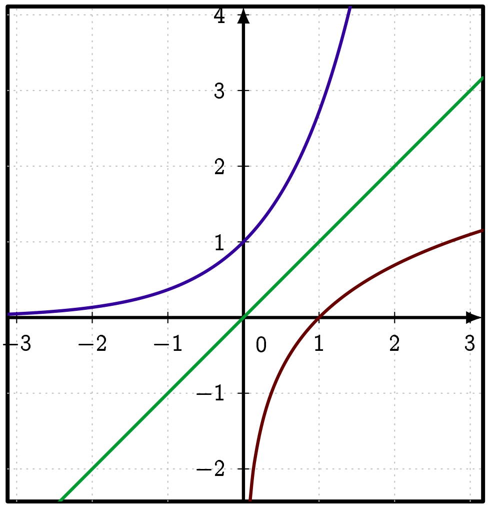
1

الدالة الأسية

الكفاءات المستهدفة



الكفاءات المستهدفة من خلال هذا المحور هي :

- تعريف الدالة الأسية
- مشتقة الدالة الأسية
- الدوال الأسية من الشكل $x \mapsto e^{kx}$

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دالة الأسية

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الـدوال العددية، العمليات على الدوال المشتقة، تقريب أولر
الكفاءات المستهدفة : التعرف على الدالة الأسية النيبيرية وخواصها.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بناء المعارف	(انظر أدناه)	50د

مناقشة نشاط 1 صفحة 75

1 إنشاء تمثيل تقريبي للدالة f بإستعمال طريقة اولر نضع : $h = 0,5$

لدينا: $f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$

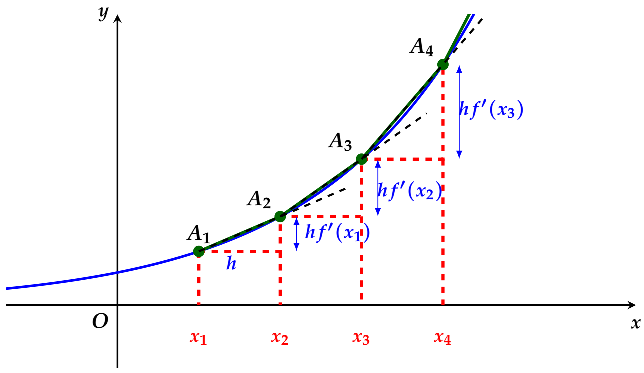
ونعلم أنّ: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ ومنه نجد $y_1 = f(x_0) + hf(x_0)$ أي $y_1 = y_0(1+h)$

و $y_2 = y_1(1+h)$ و $y_3 = y_2(1+h)$ ومنه $y_n = y_{n-1}(1+h)$

إذن الفواصل متتالية النقط $M_n\ (x_n; y_n)$ تشكل حدود متتالية حسابية أساسية $r = h$

و تراتيبها تشكل حدود متتالية هندسية أساسها $q = h + 1$

x_n	0	0,5	1	1,5	2
y_n	1	1,64	2,71	4,48	7,38



خواص الدالة f

2 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x)f(-x)$

- تبيان أنّ h ثابتة على $\mathbb{R}$

✍ الدالة h ثابتة معناه $h'(x) = 0$

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة h' حيث :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)\left[-f'(-x)\right] \\ &= f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) \\ &= f(x)f(-x) - f(-x)f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه h ثابتة على $\mathbb{R}$

إستنتاج أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f(x)f(-x) = 1$

لدينا: $h(x) = h(0) = f(0) \times f(-0) = 1$ ومنه من أجل كا x من $\mathbb{R}$: $h(x) = 1$ ، إذن $f(x) \times f(-x) = 1$

- لنبرهن بالخلف أنّ $f(x) \neq 0$

نفرض أنّ $f(x) = 0$ من أجل $x \in \mathbb{R}$ ومنه $f(-x) = 0$ ومنه $f(-x) \times f(x) = 0$

و هذا تناقض مع $f(-x) \times f(x) = 1$ ، إذن $f(x) \neq 0$

3 نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g' = g$ و $g(0) = 0$، بماأن f لا تنعدم على $\mathbb{R}$، نعتبر الدالة k المعفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

