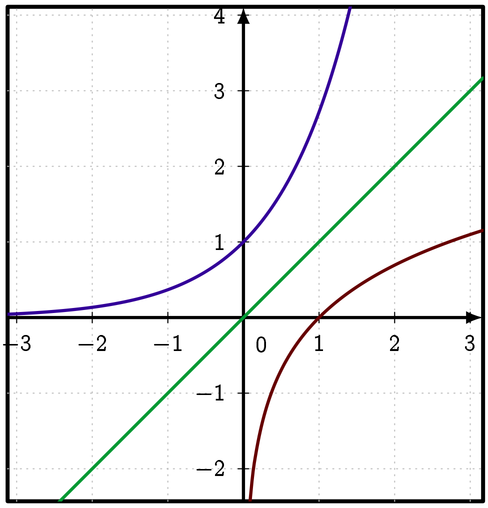
النهايات

4

الكفاءات المستهدفة



الكفاءات المستهدفة من خلال هذا المحور هي :

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية عند حدود
- حساب نهاية بإستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة و تركيب دالتين
- دراسة السلوك التقاربي لدالة

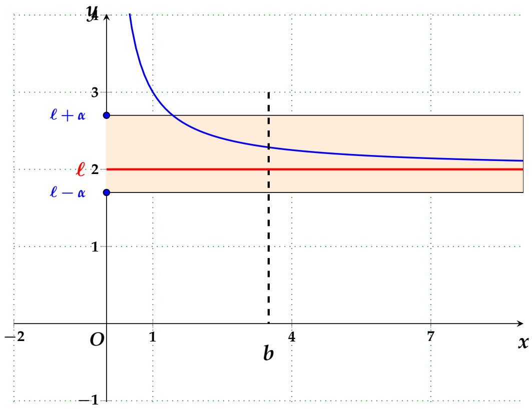
ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: النهايات
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة

- **المكتسبات القبلية :** مفاهيم أولية حول الــدوال العددية،
- **الكفاءات المستهدفة :** نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة ،و تفسير الهندسي لها
- **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق بنــاء معــــارف		10د 10د

نهاية منتهية عند مالانهاية



تعريف

f دالة معرفة على $]x_0,+\infty[$ و l عدد حقيقي القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

ملاحظة:

نحصل على نفس تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$

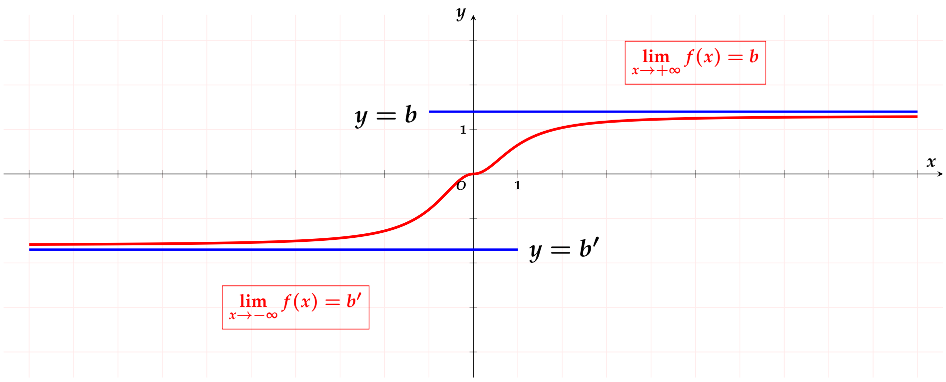
مثال

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

المستقيم المقارب الأفقي

نتيجة

نقول أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=\ell$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $-\infty$ أو عند $+\infty$



10د

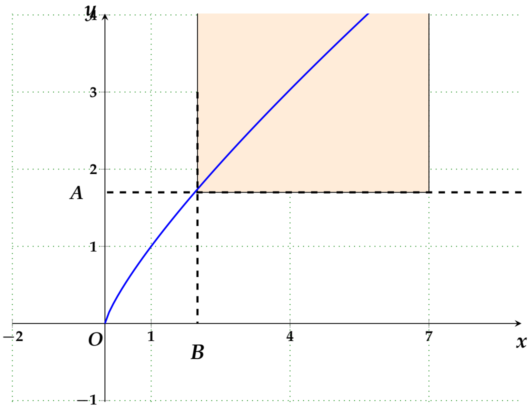
تطبيق

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$

✍ أثبت بإستعمال التعريف أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

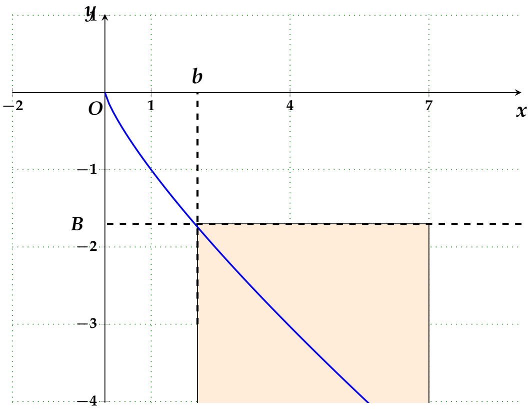
10



تعريف

f دالة معرفة على $]x_0,+\infty[$ القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل عدد A، مجال $]A,+\infty[$ و $A\in\mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

10



تعريف

f دالة معرفة على $]x_0,+\infty[$ القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال $]-\infty;B[$ و $B\in\mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي من ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

معارف

ملاحظة

نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$

مثال

التقويم

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

20د

تطبيق

f دالة معرفة على $]3;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x-6}$

✍ أثبت بإستعمال التعريف أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تطبيق

نعتبر الدالة h المعرفة على على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=-3+\dfrac{4x-1}{2x+2}$، وليكن (C_g) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

✍ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$

ملاحظات حول سير الحصة

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- **الأستاذ :** بخدة أمين
- **المستوى :** السنة ثالثة رياضيات
- **المدة :** 1 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** النهايات
- **ميدان التعلم:** التحليل
- **موضوع الحصة :** نهاية دالة عند عدد

- **المكتسبات القبليـة :** مفاهيم أولية حول الــدوال العددية،
- **الكفاءات المستهدفة :** حساب نهاية عند عدد
- **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الإنطلاق

بناء معارف</td><td>

1 نشاط مقترح

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+3$
نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2

1 ضع تخمينا لسلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2 .

2 في أي مجال يجب إختيار x بحيث $f(x)$ تنتمي إلى $]6,99;7,01[$ ؟

3 α عدد حقيقي حيث : $0<\alpha<1$

- في أي مجال يجب إختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]7-\alpha;7+\alpha[$.
- علما أننا نختار α صغير بالقدر الذي نريد، ماذا تستنتج ؟

نهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف

x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0
نقول أن نهاية الدالة f هي ℓ لما xيؤول إلى x_0 إذا كان من اجل كل عدد حقيقي موجب A ، يوجد عدد حقيقي B ، بحيث إذا كان : $|x-x_0|<B$ فإن : $|f(x)-\ell|<A$
أي يمكن جعل $f(x)$ أقرب من أي عدد حقيقي إلى ℓ إذا كان x قريبا بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$

مـــثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-3$
✍ بإستعمال التعريف أثبت أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

