) \leq f(x)$

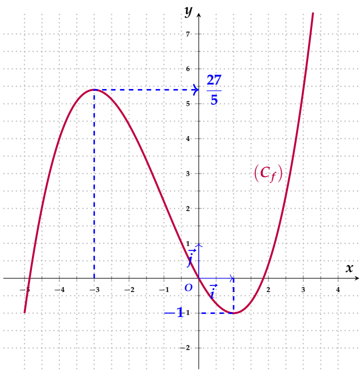
✍ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة يعني أن: $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى أو صغرى

**مثال**

لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3x^2 - 9x)$

تمثيلها $(C_f)$ موضح في الشكل المقابل

نلاحظ أنّ : $\frac{27}{5}$ هي قيمة حدية محلية عظمى للدالة عند $x_0 = -3$ و $-1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة عند $x_1 = 1$

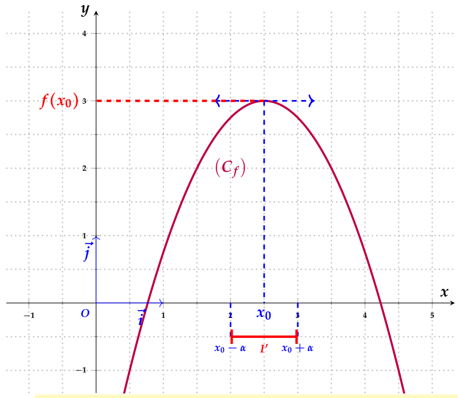



**مبرهنة**

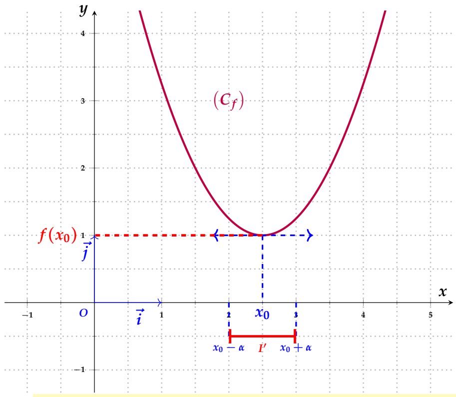
أضف إلى معلوماتك

✍ لتكن الدالة $f$ معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $I$ و $f'$ دالتها المشتقة .
إذا إنعدمت الدالة المشتقة $f'$ عند قيمة $x_0$ من $I$ مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح $I'$ محتوى في $I$ يشمل $x_0$.
تقبل فيه $f$ قيمة حدية $f(x_0)$ ، تسمى $f(x_0)$ قيمة حدية محلية .

مرحلة بناء معارف




من أجل كل $x$ من $I'$ : $f(x) \leq f(x_0)$




من أجل كل $x$ من $I'$ : $f(x_0) \leq f(x)$

5د

**ملاحظات :**

❶ النقطة $(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة حدية (الذروة) و المماس عند هذه النقطة موازيا لحامل محور الفواصل معادلته هي $y = f(x_0)$ .

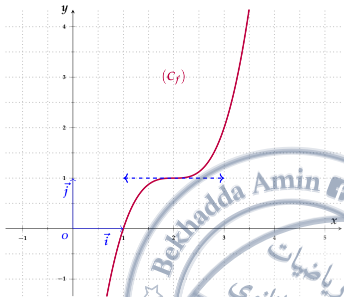
❷ إذا قبلت $f$ قيمة حدية محلية عند $x_0$ فإن: $f'(x_0) = 0$

5د

## 2 نقطة إنعطاف

**تعريف**

نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني




5د

**مبرهنـــة**

إذا إنعدمت الدالة المشتقة الثانية $f''$ عند $x_0$ مع تغير الإشارة فإن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها $x_0$.

إذا إنعدمت الدالة المشتقة الأولى $f'$ عند $x_0$ دون تغير الإشارة فإن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها $x_0$.