- **تبيان أنّ الدالة k ثابتة على $\mathbb{R}$**

k قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة k' حيث

$$k(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[f(x)]^2} = \frac{g(x)f(x) - f(x)g(x)}{[f(x)]^2} = 0$$

ومنه k ثابتة علي $\mathbb{R}$

- **الإستنتاج أنّ: $f(x) = g(x)$**

k ثابة علي $\mathbb{R}$ و لدينا: $k(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ ومنه $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ ومنه $g(x) = f(x)$

نستنتج أنّ الدالة f دالة وحيدة .

4 ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت ، نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $i(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(y)}$

- **تبيان أنّ: i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$**

الدالة i قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة i' حيث

$i'(x) = \dfrac{f'(x+y)f(x) - f'(x)}{[f(x)]^2} = \dfrac{f(x+y)f(x) - f(x)f(x+y)}{[f(x)]^2} = 0$ ومنه i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$

- **إثبات أن $i(x) = f(y)$**

لدينا $i(x) = i(0) = \dfrac{f(y)}{f(0)} = f(y)$ ومنه $i(x) = f(y)$

- **إثبات أنّ: $f(x+y) = f(x)f(y)$**

لدينا : $i(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$ و $i(x) = f(y)$ ومنه $f(x+y) = f(x)f(y)$

- **إثبات أنّ: $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$**

لدينا : $f(x-y) = f(x+(-y)) = f(x)f(-y)$

بماأن $f(y)f(-y) = 1$ فإن $f(-y) = \dfrac{1}{f(y)}$ ومنه $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

5 ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $j(x) = \dfrac{f(nx)}{[f(x)]^2}$

- **إثبات أنّ j دالة ثابتة**

الدالة j قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة j' حيث :

$$\begin{aligned}
j'(x) &= \frac{(f(nx))' \times [f(x)]^n - ([f(x)]^n)' \times f(nx)}{(f(x))^n} \\
&= \frac{nf'(nx) \times [f(x)]^n - nf'(x)\,[f(x)]^{n-1} \times f(nx)}{(f(x))^{2n}} \\
&= \frac{nf'(nx) \times [f(x)]^n - nf(x)\,[f(x)]^{n-1} \times f(nx)}{(f(x))^{2n}} \\
&= \frac{n\,[f(x)]^n\,(f'(nx) - f(nx))}{[f(x)]^{2n}} \\
&= \frac{n\,(f'(nx) - f(nx))}{[f(x)]^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

إذن الدالة j دالة ثابتة على $\mathbb{R}$

- **إستنتاج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(nx) = [f(x)]^n$**

من أجل كل عدد حقيقي x: $j(x) = j(0) = \dfrac{f(0)}{[f(0)]^n} = 1$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $j(x) = 1$ أي $\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n} = 1$ ومنه $f(nx) = [f(x)]^n$

تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f(0) = 1$، $f' = f$ الدالة الأسية النيبرية و نرمز لها بالرمز EXP

1 الدالة الأسية

مبرهنة و تعريف

توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f' = f$ و $f(0) = 1$ نرمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp"
ونسميها الدالة الأسية النيبيرية
✍ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = exp(x)$ وتقرء أسية x

5د

ملاحظة: الدالة الأسية هي حل خاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ التي تحقق $y(0) = 1$

❶ خواص الدالة الأسية

10د

خاصية : الدالة الأسية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $exp'(x) = exp(x)$

خاصية : الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$ و $exp(0) = 1$

خاصية : الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$ أي من أجل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $exp(x) > 0$

البـرهـان

نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0;c]$
من أجل كل عدد حقيقي x $(*)$ $exp(x) \neq 0$
الدالة exp مستمرة على $\mathbb{R}$
بفرض وجود عدد حقيقي c حيث $exp(0) \cdot exp(c) < 0$ يعني $exp(x) = 0$ تناقض ■

❖ خواص جبرية

5د

❶ $exp(x) \neq 0$ ❷ $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$ ❸ $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$

❹ $exp(x-y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}$ ❺ $exp(nx) = [exp(x)]^n$

❷ العدد e والترميز e^x

5د

✍ العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e = exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e \approx 2.718281828$.
✍ من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $exp(n) = exp(n \times 1) = [exp(1)]^n$
✍ لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $exp(n) = e^n$.
✍ اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $exp(x)$ بـِ e^x .