</td><td>10د

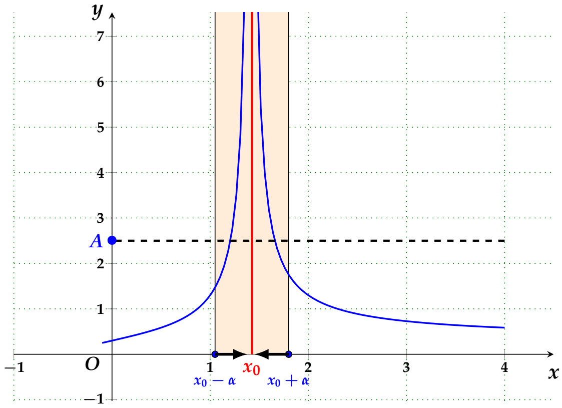
5د

5د</td></tr>
</table>

نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

بنـــاء معارف

10د



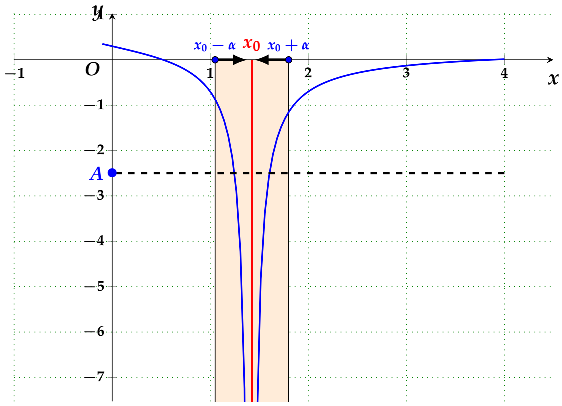
تعريف

x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0)
نقول أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من أجل كل عدد حقيقي A ، المجال $[A,+\infty[$ يضم كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب عند ئذ: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
عندما يقترب x من 0 بالقدر الكافي ، تأخذ $f(x)$ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد ، عندئذ يكون لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

10د



تعريف

x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة في جوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0)
نقول أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما x يؤول إلى x_0 إذا كان من أجل كل عدد حقيقي A ، المجال $]-\infty,A[$ يضم كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب عند ئذ: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

المستقيم المقارب العمودي

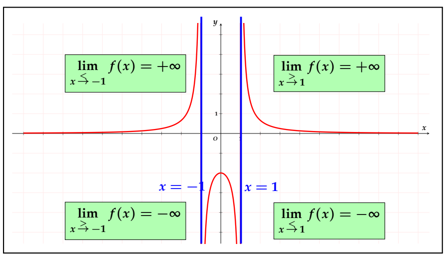
10د

نتـــيجة

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $x=a$
القول أنّ المستقيم (Δ) مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) يعني أن الدالة f عند a (من اليمين أو من اليسار) هي $+\infty$ أو $-\infty$

مثال

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني



لدينا:

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=-\infty$

إذن للمنحى (C_f) مستقيمين مقاربين ذا المعادلة $x=1$ و $x=-1$

تقييم

تطبيق

1 بإستعمال التعريف أثبت أن : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2} = +\infty$

2 أحسب في كل حالة النهايات التالية و فسر النتيجة هندسيا

❶ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} \dfrac{2x-9}{x-4}$ ❷ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} \dfrac{2x-9}{(x-4)^2}$ ❸ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-9}{x^2-4}$ ❹ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{\sqrt{3-x}}{3-x}$

10د

تمرين منزلي

حل تمرين 13 و 14 و 16 صفحة 27

مـــلا حظات حول سير الحصة

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : العمليات على النهايات

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الــدوال العددية، العمليات على الدوال المشتقة
الكفاءات المستهدفة : عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيّن.
المراجع : الكّتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**ملاحظات**	

ملاحظات

- يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.
- إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto sinx$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

5د

بنــاء معــارف

مبرهنات أولية على النهايات

f و g دالتان و α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية.

نهاية مجموعة دالتين

5د

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين

5د

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	$L \succ 0$	$L \succ 0$	$L \prec 0$	$L \prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)\times g(x)]$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين

5د

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	$L'\succ 0$	$L'\succ 0$	$L'\prec 0$	$L'\prec 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

5د

ملاحظة:

- تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : " عدم التعيين (ح ع ت)"
- توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $+\infty-\infty ; 0\times\infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}$

نهايات بعض الدوال الشهيرة

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x}=+\infty$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1}{x}=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0^+$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0^+$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=+\infty$

5د

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ (لما n زوجي)

$\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ (لما n فردي)

إزالة حالات عدم التعيين

لإزالة حالات عدم التعيين عند وجودها نتبع مايلي :

5د

- بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة .

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to-\infty}=3x^2-2x+3$ 2) $\lim_{x\to-\infty}-3x^3+4x+6$

- بالنسبة لدوال ناطقة عندماx يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط و المقام .

أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x-x^2}{x^3-1}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+2x}{x^3-+6}$

- بالنسبة لدوال الجذرية عندماx يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب و نقسم في المرافق .

أحسب النهايات التالية :

30د

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 2) $\lim_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ 3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$ 5) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+2x-2$ 6) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+x-2$

7) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}$ 8) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ 8) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

- بالنسبة لحالات عدم التعيين عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك أو العدد المشتق

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ 2) $\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}$ 3) $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{x^2-1}{x-1}$ 4) $\lim_{x\overset{>}{\to}5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\frac{x}{5}-1}$

التقويم

تطبيق

تمرين 18 و 19 و 24 صفحة 26

ملاحظات حول سير الحصة

....

....

....

معارف

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

نستعمل طريقة التحليل :
وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = |x|\sqrt{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

تطبيق القاعدة التالية :
عند اللانهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha x + \beta$

- $\sqrt{a} = |\alpha|$: نستعمل طريقة المرافق
- $\sqrt{a} \neq |\alpha|$: نضع x كعامل مشترك

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

- $a \neq \alpha$: نستعمل طريقة المرافق
- $a = \alpha$: نضع x كعامل مشترك

$f(x) = \sqrt{ax+b} + \alpha x + \beta$: نضع x كعامل مشترك

نستعمل طريقة المرافق

نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نستعمل طريقة الإختزال :
❶ نحلّل البسط والمقام.
❷ ثم نختزل على $(x-a)$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

نستعمل طريقة المرافق :
❶ نضرب : $f(x) \times \frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$
❷ ثم نختزل على : $(x-a)$

المقام من الشكل $(\alpha x+\beta)$

نستعمل طريقة العدد المشتق :
❶ إظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$$\frac{\ldots\ldots}{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

❷ $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين	الوحدة التعلمية: النهايات
المستوى : السنة ثالثة رياضيات	ميدان التعلم: التحليل
المدة : 1 ساعة	موضوع الحصة : السلوك التقاربي لمنحنى دالة

المكتسبات القبلية : دراسة الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة : تبرير ان مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب ، البحث عن مستقيم مقارب مائل .
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية	
	1 نشاط مقترح لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و P نقطة من المستقيم (Δ) فاصلتها x **1** أحسب المسافة MP **2** أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$ **3** ارسم المنحنى (C_f) و (Δ) في نفس المعلم، ماذا تلاحظ.	15د
بنـــاء معـــارف	**خـــاصية** ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ حيث $(a\neq 0)$. القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ يعني $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	5د
	ملاحظة إذا كانت f دالة بحيث $f(x)=(ax+b)+g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ نفس الملاحظة عنـــــــــد $(-\infty)$.	
	الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ وليكن في نفس المستوي المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y=ax+b$ لمعرفة وظعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x)-(ax+b)$ ثم ندرس إشارته أي ☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل ☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل ☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان	5د

البحث عن المستقيم المقارب المائل

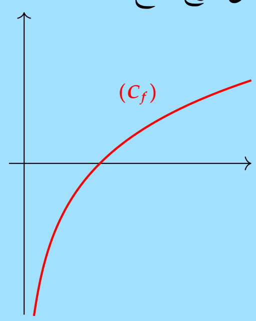
إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$

ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه (xx')

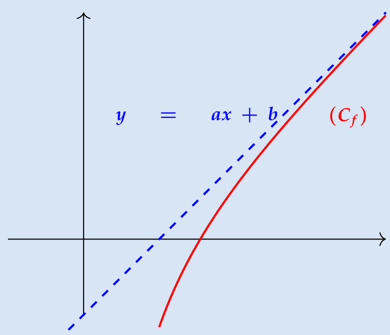


$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$

ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax]$

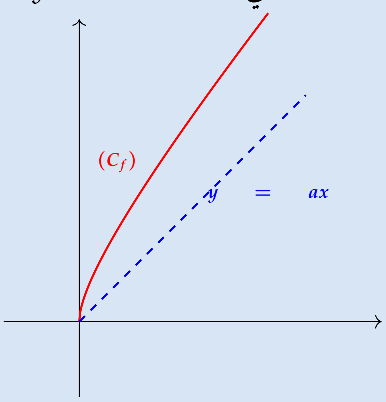
$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞



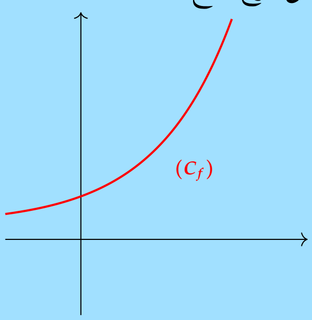
$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y = ax$



$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه (yy')



نتائج:

f و g دالتان معرفتان بجوار $\pm\infty$ ، نضع (C_f) و (C_g) التمثيلات البيانية لهما على الترتيب .

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ فإن المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$.

التقويم	**تطبيـــــق** نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. **1** بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ ، ثم إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$. **2** بيّن أنّ: $[f(x)+2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$ **3** بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f(x)>0$ ، ثم إستنتج إشارة $[f(x)+2x]$ ، فسر النتائج بيانيا . **4** نقبل أنّ الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، أرسم (C_f) و مستقيمه المقارب المائل. ملاحظات حول سير الحصة	30د

مــذكــرة رقـــم 05

الأستاذ :بــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: النهايات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : العمليات على النهايات

المكتسبات القبلية : عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيّن.
الكفاءات المستهدفة : حساب النهايات بإستعمال المقارنة أو الحصر و مركب دالتين.
المراجع : الكتاب المدرسي،الأنترنت

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الإنطلاق

بناء معــــارف</td><td>
التهيئة النفسية
تذكير بطرائق إزالة حالة عد التعين
نهاية مركب دالتين

مبرهنة ❶ — أظف إلى مطويتك
نعتبر f،v،u ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، ولتكن a ، b و c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$
إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ فإن: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

مـــــثال
أحسب النهايات التالية :
❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x-1}{x}}$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3-3x+2\right)^2$ ❸ $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\pi-2x\right)$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة ❷ — أظف إلى مطويتك
f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $f(x) \geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

مـــــثال
أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن : $x+\cos(x) \geq x-1$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos(x)$

مبرهنة ❸ — أظف إلى مطويتك
f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و $f(x) \leq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
</td><td>10د

10د

10د</td></tr>
</table>

التقويم

مـــثال

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $-x-\cos(x) \leq 1-x$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} -x-\cos(x)$

10د

مبرهنة ❹ — أظف إلى مطويتك

f ، g و h دوال معرفة على D من $\mathbb{R}$ و ليكن a و ℓ عددان حقيقيان إما منتهيان أو $+\infty$ أو $-\infty$
إذا كان : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ حيث : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

مـــثال

f دالة معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x+\sin(x)}{2x+1}$

✍ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\frac{1}{2}$ فإن: $\dfrac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{2x+1}$