أضف إلى معلوماتك

5د

**مـــثال**

✍ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3$ مشتقتها الأولى تنعدم عند $x_0 = 0$ ولا تغير إشارتها
إذن النقطة $A\ (0; f(0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى $(C_f)$

✍ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ مشتقتها الثانية تنعدم عند $x_0 = 1$ وتغير إشارتها.
إذن النقطة $A\ (0; g(0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى $(C_g)$

التقويم

حل تمرين 67 صفحة 64 و تمرين 70 صفحة 65

15د

**ملاحظات حول سير الدرس**

✍ ..............................................................................................................
..............................................................................................................
..............................................................................................................

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

- **الأستاذ** : بخدة أمين
- **المستوى** : السنة ثالثة رياضيات
- **المدة** : 1 ساعة

- **الوحدة التعلمية:** الإشتقاقية و الإستمرارية
- **ميدان التعلم:** التحليل
- **موضوع الحصة** : التقريب التألفي

- **المكتسبات القبلية** : حساب مشتقة دوال المألوفة
- **الكفاءات المستهدفة** : توظيف المشتقات لحل مشكلات
- **المراجع** : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|

**مرحلة الإنطلاق**

**التهيئة النفسية**

التذكير بأحسن تقريب تألفي لدالة بجوار عدد الحقيقي $x_0$ .

**مرحلة بـــنـــاء المـــعـــارف**

## 1 التقريب التألفي

**خـــاصية** — أضف إلى معلوماتك

$f$ دالة معرفة على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$ .

إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $x$ من $I$ فإنه توجد دالة $\varepsilon$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $h$ حيث $x+h$ ينتمي إلى $I$ لدينا: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ .

من أجل $h$ قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لِـ $f(x+h)$ من أجل $h$ قريب من 0، المرفق بالدالة $f$ .

المدة: 10د

**البــرهــان**

ليكن $x_0$ من $I$ و لدينا $f$ قابلة للإشتقاق عند $x_0$ ومنه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

بوضع : $\varepsilon(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$ يكون لدينا: $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$

إذن: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\varepsilon(h)+f'(x_0)$ ومنه $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ ■

**مـــثال**

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$ .

بإستعمال التقريب التألفي للدالة $f$ لنحسب القيمة المقربة إلى $10^{-2}$ للعدد $f(1,0001)$ .

لدينا: $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$ ، $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ و $f'(1)=1$ .

ومنه $f(1,0001)=f(1+0,0001)\approx f(1)+0,0001f'(1)$ ومنه $f(1,0001)\approx -0,50$

المدة: 10د

*ملاحظة:* نضع $x=x_0+h$ أحسن تقريب تألفي للدالة $f$ يصبح كالتالي: $f(x)\approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ .

**مـــثال**

أحسن تقريب تألفي للدالة $x\mapsto\sqrt{x+1}$ بجوار 0 هي دالة تألفية $x\mapsto\dfrac{1}{2}x+1$ ونكتب : $\sqrt{x+1}\approx\dfrac{1}{2}x+1$ بجوار 0