✍ كتابة الخواص السابقة بإستعمال الترميز الجديد

5د

❶ $e^x \neq 0$ ❷ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ ❸ $e^{x+y} = e^x \times e^y$

❹ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ ❺ $e^{nx} = (e^x)^n$ ❻ $e^0 = 1$ ❼ $(e^x)' = e^x$

مثال

10د

بسط العبارات التالية : $a = (e^x)^3 \times e^{-5x} \times e^{2x}$ $b = \dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x} \times e^2}$ $c = \dfrac{e^{2x} + e^x}{e^{2x}}$

$$a = (e^x)^3 \times e^{-5x} \times e^{2x}$$
$$= e^{3x} \times e^{-5x} \times e^{2x}$$
$$= e^{3x-5x+2x}$$
$$= e^0$$
$$= 1$$

$$b = \frac{e^{2x+3}}{e^{2x} \times e^2}$$
$$= \frac{e^{2x+3}}{e^{2x+2}}$$
$$= e^{2x+3} \times e^{-(2x+2)}$$
$$= e^{2x+3-2x-2}$$
$$= e$$

$$c = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{e^x}{e^{2x}}$$
$$= 1 + e^{-x}$$

15د

تطبيق

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

✍ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن: $f(-x) = 1 - f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$1 - f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x - e^x + 1}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$$

إذن $f(-x) = 1 - f(x)$

نتيجة : نستنتج أنّ النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحى (C_f)

15د

تمرين محلول

: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

❶ بين أن الدالة f فردية.

❷ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

الحل

❶ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} = \dfrac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = -\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$ ، إذن الدالة دالة فردية

❷

$$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2} = \frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}$$

$$= \frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}} = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$$

ومنه $\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2} = \dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)} = \dfrac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)} = f(2x)$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

تمرين منز لـــــــ $\{2-3\}$ ــــــــي صفـــــ $\{102\}$ ـــحة

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين	**الوحدة التعلمية:** الدوال الأسية
المستوى : السنة ثالثة رياضيات	**ميدان التعلم:** التحليل
المدة : 2 ساعة	**موضوع الحصة :** دراسة الدالة الأسية

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الـدوال العددية، العمليات على الدوال المشتقة، تقريب أولر

الكفاءات المستهدفة : التعرف على الدالة الأسية النيبيرية وخواصها.

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** تذكير بقواعد الحساب في الدالة الأسية	
مرحلة بناء المعارف	**1 دراسة الدالة الأسية** **اتجاه تغير الدالة الأسية** : **خاصية ❶** (أضف إلى معلوماتك) من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ **البرهان** : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ ■	10د
	خاصية ❷ (أضف إلى معلوماتك) الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ **البرهان** من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $exp'(x) = e^x > 0$ ومنه e^x متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ■ **نتائج** من أجل كل عددين حقيقين a و b لدينا : • $e^a > e^b$ يعني أن $a > b$ • $e^a = e^b$ يعني أن $a = b$	10د
	حالة خاصة من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : • $e^x > 1$ يعني $e^x > e^0$ يعني $x > 0$ • $e^x < 1$ يعني $e^x < e^0$ يعني $x < 0$ • $e^x = 1$ يعني $e^x = e^0$ يعني $x = 0$	10د

مرحلة بناء معارف

10د

خاصية ❸

أضف إلى معلـوماتك

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

البـرهـان

❶ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - x$

لدينا من أجل x من $[0;+\infty[$: $f'(x) = e^x - 1$ و بما أن: من أجل x من $[0;+\infty[$: $e^x \geq 1$ فإن: $f'(x) \geq 0$

ومنه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0) = 1$.

إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) > 0$ أي $e^x > x$

لدينا: $\lim\limits_{x \to \infty} x = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$

❷ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$

نضع $y = -x$ إذن لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن y يؤول إلى $+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{y \to +\infty} = 0$ ■

5د

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
$exp(x)$	0	1 ↗	$+\infty$

15د

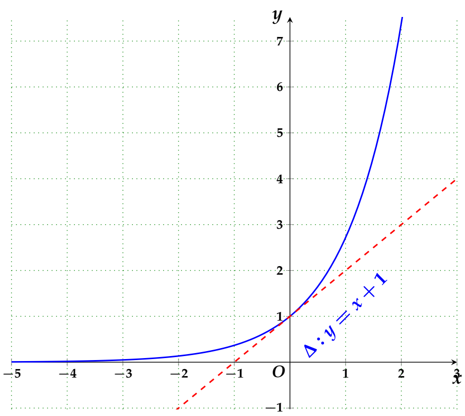
التمثيل البياني

• المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل حامل محورالفواصل كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى $-\infty$

• لدينا $exp'(0) = exp(0) = 1$ إذن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $y = x + 1$ معادلة له

• من تعريف العدد المشتق لدينا $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{0+x} - e^0}{x}$

إذن: $exp'(0) = 1$: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$



نتيجة

الدالة $x \mapsto x + 1$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0 .

أي من أجل كل x قريب من 0 لدينا : $e^x \approx x + 1$

التقويم

25د

تطبيق

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)}$ و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث : $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 أحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$.

3 أدرس إتجاه تغير الدالة f.

4 أرسم المستقيمات المقاربة للمنحى (C_f).

2 تطبيقات المعادلات و المتراجحات

التقويم

10د

طريقة

المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$

المتراجحة $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تعني $u(x) < v(x)$

ملاحظة

مجموعة تعريف المعادلة أو المتراجحة هي : $D_v \cap D_u$

25د

تطبيق

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

❶ $e^{2x} = 1$ ❷ $e^{x} = e^{-2x}$ ❸ $e^{-x^2} = \frac{1}{e}$ ❹ $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$ ❺ $e^{3x} < 1$ ❻ $e^{x+1} > e^{-\frac{2}{x}}$

❼ $e^{2x} > 2e^{x} - 1$ ❽ $e^{2x} > 2 - e^{x}$ ❾ $e^{7x} + 5 = 0$

تمرين منزلي

ليكن (C) منحى ممثل لدالة $x \mapsto e^{x}$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

ولتكن $M\left(m, e^{m}\right)$ نقطة من (C) ، وليكن $\mathbb{T}$ مماس للمنحنى (C) في النقطة M

1. أحسب ميل المماس في النقطة M ، ثم أكتب معادلته
2. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x} - e^{m}(x - m + 1)$
   - أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها
3. إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$
4. إستنتج الوضع النسبي بين (C) و جميع مماساته.

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : الدوال الأسية : $x \mapsto e^{kx}$

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الــدوال العددية، العمليات على الدوال المشتقة، تقريب أولر
الكفاءات المستهدفة : التعرف على الدالة الأسية النيبيرية وخواصها.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بـنـاء المعـارف	(انظر أدناه)	15د / 15د

مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية

تذكير بقواعد الحساب في الدالة الأسية

1 حـل المعادلة : $f' = kf$

مبرهنة و تعريف

توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f' = kf$ و $f(0) = 1$ هي الدالة $x \longmapsto e^{kx}$

(15د)

مرحلة بـنـاء المعـارف

البـرهـان

الوجود

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$
الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$ كما أن $f(0) = e^0 = 1$
وبالتالي الدالة f تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$

الوحدانية

نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g' = kg$ و $g(0) = 1$، نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$، الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{kg(x)f(x) - g(x)kf(x)}{[f(x)]^2} = 0$$ إذن h ثابتة على $\mathbb{R}$

مع $h(0) = \dfrac{g(0)}{e^0} = 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = 1$ وعليه $f(x) = g(x)$
إذن الدالة f موجودة ووحيدة. ■

مــــثال

(15د)

1 عيّن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f'(x) - 2f(x) = 0$.