✍ إستنتج: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

تطبيق

20د

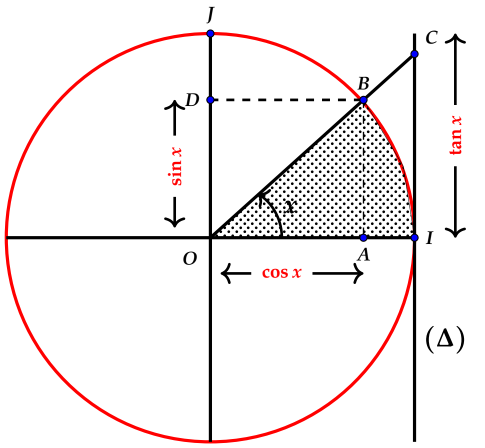
1 أحسب النهايات :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ ❷ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \left(2+x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ❸ $\lim\limits_{x\to0} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3\sin(x)$ ❺ $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

تطبيق

40د



في هذا الرسم ، B نقطة من الدائرة المثلثية المرفقة بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ ، A و D المسقطان العموديان للنقطة B على محوري المعلم.
C نقطة تقاطع المستقيم (OB) مع المماس (Δ) للدائرة في النقطة $I(1;0)$
نعلم أن مساحة القرص هي : πr^2 ، إذن ماهي مساحة جزء من القرص زاويته x (الجزء المضلل)

$\begin{cases} 2\pi \to \pi r^2 \\ x \to S_x \end{cases}$ ومنه $S_x = \dfrac{x\pi r^2}{2\pi} = \dfrac{1}{2}xr^2$ نعلم أن $r=1$

ومنه $S_x = \dfrac{x}{2}$

واضح من الشكل أن $S_{OAB} \leq S_x \leq S_{OCI}$ من أجل $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

1 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

2 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$: $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

3 إستنتج : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{sin(x)}{x}$

4 أثبت أن $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{cos(x)-1}{x} = 0$

5 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ أن : الدالة المشتقة للدالة $x :\to \cos(x)$ هي الدالة $x :\to -sin(x)$
و الدالة المشتقة للدالة $x :\to \sin(x)$ هي الدالة $x :\to \cos(x)$

مناقشة تطبيق

1 لدينا : $S_{OAB} = \dfrac{OA \times AB}{2} = \dfrac{sin(x)\cos(x)}{2}$ ، $S_x = \dfrac{x}{2}$ ، $S_{OIC} = \dfrac{IC \times OI}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$

إذن $S_{OAB} \leq S_x \leq S_{OCI}$ تكافئ $\dfrac{\sin(x)\cos(x)}{2} \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\tan(x)}{2}$ تكافئ $sin(x)\cos(x) \leq x \leq \tan(x)$

تكافئ $\cos(x) \leq \dfrac{x}{\sin(x)} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$ تكافئ $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

2 من أجل $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$ فإن: $-x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\cos(-x) \leq \dfrac{\sin(-x)}{-x} \leq \dfrac{1}{\cos(-x)}$ تكافئ

$$\cos(x) \leq \frac{-\sin(x)}{-x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

أي $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

3 إستنتاج أن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

لدينا: $\cos(x) \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) \leq \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} \leq \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos(x)}$ تكافئ

$$1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

4 إثبات أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} \times \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x} \times \frac{1}{\cos(x)+1}\\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)+1}\\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\\
&= -1 \times 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

5 إثبات أن مشتق الدالة $x :\to \cos(x)$ هي الدالة $x :\to -\sin(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\left(\cos(h)-1\right)-\sin(x)\sin(h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right]\\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

إثبات أن مشتق الدالة $x :\longrightarrow \sin(x)$ هي الدالة $x :\longrightarrow \cos(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\left(\cos(h)-1\right)+\cos(x)\sin(h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right]\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

النهايات المثلثية

❶ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ ❷ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$ ❸ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ ❹ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\alpha x)}{\tan(\beta x)}=\frac{\alpha}{\beta}$

❺ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$ ❻ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

تطبيق

أحسب النهايات التالية :

❶ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$ ❷ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\cos(x)}$ ❸ $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin(x)}{\tan(x)}$ ❹ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}$

20د

مـــلا حظات حول سير الحصة

....

....

....