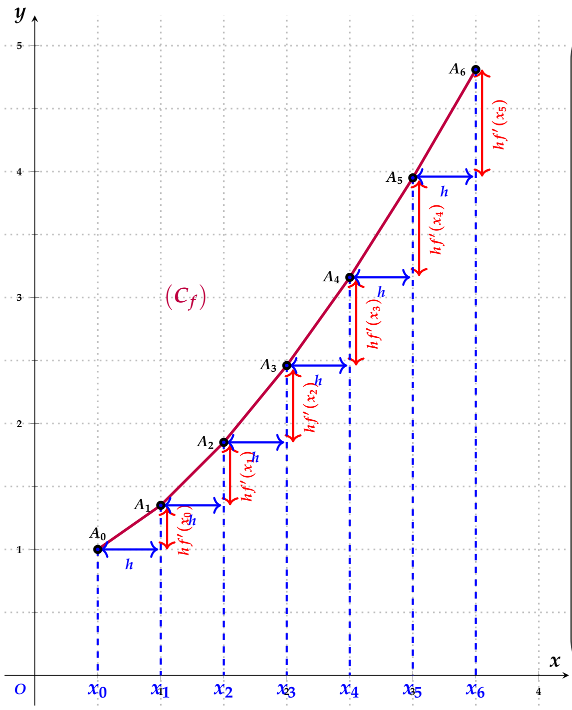
المدة: 5د

مرحلة بناء المعارف

15د

## طريقة اولر

تسمح طريقة أولر بانشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة $f$ بمعرفة $f'$ و $y_0 = f(x_0)$، ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة $f$ بحيث من أجل $h$ قريب من 0 لدينا : $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ انطلاقا من $A_0(x_0; f(x_0))$ ننشيء النقطة $A_1(x_1; f(x_1))$ حيث : $x_1 = x_0 + h$ و $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$ وبما أن $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ من أجل $h$ قريب من 0 فإن $A_1(x_1; f(x_1))$ قريبة من $C_f$ منحنى الدالة $f$ بنفس الطريقة يمكن إنشاء انطلاقا من النقطة $A_1$ النقطة $A_2(x_1+h, f(x_1)+hf'(x_1))$، وهكذا يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n, y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \succeq 1$، بربط النقط $A_0$ ، $A_1$ ، $A_2$،....، نحصل على تمثيل بياني تقريبي للدالة $f$ مرتبط بإختيار $h$ الذي يسمى الخطوة وكلما كانت الخطوة أقرب إلى الصفر نحصل على تمثيل أكثر دقة




التقويم

### الكتابة التفاضلية

بوضع $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ تكتب المساواة : $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + hg(h)$ كما يلي : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x g(\Delta x)$ومنه التقريب التآلفي : $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون $\Delta x$ قريبا من 0

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية : $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dy$

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية وبصفة عامة نكتب $\dfrac{df}{dx}$ بدلا من $f'$ و $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من $f''$ وهكذا $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$

20د

### تطبيق

أنشئ منحنى تقريبي بطريقة أولر للدالة $f$ على المجال $[0;5]$ حيث $f(1) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$

نختار مثلا الخطوة $h = 0,5$ و نقوم بمسح المجال $[0;5]$

لتكن $A_0(0;1)$ ولتكن $A_1$ النقطة ذات الإحداثيات $(0+0,5; f(0+0,5))$ أي $(0,5; f(0,5))$

لدينا: $f(0,5) \approx f(0+0,5) + 0,5f'(0) \approx 1 + 0,5(0) \approx 1$

ومنه $A_1(0,5;1)$

لتكن $A_2(0,5+0,5; f(0,5+0,5))$

$f(0,5+0,5) \approx f(0,5) + (0,5)f'(0,5) \approx 1,35$

ومنه : $A_2(1;1,35)$

لتكن $A_3(1,5; f(1,5))$

$f(1,5) = f(1+0,5) \approx f(1) + (0,5)f'(1) \approx 1,85$

ومنه : $A_3(1,5;1,85)$

لتكن $A_4(2; f(2))$

$f(2) = f(1,5+0,5) \approx f(1,5) + (0,5)f'(1,5) \approx 1,85$

ومنه : $A_4(2;2,46)$

لتكن $A_5(2,5; f(2,5))$

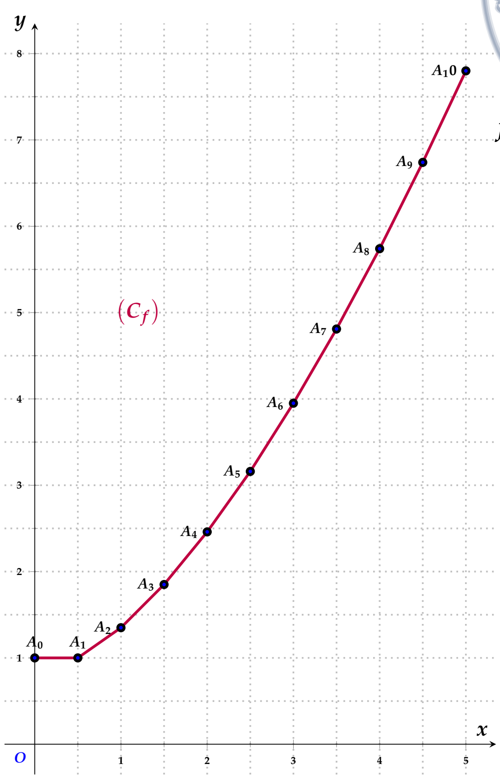
$f(2,5) = f(2+0,5) \approx f(2) + (0,5)f'(2) \approx 3,16$