2 من بين الدوال f $f'(x) - 2f(x) = 0$ عين تلك منحانها البياني يمر من النقطة $A\left(\dfrac{1}{2}; e^2\right)$

الحل

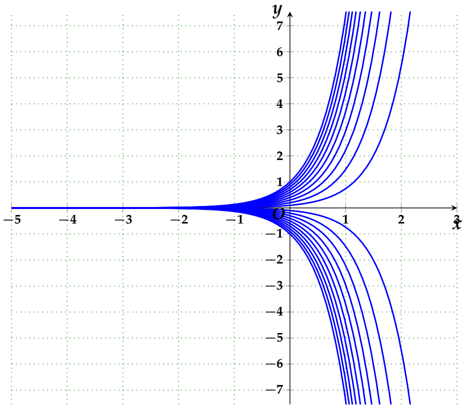
1 $f'(x) - 2f(x) = 0$ تعني $f'(x) = 2f(x)$ ومنه $f = kf$ مع $k = 2$.
الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = Ce^{2x}$ حيث C عدد حقيقي ثابت .

التمثيلات المقابلة هي لدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي يلي $f(x)=Ce^{2x}$

2 نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x)=Ce^{2x}$ مع $f\left(\frac{1}{2}\right)=e$

ومنه $Ce^{2(\frac{1}{2})}=e^2$ ومنه $Ce^1=e^2$ أي $C=e$

إذن الدالة الوحيدة f حيث : $f'(x)-2f(x)=0$ و التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$ هي الدالة $x\mapsto e^{2x+1}$



5د

مبرهنة ❷

أضف إلى **معلوماتك**

✍ الدوال غير المعدومة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : من أجل كل عددين حقيقين x و y $f(x+y)=f(x)f(y)$ هي الدوال $x\longmapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي

التقويم

25د

تطبيق

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وغير معدومة حيث من أجل كل عدد ين حقيقين x ، y لدينا : $f(x)\times f(y)=f(x+y)$

1 بيّن أنّ : $f(0)=1$.

2 بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)\times f(-x)=1$.

3 بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$

4 إستنتج إشارة $f(x)$

تطبيق

تمرين رقم 12 صفحة 112

تمرين رقم 13 صفحة 112

تمرين منز $\{11-15\}$ ـــــــــي صفـــــ $\{102\}$ ـــحة

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : السنة ثالثة رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الدوال الأسية
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : دراسة دالة : $x \mapsto e^{u(x)}$

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الـــدوال العددية، العمليات على الدوال المشتقة، تقريب أولر
الكفاءات المستهدفة : دراسة إتجاه تغير الدالة $x \mapsto exp \circ u(x)$.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية تذكير بمشتقة دالة مركب **مجموعة تعريف الدالة $exp \circ u$** : **مبرهنة ①** أضف إلى معلوماتك نضع: $f(x) = e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية مجموعة تعريف الدالة f هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u ، إذن : $D_f = D_u$	10د
مرحلة بناء معارف	**إتجاه تغيرالدالة $exp \circ u$** : **مبرهنة ②** أضف إلى معلوماتك إذا كانت u دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$ فإنّ للدالتين u و $exp \circ u$ نفس إتجاه التغير على I **البـرهـان** نعلم أن الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ،إذن حسب المبرهنة الخاصة بإتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $exp \circ u$ نفس إتجاه التغيرات على المجال D_u ■ **مثال** نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x$، نلاحظ أنّ: $f = exp \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = x^2 - 1$ بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن: الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ بما أن الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;\infty[$ فإن: الدالة f متناقصة تماما على ال+مجال $[0;+\infty[$	15د
	النهايات **مبرهنة ③** أضف إلى معلوماتك a ،b وc تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ نعتبر الدوال التالية u ، e^x و f حيث $f = exp \circ u$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x\to b} e^x = c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$	15د

مرحلة بناء معارف

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x+2}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