ومنه : $A_5(2,5;3,16)$

لتكن $A_6(3; f(3))$

$f(3) = f(2,5+0,5) \approx f(2,5) + (0,5)f'(2,5) \approx 3,95$

ومنه : $A_6(3;3,95)$



لتكن $A_7(3,5;f(3,5))$ ، $f(3,5)=f(3+0,5)\approx f(3)+(0,5)f'(3)\approx 4,81$ ومنه : $A_7(3,5;4,81)$

لتكن $A_8(4;f(4))$ ، $f(4)=f(3,5+0,5)\approx f(3,5)+(0,5)f'(3,5)\approx 5,74$ ومنه : $A_8(4;5,74)$

لتكن $A_9(4,5;f(4,5))$ ، $f(4,5)=f(4+0,5)\approx f(4)+(0,5)f'(4)\approx 6,74$ ومنه : $A_9(4,5;6,74)$

لتكن $A_{10}(5;f(5))$ ، $f(5)=f(4,5+0,5)\approx f(4,5)+(0,5)f'(4,5)\approx 7,81$ ومنه : $A_{10}(5;7,81)$

**ملاحظات حول سير الدرس**

✍ ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

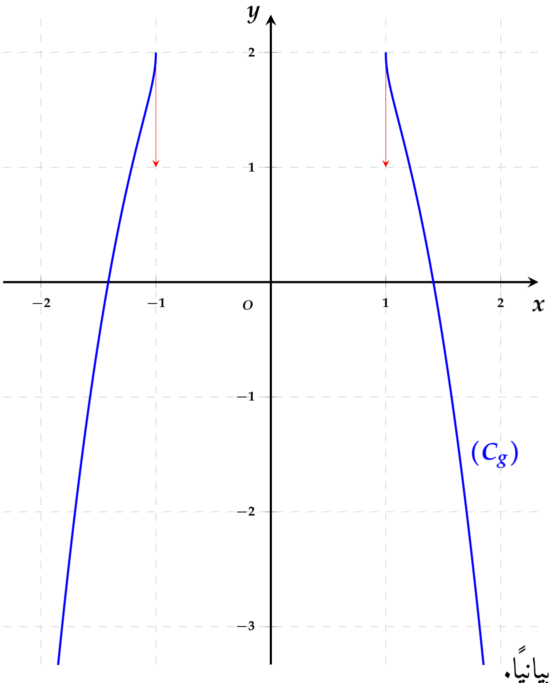
**الأستاذ :** بخدة أمين
**المستوى :** السنة ثالثة رياضيات
**المدة :** 2 ساعة

**الوحدة التعلمية:** الإشتقاقية و الإستمرارية
**ميدان التعلم:** التحليل
**موضوع الحصة :** دراسة دالة

**المكتسبات القبليـة :** مفاهيم أولية حول الدوال العددية
**الكفاءات المستهدفة :** دراسة إتجاه تغير دوال كثير الحدود، ناطقة ،الصماء
**المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

## دراسة دالة صماء (60 دق)

$I$) لتكن الدالة $g$ المعرفة على المجال $D = ]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$ .
$(C_g)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المقابل .




**1** أُحسب : $g\left(\sqrt{2}\right)$ و $g\left(-\sqrt{2}\right)$ .

**2** بقراءة بيانية :

(ا) عيّن : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

(ب) هل الدالة $g$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

(ج) هل الدالة $g$ قابلة للإشتقاق عند $1$ من اليمين ؟ برّر .

(د) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ .

$II$) لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$
بـ : $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$.
وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

**1**

(ا) اُدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند القيمة $1$ من اليمين وعند القيمة $-1$ من اليسار . فسّر النتائج بيانيًا.

(ب) أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

**2** بيّن أنه من أجل كل $x \in ]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ .

**3** أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$ .

**4** بيّن أن النقطة $I(0,1)$ هي مركز تناظر لـ $(C_f)$ .

**5** أنشئ $(C_f)$ .

## دراسة دالة كثيرة الحدود +ناطقة 60دق

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

**1** أُدرس تغيرات الدالة $g$ .

**2** بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا $\alpha$ في المجال $[-1;0]$ .

**3** عيّن إِشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ .

**4** بيّن أن : $\alpha^2 = -3 - \dfrac{4}{\alpha - 1}$ .

**الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$ .

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ( الوحدة $2\text{cm}$ )

**1** بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$$

◁ أُدرس تغيرات الدالة $f$ .

**2** بيّن أن : $f(\alpha) = \alpha - \dfrac{2}{\alpha^2 + 1}$ .

◁ استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$ باستعمال العدد $\alpha$ .

**3** عيّن الأعداد $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 + 1}$ .

أ) بيّن أنّ للمنحنى $(C_f)$ مستقيمًا مقاربًا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له .

ب) أُدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

**4** تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f''(x) = \frac{4(-3x^2 + 1)}{(x^2+1)^3}$$

◁ بيّن أن للمنحنى $(C_f)$ نقطتي انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتيهما.

**5** أُكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ عند النقطة التي فاصلتها $0$ .

◁ ماذا تستنتج بالنسبة للمماس $(T)$ والمستقيم $(\Delta)$ ؟

**6** أنشئ $(C_f)$ ، $(T)$ ، $(\Delta)$ و المستقيمات المقاربة.

**7** ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد واشارة حلول المعادلة :
$m(x^2 + 1) + 2 = 0$ .

**ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان**

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : السنة ثالثة رياضيات

المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : دراسة الدوال المثلثية

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة

الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$ ، $x \mapsto \cos(x)$ ، $x \mapsto a\sin(bx+c)$

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|

**مرحلة الإنطلاق**

**التهيئة النفسية**

التذكير بدوال cos ، sin ، tan و دساتير الجمع (10د)

❖ دراسة الدالة sin و الدالة cos

**1 نشاط مقترح** (40د)

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$

$(C_f)$ و $(C_g)$ التمثيلان البيانيان لـ $f$ و $g$ على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

✍ نقتصر دراسة الدالتين على المجال $[-\pi;\pi]$

1. إعتماداعلى الدائرة المثلثية حدد إشارة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$ .
2. (بإستعمال دساتير الجمع)
   - أدرس شفاعة الدالتين (فسرالنتيجة هندسيا)
   - أثبت أن $f$ و $g$ دوريتين و دورهما هو $2\pi$
3. أحسب $f'(x)$ و $g'(x)$.
4. إستنتج إتجاه تغير $f$ و $g$ على مجال $[0;\pi]$ ، ثم شكل جدول تغيرات $f$ و $g$
5. أنشئ $(C_f)$ و $(C_g)$ على مجال $[0;\pi]$ ثم إستنتج الإنشاء على المجال $[-\pi;0]$
6. إشرح كيف يتم إنشاء $(C_f)$ و $(C_g)$ على $\mathbb{R}$

**مرحلـــة بـنـــاء المـعـــارف**

**مناقشة النشاط** (30د)

**1** إشارة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$

| $x$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | |

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**2** دراسة شفاعة الدالتين

- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$

$$\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos(0)\cos(x) + \sin(0)\sin(x) = 1 \times \cos(x) + 0 \times \sin(x) = \cos(x)$$

ومنه $\cos(-x) = \cos(x)$ إذن الدالة cos دالة زوجية و منحناها البياني متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب

- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$

$$\sin(-x) = \sin(0-x) = \sin(0)\cos(x) - \sin(x)\cos(0) = 0 \times \cos(x) - \sin(x) \times 1 = -\sin(x)$$

ومنه $\sin(-x) = -\sin(x)$ إذن الدالة sin دالة فردية و منحناها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم

● إثبات أن الدالتين $f$ و $g$ دالتين دوريتين

● لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$\cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x) \times 1 - \sin(x) \times 0$

ومنه $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ إذن الدالة $\cos$ دورية و دورها $2\pi$

● لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$\sin(x+2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\sin(2\pi) = \sin(x) \times 1 + \cos(x) \times 0$

ومنه $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ إذن الدالة $\sin$ دورية و دورها $2\pi$

**3** ● الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'$ حيث : $f'(x) = \cos(x)$

● الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'$ حيث : $g'(x) = -\sin(x)$

**4** إستنتاج أتجاه تغير $f$ و $g$

● لدينا : $f'(x) > 0$ من أجل $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ و $f'(x) < 0$ من أجل $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0; \frac{\pi}{2}]$ و متناقصة تماما على المجال $[\frac{\pi}{2}; \pi]$

● لدينا : $g'(x) < 0$ من أجل $x \in [0; \pi]$ ومنه الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $[0; \pi]$

**جدول التغيرات**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

| $x$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ |

**5** التمثيل البياني

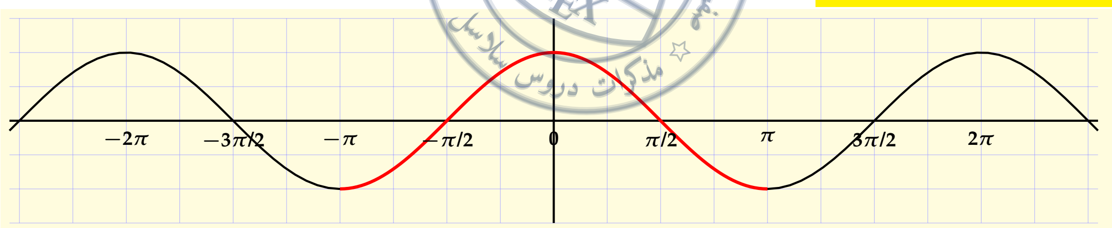
❖ الدالة $\cos$

✍ نشيء التمثيل البياني للدالة "$\cos$" على المجال $[0; \pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.

نتم هذا الرسم على المجال $[-\pi; 0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة "$\cos$" زوجية (الجزء الأحمر)

ومنه نستنتج بيان الدالة$\cos$ على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا :

$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$$



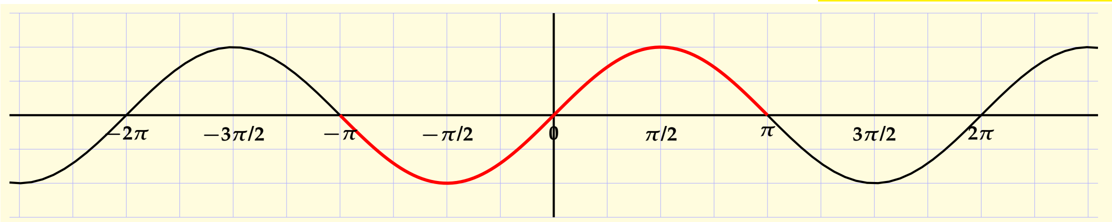

❖ الدالة $\sin$

✍ نشيء التمثيل البياني للدالة "$\sin$" على المجال $[0; \pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.

نتم هذا الرسم على المجال $[-\pi; 0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة "$\sin$" فردية (الجزء الأحمر)

ومنه نستنتج بيان الدالة"$\sin$" على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا :

$$\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$$



## ❖ دراسة الدالة tan

**تعريف**

الدالة ظل و التي نرمز إليها بالرمز " tan " معرفة بـ: $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ بحيث $x$ يختلف عن $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k$ عدد صحيح

30د

## خواص

❶ دراسة شفعية الدالة

من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k$ عدد صحيح

لدينا: $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$

ومنه الدالة ظل دالة فردية .

❷ لنبين أنّ الدلة دورية و دورها $\pi$

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\tan(x)$$

إذن tan دالة دورية و دورها $\pi$

❸ دراسة الدالة الظل

الدالة الظل دورية و دورها $\pi$ يكفي دراستها على $D_f\cap\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ أي يكفي دراستها على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

✍ الدالة الظل دالة فردية يكفي دراستها على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

- **دراسة الدالة على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$**

$$\tan(0)=\frac{\sin(0)}{\cos(0)}=0\quad;\quad \lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{2}$ مقارب للمنحى دالة الظل

- **مشتقة الدالة الظل**

الدالة الظل قابلة للإشتقاق على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ودالتها المشتقة $\tan'$ حيث:

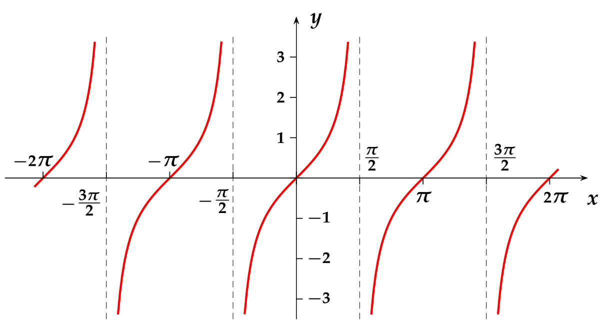
$$\tan'(x)=\frac{\cos(x)\cos(x)-(-\sin(x)\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

ومنه $\tan'(x)>0$ أي الدالة ظل متزايدة تماما على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

- **جدول تغيرات الدالة الظل**

| $x$ | $0$          $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|
| $\tan'(x)$ | $+$ |
| $\tan(x)$ | $0$ ↗ $+\infty$ |

- **التمثيل البياني للدالة الظل**




التقويم

20د

تطبيق : حل تمرين 95 صفحة 70

**ملاحظات حول سير الدرس**

✍ ............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

**ثانوية ساجي مختار السمار–غليزان**

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دراسة الدوال المثلثية(تابع)

المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$ ، $x \mapsto \cos(x)$ ، $x \mapsto a\sin(bx+c)$
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

| المراحل | عناصر الدرس | المدة |
|---|---|---|
| التقويم | **حل تمرين 95 صفحة 70** | 40د |

**1** أ) إثبات أنّ الدالة $f$ ورية دورها $2pi$.

من أجل كل $x$ و $x+2\pi$ من $\mathbb{R}$ يكون :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{1}{2}\cos 2(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}(2x+4\pi) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن: $f$ دورية ، دورها $T = 2\pi$

ب) إثبات أنّ محور التراتيب هو محور تناظر:

من أجل $x$ و $-x$ من $\mathbb{R}$ يكون :

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) + \cos(-x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos x = f(x)$$

إذن: الدالة $f$ زوجية و بالتالي $(C)$ يقبل محور تناظر معادلته : $x = 0$

**2** أ) تعين $f'(x)$

$f$ تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و يكون $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x)$

ب) لدينا: $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)(1 - 2\cos(x))$

ج) دراسة إشارة $f'(x)$ على $[0;\pi]$

$f'(x) = 0$ تكافئ : $\sin x = 0)$ أو $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = k\pi$ أو $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3}$ ومنه $x \in \left\{0;\frac{\pi}{3};\pi\right\}$ و يكون

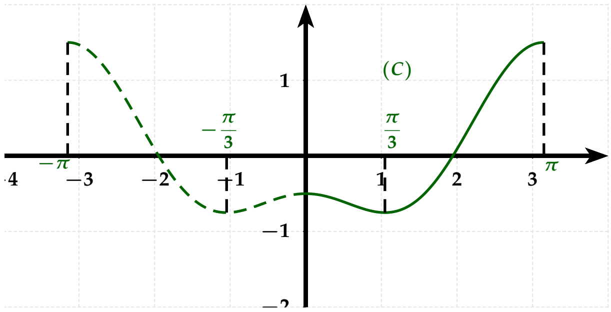
| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-2\cos x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\sin x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |

- جدول النغيرات

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$ |

**4** • رسم المنحنى على $[-\pi;\pi]$

نرسم $(C)$ على المجال $[0;\pi]$ ثم نأخذ نظيره بالنسبة لمحور التراتيب على المجال $[-\pi;0]$




يمكن رسم $(C)$ على $\mathbb{R}$ و ذلك بإستعمال الإنسحاب الذي شعاعه $k\pi\,\overrightarrow{i}$ .

## حل تمرين رقم 63

إثبات أنّ التسارع متناسب مع فاصلة المتحرك عند اللحظة $t$ .

لدينا: $x(t) = 3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ حيث $t \in [0;+\infty[$

فتكون السرعة اللحظية عند $t$ هي : $x'(t) = 3\left[-2\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] = -6\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

و التسارع هو : $x''(t) = -6\left[2\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] = -12\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

النتيجة : $x''(t) = -4\left[3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] = -4x(t)$ أي أن تسارع المترحك يكون متناسبا مع فاصلة المتحرك .

20د

تقويم

**ملاحظات حول سير الدرس**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................