المشتقة

15د

مبرهنة ❸ — أضف إلى معلوماتك

✍ إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I فإن للدالة $exp\circ u$ قابلة للإشتقاق على I
ولدينا من أجل كل x من I، $(exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

البرهان

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على I و علما أن الدالة exp قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن: الدالة المركبة $exp\circ u$ قابلة للإشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا من أجل كل x من I
$(exp\circ u)'(x)=u'(x)exp'(x)[u(x)]=u'(x)exp(x)[u(x)]$ ■

مثال

✍ مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x^2+3x-5}$ هي : $f'(x)=(-2x+3)e^{-x^2+3x-5}$

✍ مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ هي : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

التقويم

10د

تطبيق

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x^3+3x+1}$

1 أدرس تغيرات الدالة f

2 أثبت أنّ المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[-1;0]$

50د

بكالوريا 2013 شعبة علوم تجريبية

I) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بِـ : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

x	$f(x)$
$0,20$	$0,037$
$0,21$	$0,016$
$0,22$	$-0,005$
$0,23$	$-0,026$
$0,24$	$-0,048$
$0,25$	$-0,070$

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C).

2 أحسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.
باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α.

4. أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثمّ أرسم المنحني (C') الممثل للدالة $|f|$.

5. عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بِـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

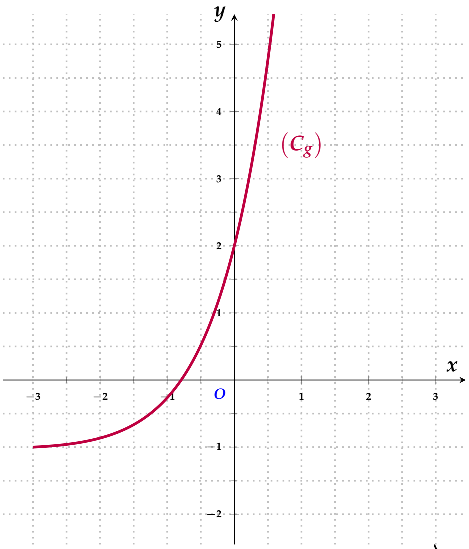
1 أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1]$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

أ) تحقّق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أنّ : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

بكالوريا 2019 شعبة تقني رياضي



I) g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=(x+3)e^x+1$
و (C_g) تمثيلهاالبياني كما هو مبين في الشكل .
بقراءة بيانية:

1 حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

2 إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$
بحيث $g(\alpha)=0$ ثم تحقّق أنّ : $-0.8<\alpha<-0.7$.

3 إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)(e^x-1)$
و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1 أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2 بيّن أنّه من كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم ّكل جدول تغيرات الدالة f.

3 أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ ثم إستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

ج) أكتب معادلة لـ (T): مماس (C_f)الموازي للمستقيم (Δ).

4 أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha)\approx-0.7$)

5 أحسب $f(x)-g(x)$ ثم إستنتج دالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6 h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=|x|(e^{|x|-2}-1)+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب) تأكد أنّه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$فإنّ: $h(x)=f(x-2)+1$.

ج) إشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3;3]$.

بكالوريا 2019 شعبة رياضيات

I f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث K وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_K في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1 بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما .

2 أحسب نهايتي الدالة f_K عند $-\infty$ و $+\infty$ . . (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K) .

3 أ) أحسب $f_k'(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي K إتجاه تغير الدالة f_k .

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل K عدد حقيقي موجب تماما .

4 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

II f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1 شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2 أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث : $-1,28<\alpha<-1,27$.

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا .

3 g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)+(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثم إستنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$.

ب) بإستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$

بكالوريا 2019 شعبة علوم تجريبية

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=e^x-ex$ و $f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$

1 أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية .

2 أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3 أحسب كلاّ من $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4 أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5 أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. (يعطى $e^2-2e\approx 2$)

6 أحسب بالسنتيمتر المربّع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنين (C_f) و (C_g) .

7 h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كمايلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية .

ب) من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثمّ إستنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .