التحضير الجيد لبكالوريا 2021

الأستاذ : مزيان محمد

3AS

المجلة الشاملة في المتتاليات العددية

100 تمرين في المتتاليات العددية لجميع الشعب العلمية

: Meziane Maths

: Meziane Maths

: Meziane Maths

: meziane.probastat@gmail.com

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021

تمرين رقم -1- : Meziane Maths

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;2]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال I .
2) شكل جدول تغيرات الدالة f .
إستنتج من أجل كل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$.
3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ طول الوحدة $2Cm$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .
أرسم (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ في المجال I.

II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$.

1) بإستعمال المنحنى (C_f) و (Δ) مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل مع إظهار خطوات الإنشاء.
2) ضع تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n).
3) برهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $0<u_n<2$.
4) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم تقاربها ؟
5) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0<2-u_{n+1}<\dfrac{4}{5}(2-u_n)$.
6) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0<2-u_n<\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.
7) إستنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

تمرين رقم -2- : Meziane Maths

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;\sqrt{6}[$ حيث : $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{6-x^2}}$.

أ) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;\sqrt{6}[$.
ب) شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}, n\in\mathbb{N}$

أ) أحسب u_1, u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{3}$.
ج) أثبت أن (u_n) متزايدة .
د) إستنتج أن (u_n) متقاربة مع تحديد نهايتها.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية حسابية مع تحديد أساسها و حدها الأول .
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية (v_n).
ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$.
د) هل توجد قيمة طبيعية لـ n حتى يكون $S_n=2021$.

4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $w_n=e^{v_n}$.

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.
ب) أحسب الجداء P_n بدلالة n حيث : $P_n=w_0\times w_1\times w_2\times\cdots\times w_n$.
ج) من أية رتبة لـ n يكون $P_n\leqslant 2021$.

تمرين رقم -3- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $\begin{cases} u_1=e^2 \\ u_{n+1}=\sqrt{e^{-1}.u_n} \end{cases}, n\in\mathbb{N}^*$

1) أحسب كل من u_2 و u_3 .
2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n=\dfrac{1+lnu_n}{2}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول .
ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ فإن : $u_n=e^{3(\frac{1}{2})^{n-1}-1}$.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ثم إستنتج تقارب (u_n) .

3) أحسب الجداء P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n$.

4) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $t_n = ln(v_n)$.

أ) حدد طبيعة المتتالية (t_n).

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$.

تمرين رقم -4- : Meziane Maths

1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول v_0 و أساسها q حيث : $\begin{cases} lnv_0 + lnv_2 = 2ln2 \\ e^{-6}(e^{v_0} \times e^{v_1}) = 1 \end{cases}$

أ) أحسب v_1 و v_0 ثم إستنتج قيمة الأساس q.

ب) نضع : $v_0 = 4$ و $q = \dfrac{1}{2}$, عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = lnv_0 + lnv_1 + lnv_2 + \cdots + lnv_n$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{9u_n + 10} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6 \leqslant u_n \leqslant 10$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أنها متقاربة .

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $10 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(10 - u_n)$.

د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0 \leqslant 10 - u_n \leqslant v_n$.

هـ) إستنتج نهاية u_n.

تمرين رقم -5- : Meziane Maths

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 4$.

2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و إستنتج أنها متقاربة و أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leqslant \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$, ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

ب) حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) إستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ و $S'_n = \dfrac{2}{u_0 - 2} + \dfrac{2}{u_1 - 2} + \cdots + \dfrac{2}{u_n - 2}$ ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين رقم -6- : Meziane Maths

1) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

أ) برهن أنه من أجل كل $n \geqslant 3$ فإن : $u_n \geqslant 0$.

ب) إستنتج انه من أجل $n \geqslant 4$ فإن : $u_n \geqslant n - 2$.

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n).

2) نعرف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = 4u_n - 8n + 24$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

ج) تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = X_n + Y_n$ حيث (X_n) متتالية هندسية و (Y_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس و الحد الأول لكل منهما.

د) إستنتج بدلالة n عبارة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

تمرين رقم -7- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n.u_n$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

ب) أكتب v_n بدلالة n.

2) بين أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 5.

ب) أكتب w_n بدلالة n.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

ب) عين u_n بدلالة n.

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $0 < u_{n+1} \leqslant \frac{2}{5}u_n$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $0 < u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

ج) إستنتج نهاية u_n.

تمرين رقم -8- Meziane Maths :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ و $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1) أ) بين أن : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$, ثم برهن انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن : $v_n > \frac{1}{2}$.

ب) عين أصغر عدد طبيعي α حيث إذا كان $n \geqslant \alpha$ فإن : $v_n < \frac{3}{4}$, ثم إستنتج أنه إذا كان $n \geqslant \alpha$ فإن : $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 5 المتتالية (S_n) حيث : $S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \cdots + u_n$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5 : $S_n \leqslant u_5\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right]$.

ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 5 : $S_n \leqslant 4u_5$.

3) بين أن المتتالية (S_n) متزايدة ثم إستنتج انها متقاربة.

تمرين رقم -9- Meziane Maths :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1 \qquad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geqslant 3$ فإن : $u_n > 0$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geqslant 4$ فإن : $u_{n+1} > 3n - 4$ ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 9n + 30$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ مع تحديد حدها الأول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = 9\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n + n - \frac{10}{3}\right]$, ثم إستنتج نهاية (u_n) من جديد.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

تمرين رقم -10- Meziane Maths :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \qquad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) أ) عين العددين الحقيقين a و b حيث : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$.

ب) برهن بالتراجع من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$.

ج) بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم إستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و تحديد حدها الأول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n = \dfrac{n+8}{n+4}$ ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و ماذا تستنتج ؟

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = e^{\frac{4}{4}} + e^{\frac{5}{4}} + e^{\frac{6}{4}} + \cdots + e^{\frac{n+4}{4}}$ أحسب S_n بدلالة n

تمرين رقم -11- : Meziane Maths

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n+5} \qquad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) بين بالتراجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$.

3) أ) بين أن : $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم إستنتج أن $0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n = \dfrac{4u_n}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$.

ب) حدد v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n .

5) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

ب) إستنتج بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = \dfrac{1}{2u_0+3} + \dfrac{1}{2u_1+3} + \cdots + \dfrac{1}{2u_n+3}$.

تمرين رقم -12- : Meziane Maths

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n-8}{2u_n-5} \qquad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن $u_n < 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n-2}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2.

ب) أكتب v_n بدلالة n و إستنتج u_n بدلالة n.

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0-2} + \dfrac{1}{u_1-2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n-2}$.

تمرين رقم -13- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{3^n}{3!}$.

1) بين أن المتتالية (u_n) حدودها موجبة تماما.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) عبر عن v_n بدلالة n.

ب) بين من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geqslant 3$ فإن : $v_n \leqslant \dfrac{3}{4}$.

ج) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) من أجل $n \geqslant 3$.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geqslant 3$ فإن : $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}.u_3$.

ب) أحسب u_3 و بين أنه مهما كان $n \geqslant 3$ فإن : $0 < u_n \leqslant \dfrac{32}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) و ماذا تستنتج ؟

4) نعتبر الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$.

أ) أحسب بدلالة n الجداء P_n.

ب) إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

تمرين رقم -14- : Meziane Maths

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث حدها الأول $u_0 = 5$ و أساسها $r = 4$.

1) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

2) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

3) إذا كان مجموع سبعة حدود متعاقبة من المتتالية (u_n) هو 1995 فما هو الحد الأول من هذه الحدود.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = (2n+1)2^{u_n}$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{n!2^n}$.

ب) إستنتج بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdot \times v_n$.

تمرين رقم -15- Meziane Maths :

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ 3u_{n+1} = 2u_n - 6n + 5 \end{cases}$ ، $n \in \mathbb{N}$

1) أحسب كل من u_1 و u_2 .

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ مع α و β عددين حقيقيين.

أ) عين α و β علما أن : $\begin{cases} v_0 = -20 \\ v_1 = \dfrac{-40}{3} \end{cases}$

ب) من أجل α و β المحصل عليها في السؤال السابق , بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$.

ج) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم إستنتج عبارة u_n.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

ب) إستنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

4) عين قيمة n الطبيعية حتى يكون $S'_n - S_n = 169$.

تمرين رقم -16- Meziane Maths :

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \dfrac{eu_n + 1}{u_n + e} \end{cases}$ ، $n \in \mathbb{N}$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث : $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n + e}$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leqslant e$.

3) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n), ثم إستنتج أنها متقاربة .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = (\dfrac{e-1}{e+1})^{n+1}$.

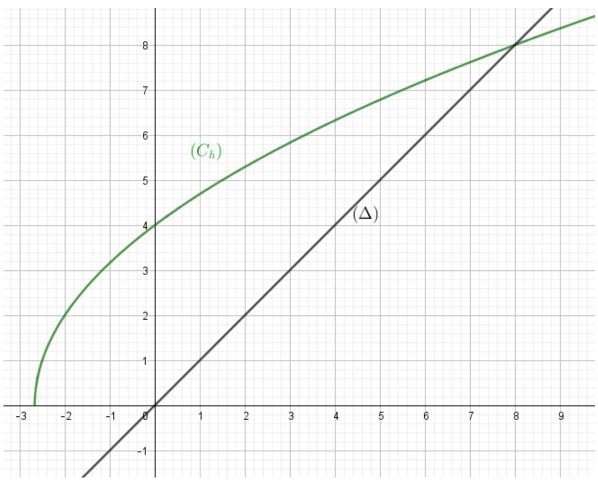
أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول, برر لماذا (v_n) متقاربة ؟

ب) أحسب بدلالة n المجموع : $T_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2021}$

ج) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \dfrac{v_n + 1}{1 - v_n}$, ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = \dfrac{1}{u_n + 1} + \dfrac{1}{u_{n+1} + 1} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{u_{n+2021} + 1}$, ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين رقم -17- Meziane Maths :



$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $lnv_2 - lnv_3 = ln2$ و $ln\sqrt[3]{v_6} + lnv_2 = 0$.

1) عين أساس المتتالية (v_n) و حدها الأول v_0 ثم أكتب v_n بدلالة n و أدرس تقاربها.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$. لتكن الدالة h المعرفة على المجال $\left[\dfrac{-8}{3}; +\infty\right[$ كما يلي : $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C_h) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل).

- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 , u_1 , u_2 , u_3 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير (u_n) و تقاربها .

3)أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < 8$ ثم إستنتج إتجاه تغير (u_n) و تقاربها.

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leqslant v_n$, ثم إستنتج نهاية u_n

تمرين رقم -18- Meziane Maths :

1) (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < u_n < 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما, ثم إستنتج انها متقاربة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n(v_n + 1)$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n , $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $S'_n = 2 - v_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $2^n \leqslant 2^n + 1 \leqslant 2^{n+1}$ ثم أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $\frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $\frac{1}{2}S_n" \leqslant S_n \leqslant S'_n$ ثم عين حصرا لـ $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

تمرين رقم -19- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث : $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1} = \frac{1}{\pi}u_n + \frac{\pi - 1}{\pi} \end{cases}$

1) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2) بين أن (u_n) متزايدة تماما, مستنتجا أنها متقاربة.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $\begin{cases} v_0 = \frac{2\pi - 1}{2\pi} \\ v_n = u_n - 1 \end{cases}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{\pi}$.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n, ثم إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n = 1 + \frac{1}{\pi^n} - \frac{1}{2\pi^{n+1}}$.

4) إستنتج النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, أحسب S_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

تمرين رقم -20- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1) أ) أحسب الحدود u_1 , u_2 , u_3 و u_4.

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ) أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n \leqslant n + 3$.

ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ثم أثبت صحة التخمين.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - n$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول .

ب) أوجد عبارة v_n ثم عبارة u_n بدلالة n.

ج) أحسب نهاية u_n لما $n \mapsto +\infty$.

4) أ) أوجد عبارة S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

ب) نضع : $T_n = \frac{S_n}{n^2}$ أوجد نهاية المتتالية (T_n).

تمرين رقم -21- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{cases}$

1) أ) تحقق من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2(u_n - 1)}{u_n + 4}$.

ب) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

ج) تحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n + 2)(1 - u_n)}{u_n + 4}$ مستنتجا أن (u_n) متزايدة تماما.

د) برر أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$.

ب) عبر عن v_n بدلالة n , ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \dfrac{2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

ج) إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0 + 2} + \dfrac{1}{u_1 + 2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n + 2}$.

تمرين رقم -22- : Meziane Maths

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$.

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$.

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4 - u_n}{2}$.

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

تمرين رقم -23- : Meziane Maths

(u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 بحيث : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{4}{u_n + 3}$.

1) برهن بالتراجع ،انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$.

2)أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) (v_n) متتالية معرفة في المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية ،عين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n ثم u_n بدلالة n; استنتج ثانية أن (u_n) متقاربة.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$ و $T_n = e^{\frac{u_0}{u_0+1}} \times e^{\frac{u_1}{u_1+1}} \times \cdots \times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$.

- عين S_n و T_n بدلالة n; هل المتتالية (T_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

تمرين رقم -24- : Meziane Maths

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \dfrac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1)أ) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n + 4}$.

ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

أ) بين أن المتتالية v_n هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{5}{v_1} + \dfrac{5^2}{v_2} + ... + \dfrac{5^n}{v_n}$.

تمرين رقم -25- : Meziane Maths

لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين معرفتين كما يلي : $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\dfrac{2v_n+u_n}{3} \end{cases}$ و $\begin{cases} u_0=7 \\ u_{n+1}=\dfrac{v_n+2u_n}{3} \end{cases}$

1) من أجل كل عدد طبيعي n, نعرف المتتالية العددية (L_n) بحيث : $L_n=u_n-v_n$.

أ) أثبت أن المتتالية (L_n) هندسية و عين أساسها و حدها الأول .

ب) أوجد عبارة الحد العام L_n بدلالة n, هل المتتالية (L_n) متقاربة

2) أدرس إتجاه تغير المتتاليتين (v_n) و (u_n) .

3) إستنتج بدلالة n عبارة المجموع S_n المعرف بـ : $S"_n=S'_n+S_n$ علما أن : $S'_n=v_0u_0-v_0^2+v_1u_1-v_1^2+\cdots+v_nu_n-v_n^2$ و $S"_n=u_0^2-u_0v_0+u_1^2-u_1v_1+\cdots+u_n^2-u_nv_n$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية العددية (w_n) بحيث : $w_n=u_n+v_n$, أثبت أن المتتالية (w_n) ثابتة, ثم إستنتج قيمة ℓ.

تمرين رقم -26- : Meziane Maths

1) f دالة عددية معرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3}$.

أ) أدرس إتجاه تغير الدالة f .

ب) بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)>0$.

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة , ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n^2-1$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n , ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة n :

$$\begin{cases} S_n=(u_0-1)(u_0+1)+(u_1-1)(u_1+1)+\cdots+(u_n-1)(u_n+1) \\ S'_n=(u_0^2-0)+(u_1^2-1)+\cdots\cdots+(u_n^2-n) \end{cases}$$

تمرين رقم -27- : Meziane Maths

(u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+2\,; \end{cases}$

1) أرسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{3}{4}x+2$

2) باستعمال الرسم المحصل عليه، مثل على محور الفواصل و بدون حساب، الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4.

3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\leqslant 8$

5) تحقق أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. هل هي متقاربة؟ برر اجابتك.

✍ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-8$

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

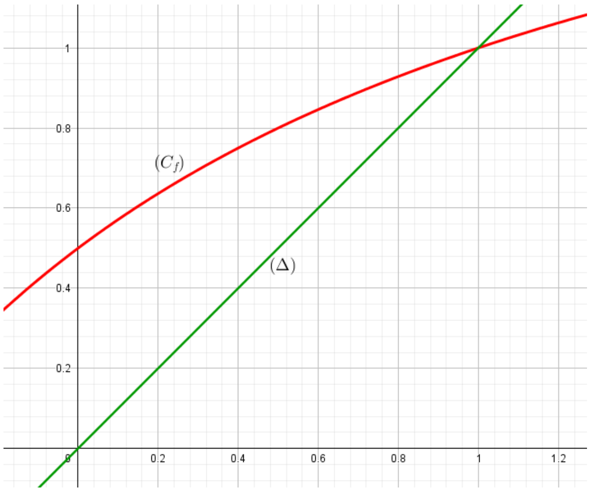
2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموعين: $S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$ و $Q_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع $S'_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2$

5) أحسب بدلالة n الجداء: $\pi_n=v_0.v_1.v_2.\cdots.v_n$.

تمرين رقم -28- : Meziane Maths



الدالة العددية f ، المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ ، وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها (الشكل المقابل) ،(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

✍ (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أعد رسم الشكل في ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_3,u_2,u_1,u_0 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرالمتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$ ،ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما وماذا تستنتج؟

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{1+u_n}{1-u_n}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1-\dfrac{2}{v_n+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموعين $S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n+2020}$ و $T_n=\dfrac{1}{u_0-1}+\dfrac{1}{u_1-1}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n+2020}-1}$.

تمرين رقم -29- : Meziane Maths

✍ f دالة معرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{ln(x-1)+x-1}{ln(x-1)}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;+\infty[$, ثم شكل جدول تغيراتها.

3) إستنتج أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ فإن : $f(x)\geqslant e+1$.

4) أنشئ (C_f) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$على المجال $]2;10]$.

✍ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=e^2+1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\geqslant e+1$.

2) أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-1)(1-ln(u_n-1))}{ln(u_n-1)}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة, ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

تمرين رقم -30- : Meziane Maths

✍ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=11\\u_{n+1}=2+\sqrt{u_n-2}\end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3\le u_n\le 11$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\le u_{n+1}-3\le\dfrac{1}{2}(u_n-3)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n-3\le 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-2)$.

4) أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

5) أحسب المجموع S حيث : $S=v_{1442}+v_{1443}+\ldots..+v_{2021}$ ثم استنتج الجداء P حيث :
$P=(u_{1442}-2)\times(u_{1443}-2)\times\ldots\ldots\times(u_{2021}-2)$.

تمرين رقم -31- Meziane Maths :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$.

1) أحسب الحدود u_0 , u_1 , u_2 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة , هل هي متقاربة ؟ علل.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n , ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $ln v_0 + ln v_1 + \cdots + ln v_n = (n+1)(-n+2+ln3)$.

تمرين رقم -32- Meziane Maths :

✍ f دالة معرفة على $]2; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$.

1) أحسب $f'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]2; +\infty[$.

✍ (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = \dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 3$.

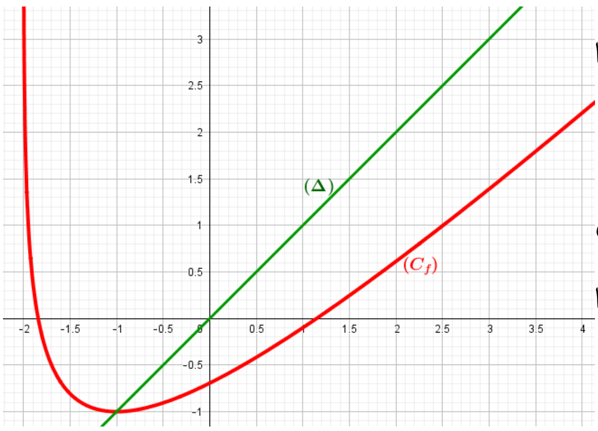
2) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n^2 < \dfrac{9}{10}(u_n^2 + 1)$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما, هل هي متقاربة ؟

4) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n + 2)$.

5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n - 2 \leqslant (\dfrac{9}{10})^n$, ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين رقم -33- Meziane Maths :



✍ f دالة معرفة على المجال $]-2, +\infty[$ بـ : $f(x) = x - ln(x+2)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (الشكل المقابل) .

1) أحسب $f(-1)$ ثم بقراءة بيانية حدد إتجاه تغير الدالة f.

✍ (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = 3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

2) أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل U_1 , U_2, U_3 على محور الفواصل دون حسابها .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geqslant -1$.

ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ، واستنتج أنها متقاربة ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

✍ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بحدها الأول $v_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$V_n = \ln[(U_0+2)(U_1+2) \times \cdots \times (U_{n-1}+2)]$.

4) أ) بين أن المتتالية أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = 3 - U_n$.

ب) إستنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} [(U_0+2)(U_1+2) \times \cdots \times (U_{n-1}+2)]$.

تمرين رقم -34- Meziane Maths :

✍ (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما, حدودها موجبة تماما, حدها الأول u_0 و أساسها q حيث :

$$\begin{cases} ln(u_1) + ln(u_2) = 3 \\ u_1 + u_2 = e(1+e) \end{cases}$$

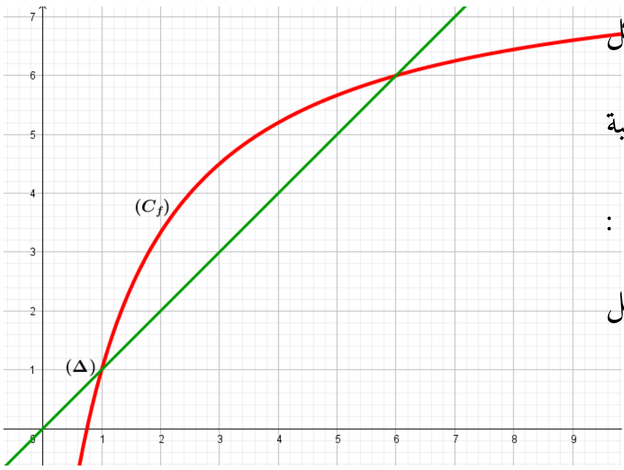
1) أحسب u_1 و u_2 ثم إستنتج قيمة الأساس q.
2) نضع : $u_3 = e^3$ و $q = e$.
أ) عبر عن u_n بدلالة n .
ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
ج) أحسب : $S'_n = ln(u_0) + ln(u_1) + \cdots + ln(u_n)$.
د) بين أن المجموع : $S''_n = u_0^3 + u_1^3 + \cdots + u_n^3 = \dfrac{e^{3(n+1)} - 1}{e^3 - 1}$, ثم إستنتج المجموع : $S'''_n = u_0^3 + u_1^3 + \cdots + u_{2021}^3$.

تمرين رقم -35- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$.
1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \dfrac{1}{e}$.
2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).
ب) إستنتج أن (u_n) متقاربة , ثم أحسب نهايتها.
3) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{u_n}$.
أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = \dfrac{3}{2}$.
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n, ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4) أحسب بدلالة n المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = \dfrac{1}{1+\ln u_1} + \dfrac{1}{1+\ln u_2} + \cdots + \dfrac{1}{1+\ln u_n}$

تمرين رقم -36- : Meziane Maths

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{8x-6}{x+1}$ و (C_f) المنحنى الممثل لها (الشكل المقابل)، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$, ثم . ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
2) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
أ) أعد رسم الشكل في ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.
ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيرالمتتالية (u_n) وتقاربها.
3)أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6 \leqslant u_n$.
ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n), إستنتج أنها متقاربة.
ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 6 \leqslant \dfrac{2}{7}(u_n - 6)$.
د) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 6 \leqslant (\dfrac{2}{7})^n(u_0 - 6)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$.
أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .
ب) إستنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ مرة أخرى.

تمرين رقم -37- : Meziane Maths

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{eu_n + 1}$.
لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{eu_n}{eu_n - 1}$.
1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول .
2) أكتب v_n بدلالة n.

3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + \dfrac{1}{eu_n - 1}$, ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n.

4) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و S'_n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S'_n = \dfrac{e}{eu_0 - 1} + \dfrac{e}{eu_1 - 1} + \cdots + \dfrac{e}{eu_n - 1}$.

6) أحسب الجداء P حيث : $P = v_{1962} \times v_{1963} \times \cdots \times v_{2021}$.

تمرين رقم -38- Meziane Maths :

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n), ثم إستنتج أنها مقاربة.

ج) إذا كانت : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$ فبين أن العدد l يحقق : $(l - 2)^2 = 0$ ثم أوجد قيمة l.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n(u_n - 2) = 1$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\dfrac{-1}{2}$ و يطلب حساب حدها الأول v_0.

ب) أوجد بدلالة n عبارة كل من v_n و u_n .

3) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \dfrac{1}{e^{2v_0}} + \dfrac{1}{e^{2v_1}} + \cdots + \dfrac{1}{e^{2v_n}}$

تمرين رقم -39- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $a_n = \dfrac{n}{5^{n-1}}$.

1) أحسب بدلالة n $\ln(a_n)$ ثم إستنتج أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ : $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{5n} u_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أن : $u_n > 0$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و إستنتج تقاربها.

3) نعتبر المتتالية (v_n)المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n, ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \ln(5v_1) + \ln(5^2 v_2) + \cdots + \ln(5^n v_n)$.

تمرين رقم -40- Meziane Maths :

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$.

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 4$.

ب) حدد إتجاه تغير المتتالية (u_n), ماذا تستنتج؟

2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - 2\ln 2$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب عبارة كل من v_n و u_n بدلالة n, ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

أ) عين قيمة العدد الطبيعي n الذي يحقق : $S_n = 6(1 - e^{-2020 \ln 2})$.

ب) عبر بدلالة n عن المجموع T_n حيث : $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$.

تمرين رقم -41- Meziane Maths :

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + u_n^2}{2}}$.

أ)أحسب u_1, u_2 و u_3 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة, ثم أحسب نهايتها.

2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+1} = v_n$.

ب) إستنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

ج) أكتب عبارة كل من v_n و u_n بدلالة n, ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كل من المجاميع التالية : $\begin{cases} S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2 \\ T_n = v_0 + 2v_1 + \cdots + 2^n v_n \\ L_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n \end{cases}$.

تمرين رقم -42- : Meziane Maths

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام : $u_n = e^{3n+2}$.

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول, هل هي متقاربة.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) نعرف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$.

أ) بين أن (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها و حدها الأول.

ج) أحسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ و الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

تمرين رقم -43- : Meziane Maths

I) نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{U_n + 21}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$.

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج ؟

3) احسب $\left(U_{n+1} - \dfrac{1}{7}U_n\right)$, ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{7}U_n$.

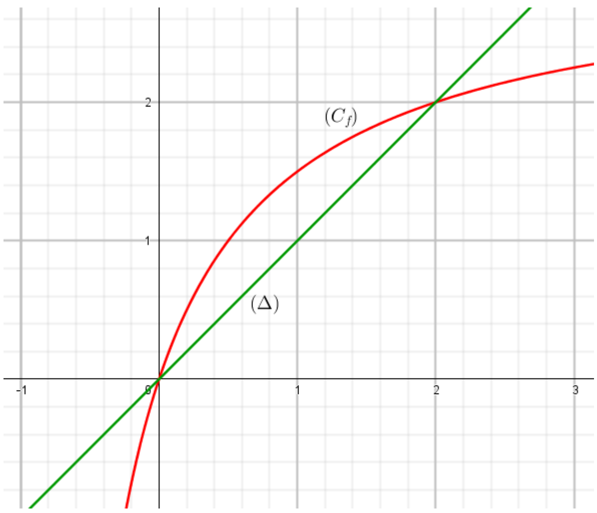
4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ ، واحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \dfrac{U_n}{U_n + 18}$.

1) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها q ، ثم احسب حدها الأول (V_0).

2) اكتب (V_n) بدلالة n ، ثم بين أن : $(U_n) = \dfrac{18(\frac{1}{7})^n}{19 - (\frac{1}{7})^n}$, ثم احسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

تمرين رقم -44- : Meziane Maths



لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$(الشكل المقابل) .

1) (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_0 = 1$

و $U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{U_n + 1}$.

أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0 , U_1 , U_2 و U_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 2$.

د) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة , ثم إستنتج أنها متقاربة و عين نهايتها.

2) نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = 1 - \dfrac{2}{U_n}$.

أ) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب عبارة V_n بدلالة n , ثم إستنتج عبارة U_n بدلالة n ثم تحقق من نهاية المتتالية (U_n) .

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{U_0}{U_0 - 2} + \dfrac{U_1}{U_1 - 2} + \dfrac{U_2}{U_2 - 2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{U_n}{U_n - 2}$

تمرين رقم -45- : Meziane Maths

✍ الدالة f معرفة على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$ بِـ : $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس إتجاه تغير الدالّة f ؛ ثم أرسم (Cf)

2) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right) \end{cases}$

أ) مثل الحدود $u_0;u_1;u_2$ و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء

ب) بين بالتراجع أن: $u_n>1$ من أجل كل عدد طبيعي n

ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$, ماذا تستنتج ؟

3)أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}\left(u_n-1\right)$.

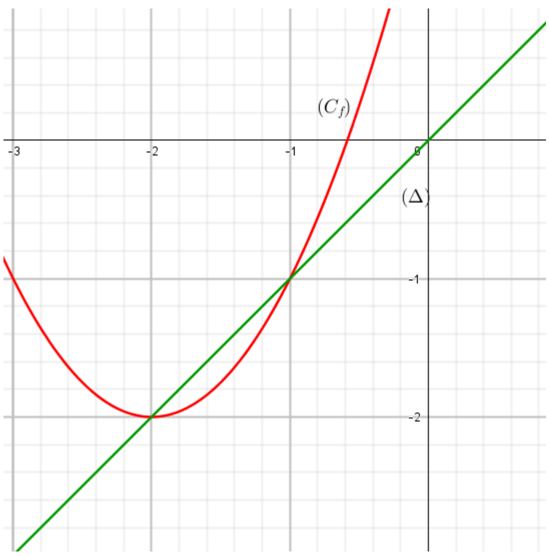
ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$; ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية , يطلب تعيين أساسها وحدها الأول , ثم أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{v_0-1}{u_0}+\dfrac{v_1-1}{u_1}+\dfrac{v_2-1}{u_2}+\ldots+\dfrac{v_n-1}{u_n}$.

تمرين رقم -46- : Meziane Maths



f دالة معرفة على المجال $[-3,0]$ بـ : $f(x)=(2+x)^2-2$ و (C_f) منحناها البياني المرفق.

(U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0=-\dfrac{5}{4}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) أ/ أعد الرسم على ورقة الاجابة مع تمثيل الحدود U_1 , U_2 ,U_3 على محور الفواصل دون حسابها .

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

2) أ / برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2\prec U_n\prec -1$.

ب /ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، واستنتج أنها متقاربة .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=\ln(U_n+2)$.

أ / بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول

ب / اكتب V_n بدلالة n و استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أ/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_n$.

ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times(u_2+2)\times ....\times(u_n+2)$,ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

تمرين رقم -47- : Meziane Maths

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0=\dfrac{11}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=3U_n-4$.

1) أحسب U_1 و U_2 .

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_n>2$.

ب) أدرس رتابة المتتالية (U_n) , هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

3) نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=4U_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) بإستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا , أكتب عبارة (V_n) بدلالة n , ثم إستنتج عبارة (U_n) بدلالة n.

ج) هل المتتالية (U_n) محدودة ؟

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\dfrac{U_0}{4^0}+\dfrac{U_1}{4^1}+\dfrac{U_2}{4^2}+.......+\dfrac{U_n}{4^n}$.

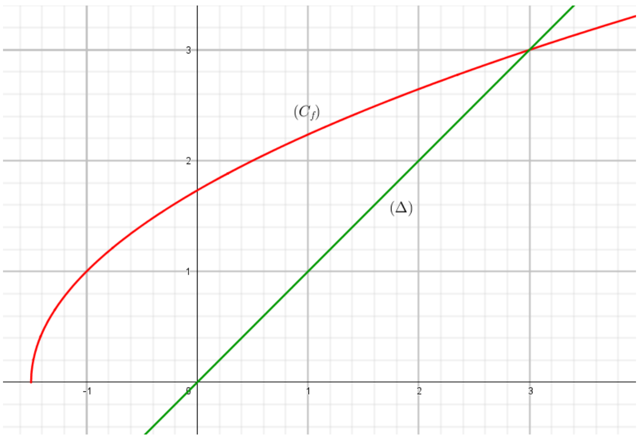
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\dfrac{u_n}{4^n}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ ثم إستنتج بدلالة n المجموع S_n .

تمرين رقم -48- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,3]$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{2x+3}$

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,3]$ وشكل جدول تغيراتها



ب) بين أنه إذا كان $x \in [0,3]$ فإن $f(x) \in [0,3]$

2)أ) باستعمال المنحنى (C_f) الممثل للدالة f والمستقيم $(\Delta) : y = x$

مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

ب) ما هو تخمينك لإتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

3)أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \preceq u_n \preceq 3$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها

4)أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \preceq 3 - u_{n+1} \preceq \frac{2}{3}(3 - u_n)$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \preceq 3 - u_n \preceq 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ثم أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم -49- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3$.

ولتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $V_n = U_n + 6$.

1)أ) بيّن أنّ (V_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب V_n بدلالة n ثم إستنتج عبارة U_n بدلالة n.

نعتبر المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ و $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$.

2) أحسب S_n بدلالة n ثم إستنتج S'_n بدلالة n.

نعرف المتتالية (W_n) من أجل كل عدد طبيعي لدينا : $W_n = ln(V_n)$ (حيث ln اللوغاريتم النيبيري).

3) بيّن أنّ (W_n) متتالية حسابية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

أحسب بدلالة n المجموع $S''_n = W_0 + W_1 + W_2 + ... + W_n$, إستنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} S''_n$

تمرين رقم -50- Meziane Maths :

1) لتكن المتتالية العددية (U_n) معرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{5} \\ U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1} \end{cases}$.

1) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$.

2) أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.و استنتج أنها متقاربة.

2) لتكن المتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$.

1) بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها 6 يطلب تعيين حدها الأول .

2) أ) أكتب بدلالة n عبارة V_n .

ب) استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_n}$.

تمرين رقم -51- Meziane Maths :

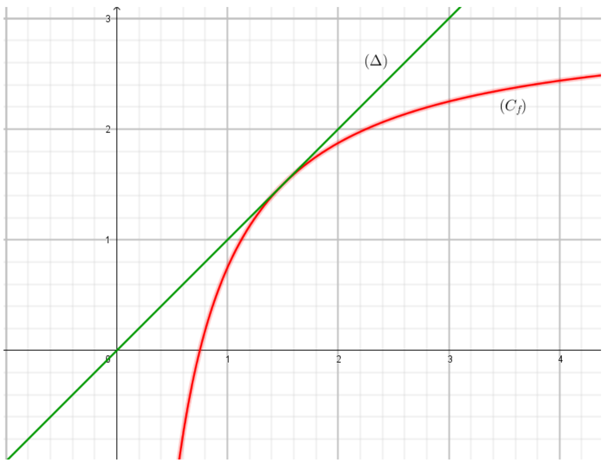
(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : u_0 وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$.

1) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .
3) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة . ما هي نهايتها ؟ .
4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2-u_n)$.
ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2-u_n \leq (\frac{4}{5})^n$ ، ثمّ عيّن نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

تمرين رقم -52- Meziane Maths :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=\left]\frac{3}{2};3\right]$ بـ : $f(x)=\frac{12x-9}{4x}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$



1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على I.
2) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{12U_n-9}{4U_n}$.
أ) باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل و دون حساب الحدود U_0 , U_1 و U_2 مبرزا خطوط الرسم.
ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها.
3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2}<U_n \leq 3$.
ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) و استنتج أنها متقاربة ثم عين نهايتها.
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=\frac{2}{2U_n-3}$ و $V_n=\ln(W_n)$.
أ) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$ ثم أكتب U_n بدلالة n.
ب) أحسب S_n حيث : $S_n=W_0\times W_1\times ...\times W_n$.

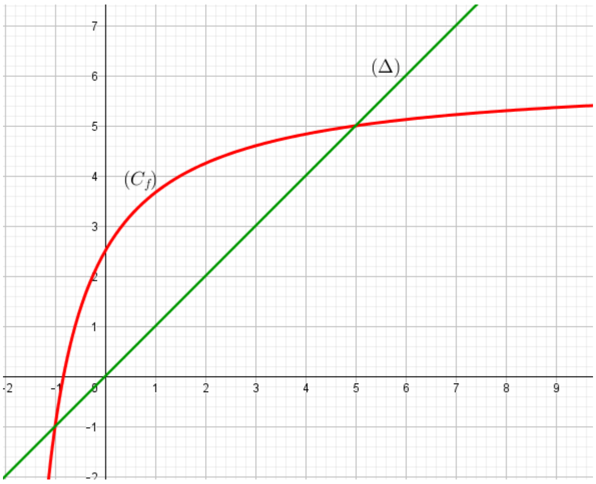
تمرين رقم -53- Meziane Maths :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
1) أحسب u_1 و v_1.
2) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n .
3) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.
بيّن أنّ: $S_n=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{3}{4}\right)^n$، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين رقم -54- Meziane Maths :

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{4u_n}{u_n+2}$.
1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < 2$.
2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=1-\frac{2}{u_n}$.
أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثمّ عبر عن v_n بدلالة n.
ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .
4) أ) بيّن أنّ : $|u_{n+1}-2| \leq \frac{2}{3}|u_n-2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .
ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثمّ إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{6x+5}{x+2}$، و ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) هوالمستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل) .

تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 5$.

3) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة ؟ .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n-5}{u_n+1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n .

ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

5) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+....+\dfrac{1}{u_n+1}$.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\sqrt{2U_n+3} \end{cases}$

1- برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n أن: $2\leq U_n\leq 3$.

2- أ) بين من اجل كل عدد طبيعي n أن: $U_{n+1}-U_n=\dfrac{(3-U_n)(1+U_n)}{U_n+\sqrt{2U_n+3}}$.

ب)أدرس اتجاه نغير المتتالية (U_n).

ج) هل المتتالية (U_n) متقاربة؟ علل اجابتك .

3- أ) بين أن من اجل كل عدد طبيعي n : $3-U_{n+1}\leq\dfrac{2}{3}(3-U_n)$.

ب) استنتج من اجل كل عدد طبيعي n : $3-U_n\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$.

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة علي $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n-2^n$.

أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 0$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نعتبر المتتالية $(-v_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2^n-u_n$.

أ) بين أن متتالية (v_n) هندسية اساسها 3.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

3) أ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ماذا تستنتج ؟

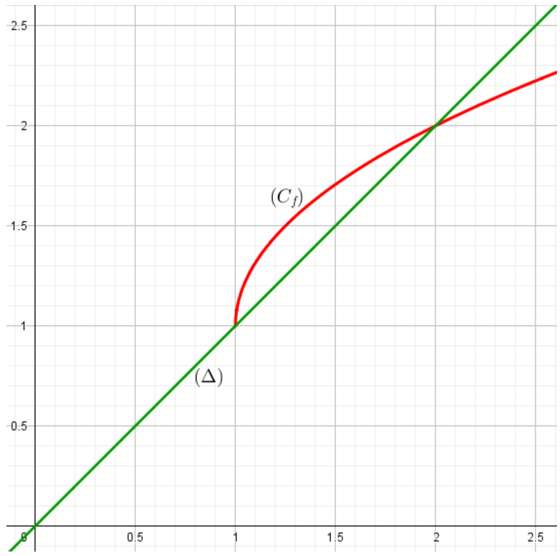
ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+.......+u_{n-1}$.

ج) بين ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $S_n=2^n-\dfrac{1+3^n}{2}$.

1) لتكن (u_n)المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+6}{u_n+2}\ ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

أ) بين أنه إذا كانت (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ، فإن ℓ هو جذر لثلاثي الحدود : $P(x) = x^2 + x - 6$.
ب) عين جذري الثلاثي الحدود P، نرمز اليهما بـ α و βحيث $\alpha > \beta$
2) من أجل كل n من $\mathbb{N}$، نضع $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$
أ) بين أن المتتالية (v_n)هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

تمرين رقم −59− : Meziane Maths



نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ انظر الشكل.
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = \dfrac{5}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
1) أ)علم على محور الفواصل دون حساب الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 .
ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
2) أ)برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \prec 2$.
ب)ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها.
3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام من اجل كل عدد طبيعي n :
$v_n = e^{-\frac{1}{3}+2n}$.
أ) بين ان متتالية (v_n) هندسية يطلب تعين اساسها و حدها الاول.
ب) احسب المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$ و $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n^2$.
ج)استنتج قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = \dfrac{e^{\frac{-1}{3}}}{1-e^2}\left(1 - e^{4036}\right)$

تمرين رقم −60− : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = \dfrac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2U_n + 1}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2U_n + 1}$
2. (ا) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 < U_n < \dfrac{1}{2}$
(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)، بين أنها متقاربة وعين نهايتها
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \dfrac{3^n U_n}{2U_n - 1}$
(ا) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0.
(ب) أحسب V_n بدلالة n واستنتج أن : $U_n = \dfrac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
(ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{u_0}{2u_0 - 1} + \dfrac{u_1}{2u_1 - 1} + \cdots + \dfrac{u_n}{2u_n - 1}$.

تمرين رقم −61− : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_1 = \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$
1) أحسب الحدود u_2،u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n).
2)أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$ يكون : $u_n \leqslant n + 3$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$, ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).
3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$: $v_n = u_n - n$
أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1.
ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$: $u_n = n + (\sqrt{e} - 1)(\frac{2}{3})^{n-1}$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$: $S_n = (\frac{2}{3})v_1 + (\frac{2}{3})^2 v_2 + \cdot + (\frac{2}{3})^n v_n$ و $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ و $T_n = \frac{S'_n}{n^2}$. عبر عن S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

تمرين رقم -62- : Meziane Maths

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $U_n > 0$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n), ثم إستنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

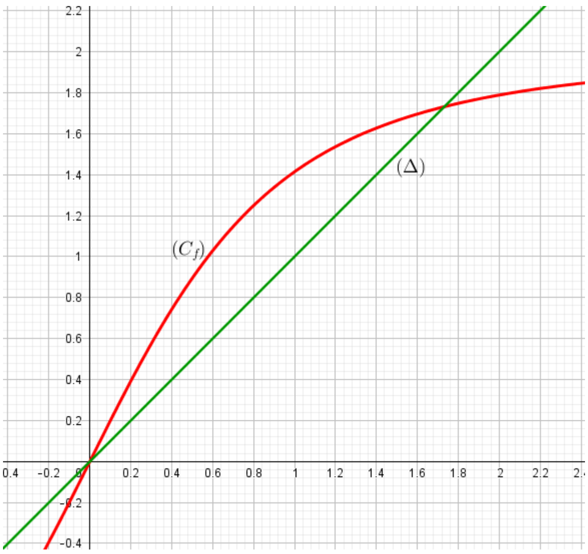
بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q ، ثم احسب حدها الأول .

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن : $u_n = \frac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty]$ بالعبارة : $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين رقم -63- : Meziane Maths



الشكل المقابل هوالتمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ :

$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامدوالمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$.

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) باستعمال التمثيل البياني (C_f) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0, u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزاخطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$.

جـ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\left(2 - \sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

د) استنتج أن (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots\ldots u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2)\ldots\ldots\ldots(3-u_n^2)}$.

تمرين رقم -64- : Meziane Maths

✍ لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 3^n - n - 1$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \alpha(n+1)$ حيث α عدد حقيقي.

أ) عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أكتب v_n بدلالة n, ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) نضع $\alpha = 1$ و ليكن $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

أ) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n.

ب) عين قيمة n حتى يكون : $S_n - T_n = 2043230$.

تمرين رقم -65- Meziane Maths :

لتكن المتتالية العددية (U_n) معرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 1 - \dfrac{3+2u_n}{2+U_n} \end{cases}$.

1) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 و u_4.

2) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leqslant \sqrt{3}$.

4) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و إستنتج أنها متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) لتكن المتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب حساب أساسها q و حدها الأول .

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ مرة أخرى.

تمرين رقم -66- Meziane Maths :

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{8+u_n^2}$.

1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نضع فيما يلي : $\alpha = 2$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leqslant 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم إستنتج أنها متقاربة .

3) لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $v_n = 1 - u_n^2$.

أ) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب حساب أساسها q و حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n, ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و S'_n بحيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S'_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$.

تمرين رقم -67- Meziane Maths :

(U_n) متتالية معرفة ب : $U_0 = e^3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > e^2$

2. أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) . هل هي متقاربة ؟

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \ln(U_n) - 2$.

(ا) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(ب) عبر عن V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n .

(ج) ما هي نهاية كل من المتتاليتين (V_n) و (U_n) ؟

4. أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

تمرين رقم -68- Meziane Maths :

1. لتكن الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بـ : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,1]$.

2) إستنتج أنه إذا كان $x \in [0,1]$: فإن $f(x) \in [0,1]$.

3) مثل بيانيا الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحدته : $(10cm)$.

.2 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) بإستعمال المنحنى (C) للدالة f عين على محور الفواصل الحدود : u_3, u_2, u_1, u_0.
أعط تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية u_n.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

3) بين أن : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$, ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

4) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك .

.3 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم عبارة u_n بدلالة n.

3) إستنتج نهاية المتتالية (u_n).

تمرين رقم -69- : Meziane Maths

(u_n) متتالية معرفة ب : $u_0 = e^3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2}{2} + \dfrac{1}{2}}$

1)أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leqslant 3$.

ب) قارن بين العددين u_n و u_{n+1} ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل جوابك.

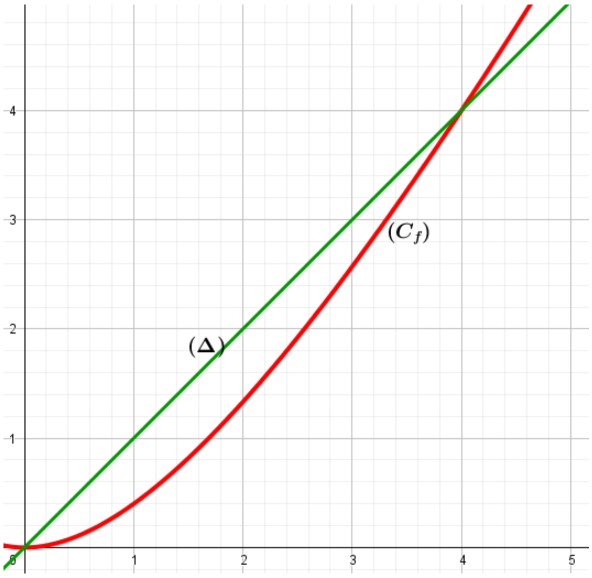
2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = u_n^2 + u_{n+1}^2 + ... + u_{n+2021}^2$, ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين رقم -70- : Meziane Maths



f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+4}$ و ليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو مبين في الشكل .

1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها .

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب $u_0 = 3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) باستعمال المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ) أستنتج أن (u_n) متقاربة.

4)أ) أدرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ ، واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{6}{7}u_n$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n \leqslant 3(\dfrac{6}{7})^n$.

جـ) أحسب نهاية المتتالية (u_n) لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين رقم -71- : Meziane Maths

نعتبر متتالية الأعداد الطبيعية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 10.u_n + 51$.

1) أحسب كل من u_1 , u_2 , u_3.

2) أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3u_n = 2 \times 10^{n+1} - 17$.

ب) إستنتج من أجل كل عدد طبيعي n كتابة للعدد u_n في النظام العشري .

3) أ) بين أن العدد الطبيعي u_2 أولي .

ب) بين أن u_n لا يقبل القسمة على كل من 2 , 3 , 5 مهما كان العدد الطبيعي n.

4) أ) بين أن : $10^6 \equiv 1[7]$ دون إستعمال الحاسبة .

ب) إستنتج من أجل كل عدد طبيعي p فإن : u_{6p+4} يقبل القسمة على 7.

تمرين رقم -72- : Meziane Maths

نعتبر كثير الحدود $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 4x - 2016$.

1) عين العدد الطبيعي a حيث : $P(x) = (x-a)(3x^2 + 31x + 31a + 4)$.

فيما يلي نضع $a = 8$.

2) حل عندئذ المعادلة $P(x) = 0$.

3) (v_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها q و (u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول $u_0 = 0$ و أساسها $q = r$.

أ) عين q علما أن : $3v_3 + 7v_2 + 4u_1 = 2016$.

ب) إستنتج كتابة العدد 2020 في النظام ذي الأساس 8.

4) نضع $w_n = v_n + u_n$.

أ) أحسب المجموع $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ بدلالة n.

ب) بين أن : $7S_n - 7 \equiv 0[8]$.

5) أ) عين بواقي قسمة 8^n على 13.

ب) إستنتج باقي قسمة العدد L على 13 حيث : $L = 2020^{1441} + 1441^{2020}$.

تمرين رقم -73- : Meziane Maths

(u_n) متتالية حسابية متزايدة حدودها أعداد طبيعية تحقق : $\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$ حيث : $\begin{cases} m = PPCM(u_3, u_5) \\ d = PGCD(u_3, u_5) \end{cases}$

1) عين الحدين u_3 و u_5 ثم إستنتج u_0.

2) أكتب u_n بدلالة n , هل العدد 2022 هو حد من حدود (u_n).

3) عين الحد الذي إبتداءا منه مجموع 5 حدود متتابعة من (u_n) يكون مساويا لـ 10080.

4)أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$.

ج) إستنتج بدلالة n المجموع : $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$.

تمرين رقم -74- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases} \quad , n \in \mathbb{N}$

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.4^n$.

ج) بين أن كل من u_n و u_{n+1} أوليين فيما بينهما مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

أ) حدد طبيعة المتتالية (v_n) مع إيجاد أساسها و حدها الأول .

ب) أوجد المجموع S بدلالة n حيث : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n}$.

3) عين من أجل كل عدد طبيعي n (PGCD) القاسم المشترك الأكبر لكل من العددين $a = 4^{n+1} - 1$ و $b = 4^n - 1$.

4) أ) أدرس حسب قيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد A_n يقبل القسمة على 7 حيث : $A_n = 9S - 6n - 3^{6n+4}$.

تمرين رقم -75- : Meziane Maths

θ عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

I) المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 2cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$,$n\in\mathbb{N}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0 < u_n < 2$.

2) نذكر انه من أجل كل عدد حقيقي x : $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$.

1) أحسب u_1 و u_2 بدلالة θ .

ب) بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{2+u_n}+\sqrt{2+u_{n-1}}}$.

ج) برهن بالتراجع أن (u_n) متزايدة .

د) برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n = 2cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين رقم -76- : Meziane Maths

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما و حدودها طبيعية غير معدومة و أساسها q
نضع : $PGCD(u_0;u_2) = d$ و $PPCM(u_0;u_2) = m$.

1) أحسب كل من u_0 , u_1 و u_2 علما أن : $m - 8d = 4$.

2) نضع $u_1 = 12$ و $q = 3$.

أ) أكتب u_n بدلالة n.

ب) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

3) أ) أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

ب) إستنتج باقي قسمة العدد α على 7 حيث : $\alpha = 1438^{2020} - 4^{1962}$.

ج) عين الأعداد الطبيعية n حيث تحقق الجملة : $\begin{cases} (n-1)S_n \equiv 0[7] \\ n+2 \equiv 0[6] \end{cases}$

تمرين رقم -77- : Meziane Maths

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{2n+1} = \dfrac{1}{2}u_{2n} \\ u_{2n+2} = 1 + u_{2n+1} \end{cases}$

1) أحسب الحدود u_1 , u_2, u_3 و u_4.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتاليتين (α_n) و (β_n) حيث : $\begin{cases} \alpha_n = 2 - u_{2n} \\ \beta_n = 1 - u_{2n+1} \end{cases}$

أ) بين أن كل من α_n و β_n متتاليتان هندسيتان يطلب تحديد كل من الأساس و الحد الأول لكل منهما.

ب) أكتب كب من α_n و β_n بدلالة n.

ج) إستنتج عبارة كل من u_{2n} و u_{2n+1} بدلالة n.

د) هل المتتالية (u_n) متقاربة مع التعليل.

3) أحسب بدلالة n كل من المجاميع التالية :

أ) $S_1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

ب) $S_2 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$.

ج) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2n} + u_{2n+1}$.

تمرين رقم -78- : Meziane Maths

1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول (x,y) حيث $(E) \mapsto 2x - 25y = 5$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2 \end{cases}$

أ) أحسب u_1,u_2,u_3 و u_4 ما تخمينك حول رقمي الآحاد و العشرات للعدد u_n.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} \equiv u_n[4]$.

ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $u_{2k} \equiv 1[4]$ و $u_{2k+1} \equiv 3[4]$.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2u_n = 5^{n+2} + 1$.
ب) إستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n \equiv 26[100]$.
4) حدد حسب قيم العدد الطبيعي n رقمي الآحاد و العشرات للعدد u_n.
5) عين $PGCD(u_{n+1}, u_n)$.

تمرين رقم -79- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

1) أحسب الحدود u_1, u_2 و u_3 .
2) أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
ب) إستنتج من أجل كل عدد طبيعي n الكتابة العشرية للعدد u_n.
3) بين أن العدد u_2 أولي .
4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , u_n لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 و لا على 5.
5) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n \equiv 4 - (-1)^n[11]$.
ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n لا يقبل القسمة على 11.
6) أ) بين أن : $10^{16} \equiv 1[17]$.
ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن : u_{16k+8} يقبل القسمة على 17.

تمرين رقم -80- : Meziane Maths

نضع $v_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2$.
1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم لدينا : $v_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.
2) جد ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c بحيث تحقق العلاقة التالية : $\dfrac{1}{v_k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{2k+1}$.
3) من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{k}$ و $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{v_k}$.
أ) جد الأعداد الحقيقية α, β و γ بحيث يكون لدينا : $u_n = \alpha + \beta(S_n - S_{2n+1}) + \dfrac{\gamma}{n+1}$.
ب) إستنتج رتابة المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة : $w_n = u_n + \dfrac{\gamma}{n+1}$.
ج) مما سبق إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة.

تمرين رقم -81- : Meziane Maths

a عدد طبيعي غير معدوم .
لتكن المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث : $u_n = PGCD(n, a)$.
1) من أجل $a = 15$ أحسب الحدود الثلاثة الأولى لـ (u_n).
2) من أجل $a = 4$ نعتبر العددين الطبيعيين n و m حيث : $u_n = u_m = 2$.
- بين أن : $u_{n+m} = 4$.
3) b عدد طبيعي .
أ) بين أنه من أجل كل عدد صحيح نسبي q فإن : $PGCD(a,b) = PGCD(a, b - aq)$.
ب) أحسب u_1 و u_a.
ج) أثبت أن : $u_{n+a} = u_n$, ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n).
4) نضع $a = 15$, أحسب u_n من أجل : $n = 2002^{2020} + 1441$.

تمرين رقم -82- : Meziane Maths

نعتبر المتتاليتان (v_n) و (u_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ و حدودها موجبة حيث : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 1 \\ (v_{n+1})^2 = v_n^2 + 2^{n+1}.v_n + 4^n \end{cases}$

1) أحسب u_1 .
2) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $v_{n+1} = v_n + 2^n$.
3) عين عبارة كل من u_n و v_n بدلالة n.

4) أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5.

5) عين حسب قيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للمجموع (u_n+v_n) على 5.

6) أ) أحسب بدلالة n الجداء X_n حيث : $X_n = u_2 \times u_3 \times u_4 \times \cdots \times u_n$ مع $n \geqslant 2$.

ب) برهن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geqslant 2$ فإن : $v_n < X_n$.

ج) بين أن v_n يقسم X_n من أجل كل $n \geqslant 2$.

تمرين رقم -83- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$.

I) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = 3u_n - 4$.

1) أوجد قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0.

2) من أجل قيمة α المحصل عليها أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

4) بإستعمال دستور ثنائي الحد أوجد منشور $(x+1)^n$ حيث x عدد حقيقي, ثم إستنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = v_0c_n^0 + v_1 + c_n^1 + v_2c_n^2 + \cdots + v_nc_n^n$.

II) بإستعمال البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

III) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $w_n = 2u_n - 3$.

1) أوجد قيمة α حتى تكون المتتالية (w_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول w_0.

2) من أجل أي قيمة α المحصل عليها أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n , ثم إستنتج u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S''_n بدلالة n حيث : $S''_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

4) إستنتج بدلالة n المجموع ψ_n حيث : $\psi_n = (w_0)^2 + (w_1)^2 + (w_2)^2 + \cdots + (w_n)^2$.

تمرين رقم -84- : Meziane Maths

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n = 2u_n + \alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$.

أ) أوجد قيمة α الحقيقية التي من أجلها تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n.

ج) أحسب نهاية u_n لما $n \mapsto +\infty$, ماذا تستنتج؟

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

3) أ) بإستخدام دستور ثنائي الحد, أوجد منشور $(x+1)^n$.

ب) إستنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = v_0c_n^0 + v_1 + c_n^1 + v_2c_n^2 + \cdots + v_nc_n^n$.

4) برهن بإستخدام دستور ثنائي الحد أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $L_n = 4^n + 6n + 8$ يقبل القسمة على 9.

تمرين رقم -85- : Meziane Maths

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ حيث حدودها أعداد طبيعية.

1) أ) تحقق أن : $u_1 + u_5 = 2u_3$.

ب) أحسب u_3 علما أن : $u_1 + u_3 + u_5 = 150$.

2) نضع $d = PGCD(u_1, u_5)$ و $m = PPCM(u_1, u_5)$.

أ) عين العددين u_1 و u_5 علما أن : $m = 6d$.

ب) إستنتج أن : $u_4 - u_2 = 10$ ثم حدد أساس المتتالية (u_n).

ج) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1}$.

ب) عين الأعداد الطبيعية n غير المعدومة حتى يكون $2S_n$ يقبل القسمة على 15.

تمرين رقم -86- : Meziane Maths

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}+\frac{4}{1+\sqrt{x}}$ و نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) أ) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+3\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ مشكلا جدول تغيرات الدالة f.

4) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (C_f) و المستقيم (Δ) دو المعادلة $y=x$ في المجال $[0;4]$.

II) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}, n\in\mathbb{N}$

1) بإستعمال (C_f) و (Δ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل دون الحساب .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\geqslant 1$.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}-1=(u_n-1)\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{(1+\sqrt{u_n})^2}\right]$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}-1\leqslant\frac{1}{2}(u_n-1)$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\leqslant u_n-1\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

تمرين رقم -87- Meziane Maths :

I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$, و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$, ثم فسر النتيجتين هندسيا.

ب) أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) أ) x عدد حقيقي كيفي من $\mathbb{R}$ أحسب $f(-x)+f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

3) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(x)-x$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]$.

ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=\frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$.

ج) أدرس إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

د) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2.7;2.8[$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4) أ) عين إحداثي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) أنشئ (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) بإستخدام (C_f) و المستقيم (Δ) مثل دون الحساب الحدود u_0, u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1\leqslant u_n<\alpha$.

3) تحقق أن : $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ ثم إستنتج إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n).

تمرين رقم -88- Meziane Maths :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$, (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ ثم إستنتج أن f فردية .

2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$, ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب) إستنتج من أجل كل x من $]0;+\infty[$ أن : $1-\dfrac{2}{e^{x}+1}\leqslant\dfrac{1}{2}x$.

4) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(1-\frac{1}{2}x)]$ و أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

5) أنشئ المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

6) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1} \quad ,n\in\mathbb{N}\end{cases}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geqslant 0$.

ب) بين بإستعمال السؤال (3) أن : $u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}u_n$.

ج) بين أن (u_n) متتالية متناقصة , ماذا تستنتج ؟

د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

تمرين رقم -89- : Meziane Maths

I) f الدالة العدد المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x.e^{x^2-1}$ و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$(وحدة الطول $3Cm$).

1) بين من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن : $f(x)+f(-x)=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=(2x^2+1)e^{x^2-1}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f''(x)=2x(2x^2+3)e^{x^2-1}$.

د) أدرس إشارة $f''(x)$ مستنتجا أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب إحداثييها.

3) أ) بين أن : $1-e^{x^2-1}\leqslant 0$ من أجل $x\in[-1;1]$ ثم إستنتج إشارة الجداء $x(1-e^{x^2-1})$ على المجال $]-\infty;+\infty[$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ على $\mathbb{R}$.

4) أ) بين أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') متوازيين عند كل من النقطتين فاصلة كل منهما (-1) و (1).

ب) أكتب معادلة لكل من (T) و (T').

5) ارسم كل (T) , (T') , (Δ) و (C_f).

6) ناقش حسابيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x)=mx$ في $\mathbb{R}$.

II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=\dfrac{2}{3} \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad ,n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $0\leqslant u_n\leqslant 1$.

2) بإستعمال (C_f) و (Δ) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 , u_1 و u_2 دون الحساب ,ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n).

4) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

تمرين رقم -90- : Meziane Maths

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(1-x)e^{x}$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول نغيراتها.

2) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

3) تحقق أن : $1.27<\alpha<1.28$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4) تحقق أن : $e^{-\alpha}=\alpha-1$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=1+\dfrac{x}{e^{x}+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$(وحدة الطول $3Cm$).

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}+1)^2}$.

2) إستنتج غتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

3) أوجد نهايات الدالة f عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$, شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن $f(\alpha)=\alpha$ و $f(-\alpha)=0$.

5) أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=1$, فسر هذه النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$.

6) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-\alpha$.

7) أرسم (Δ) , (T) و (C_f) في المعلم السابق.

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+f(m)$.

III) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$

1) بإستعمال (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون الحساب.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

3) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4) إستنتج تقارب المتتالية (u_n).

5) أ) برهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $\alpha-u_{n+1}\leqslant\dfrac{\alpha-u_n}{e^{u_n}+1}$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\leqslant\alpha-u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}(\alpha-u_n)$.

ج) إستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\leqslant\alpha-u_n\leqslant\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

6) إستنتج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

تمرين رقم -91- Meziane Maths :

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{1-x}+\dfrac{1}{x}-2$.

1) بين أن $g(x)<0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

2) غستنتج جدول إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)=0$).

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(1-x)e^{1-x}-x^2+5x-3-2lnx$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أثبت : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

ب) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

3) أ) بين أن : $f'(x)=(x-2).g(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

ب) بين أن الدالة f مناقصة على $]0;1]$ و على $[2;+\infty[$ و متزايدة تماما على $[1;2]$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ (نقبل $f(2)=1.25$).

4) علما أن $f(3)=0.5$ و $f(4)=-1.9$ برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]3;4[$.

5) أنشئ (C_f) في المعلم السابق (نأخذ وحدة الطول $2Cm$).

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=m^2$.

x	1	2
$h(x)$	0	$h(2)$

III) 1) إنطلاقا من جدول تغيرات الدالة h (الجدول المقابل) بين أن : $f(x)\leqslant x$ لكل x من المجال $[1;2]$.

2) بين أن 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$ على المجال $[1;2]$.

IV) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$

1) بين بالتراجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\leqslant u_n\leqslant 2$.

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

3) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة, ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1-x^2(1-lnx)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) تحقق أن $g(1)=0$ ثم بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2;e[$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$ و نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من D_f فإن : $f'(x)=\dfrac{lnx}{x^2(1-lnx)^2}$.

3) أدرس إشارة $f'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أ) بين أنه من أجل كل x من D_f فإن : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-lnx)}$.

ب) برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ يقطع (C_f) في نقطتين فاصلة كل منهما 1 و α.

ج) بين أن : $f(x)-x\leqslant 0$ من أجل كل $x\in[1;\alpha]$ ثم أرسم (Δ) و (C_f).

5) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) حيث : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ ، $n\in\mathbb{N}$

أ) مثل الحدود u_0، u_1 و u_2 على محور الفواصل بإستعمال (Δ) و (C_f).

ب) برهن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

ج) برهن أن (u_n) متناقصة تماما مستنتجا أن (u_n) متقاربة.

د) أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x-2+ln(x^2+1)$ و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أحسب $f(2)$.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا : $f(x)=2x\left[1+\dfrac{ln(x^2)}{2x}\right]+ln(1+\dfrac{1}{x^2})-2$ ثم أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و الصورة $f(-2)$.

3) أ) عين عبارة $f'(x)$ ثم حدد إشارتها على $\mathbb{R}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) ليكن (T_β) المستقيم الذي معادلته $y=2x+\beta$ مع $(\beta\in\mathbb{R})$.

أ) عين قيمة β حيث يكون (T_β) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تحديد إحداثييها و نسمي هذا المماس بـ (Δ).

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (Δ).

ج) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $0.5<\alpha<1$.

5) أرسم كل من (Δ) و (C_f).

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة (1) $ln(x^2+1)=m+2$.

7) برهن أنه إذا كان λ و γ حلين للمعادلة (1) فإن : $(\gamma-\lambda)(\gamma+\lambda)=0$.

II) نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f_n(x)=2x-2+\dfrac{ln(x^2+1)}{n}$ مع $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

1) أحسب نهاية f_n عند $+\infty$.

2) بين أن الدالة f_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

3) أ) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $[0;+\infty[$.

ب) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0<\alpha_n<1$.

4) ا) حدد الوضع النسبي لكل من (C_{f_n}) و $(C_{f_{n+1}})$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم على المجال $[0;+\infty[$.

ب) إستنتج أن المتتالية (α_n) متزايدة تماما و أن $f_n(\alpha_{n+1})$.

ج) إستنتج أن (α_n) متقاربة.

5) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $\alpha_n = 1 - \frac{ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$.

ب) عين نهاية المتتالية (α_n).

تمرين رقم -94- : Meziane Maths

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $g(x) = x^2 - 2 + lnx$ و نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب نهايات الدالة g على أطراف مجال تعريفها.

2) أوجد $g'(x)$ ثم حدد إشارتها مع إستنتاج إتجاه تغير الدالة g.

3) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.25 < \alpha < 1.5$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g, مستنتجا إشارة $g(x)$.

4) أ) أوجد معادلة المماس (d) لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة α.

ب) أوجد حصر لـ β ترتيب نقطة تقاطع (d) مع محور التراتيب.

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث : $f(x) = x + \frac{1-lnx}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$, فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $\Delta : y = x$.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4) أ) أنشئ كل من (Δ), (T) و المنحنى (C_f) في المعلم السابق.

ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $mx + lnx - 1 = 0$.

5) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ) بإستعمال (C_f) و (Δ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\alpha \leqslant u_n \leqslant e$.

ج) برهن أن (u_n) متزايدة تماما ثم إستنتج تقارب (u_n).

د) أوجد نهاية المتتالية (u_n).

تمرين رقم -95- : Meziane Maths

f دالة عددية معرفة على المجال $[0;+\infty[$ حيث : $f(x) = x.e^{-x}$, و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, حيث (وحدة طول محور الفواصل $2Cm$ و وحدة طول محور التراتيب $3Cm$).

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) أنشئ المنحنى (C_f).

2) نسمي $f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة للدالة f من الرتبة n.

أ) أحسب $f"(x)$, $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$.

ب) برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$.

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geqslant 0$.
ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .
ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة, ثم أحسب نهايتها.
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = ln(u_n)$ و $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - v_{n+1}$.
ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 - v_{n+1}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين رقم -96- Meziane Maths :

I) الجدول التالي يمثل جدول تغيرات الدالة g حيث : $g(x) = ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$0^+ \nearrow +\infty$	//////	//////	$+\infty \searrow 0^+$

من جدول التغيرات الدالة g :
1) حدد D مجموعة تعريف الدالة g.
2) حدد إشارة $g'(x)$ مع التعليل (دون إيجاد عبارة $g'(x)$).
3) أ) أوجد نهاية الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف D.
ب) إستنتج معادلات المستقيمات المقاربة لبيان الدالة g.
4) حدد إشارة $g(x)$ على المجال D.

II) نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x) = xln(1+\frac{1}{x}) & , x \in]-\infty[\cup]0;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2Cm$).
1) أ) برهن أن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$ على اليمين.
ب) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0 = 0$ على اليمين و فسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.
2) أ) أوجد عبارة $f'(x)$ من أجل كل $x \in]-\infty[\cup]0;+\infty[$.
ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها.
3) أ) بوضع $x = \frac{1}{t}$ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, فسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x)$.
ب) شكل جدول تغيرات الدالة f.
4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر بالنقطة $(-1;0)$ يطلب تحديد a فاصلة نقطة التماس.
ب) تحقق أن معادلة المماس (T) هي : $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$.
5) أرسم كل من المستقيمات المقاربة , (T) و المنحنى (C_f).
6) نعتبر المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx + m$ مع $m \in \mathbb{R}$.
أ) بين أن (Δ_m) يشمل النقطة $(-1;0)$ مهما كان $m \in \mathbb{R}$.
ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $1 + \frac{1}{x} = e^{\frac{m}{x}+m}$.

III) بين أنه من أجل كل $x \in D^* =]-\infty[\cup]0;+\infty[$ فإن : $(-x-1) \in D^*$.
2) نضع $g(x) = f(-x-1)$ بين أن : $g(x) = (x+1)ln(1+\frac{1}{x})$.
3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $f(n) < 1 < g(n)$.
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\begin{cases} u_n = (1+\frac{1}{n})^n \\ v_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \end{cases}$

أ) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n < e < v_n$.
ب) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n < \frac{e}{n}$.
ج) إستنتج النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$.

تمرين رقم -97- Meziane Maths :

I) n عدد طبيعي غير معدوم .
نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x) = (2x+1)^n.e^x$.
و نسمي (C_{f_n}) التمثيل البياني لـ f_n في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب كل من $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f_n'(x) = (2x+1)^{n+1}.e^x.(2x+2x+1)$.

ب) إستنتج إتجاه تغير $f_1(x)$ (من أجل $n=1$).

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f_n من أجل $n \in \mathbb{N}^*\{1\}$ (نميز حالتين n زوجي و n فردي).

د) شكل جدول تغيرات الدالة f_n في حالة n زوجي و في حالة n فردي.

3) بين أن (C_{f_n}) يشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_{f_n}) و $(C_{f_{n+1}})$.

5) لتكن النقطة M_n من (C_{f_n}) فاصلتها $x_n = -n - \frac{1}{2}$ عين مجموعة النقط M_n لما n تمسح $\mathbb{N}^*$.

6)أ) أكتب معادلة المماس (T_n) للمنحنى (C_{f_n}) عند نقطة منه ذات الفاصلة 0.

ب) عين قيمة n التي من أجلها (T_n) يشمل $(-1;-4)$ ثم معادلة (T_n) من أجل قيمة n المحصل عليها.

7) أنشئ كل من (T_1) و (C_{f_1}) ثم (T_2) و (C_{f_2}) في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

8) m وسيط حقيقي حيث : $m \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ ، ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f_2(x) = f_1(m)$ مع العلم أن : $f_2\left(\frac{-5}{2}\right) = f_1(0.1)$.

II) نعتبر المتتالية (α_n) المعرفة بـ : $f_n'(\alpha_n) = 0$ حيث $\alpha_n \neq \frac{-1}{2}$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

1) أحسب α_1 و α_2.

2) أوجد α_n بدلالة n ثم حدد طبيعتها و إتجاه تغيرها .

3) بملاحظة أن : $1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1) = \frac{1\times2\times3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}$.

- أحسب الجداء P_n حيث : $P_n = \alpha_1\times\alpha_2\times\alpha_3\times\cdots\times\alpha_n$.

تمرين رقم -98- Meziane Maths :

I) n عدد طبيعي غير معدوم.

لتكن الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} & ,x\neq0 \\ f_n(0)=0 & ,n\in\mathbb{N}\end{cases}$

و نسمي (C_{f_n}) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أدرس إستمرارية f_n عند $x_0 = 0$.

ب) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f_n عند $x_0 = 0$ من اليمين ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند $+\infty$ ثم $-\infty$.

ب) أحسب $f_n'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم حدد إشارتها و إتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) نعتبر $A_n(x_n;y_n)$ نقطة من (C_{f_n}) حيث : $x_n \neq 0$ و $f_n'(x_n) = 0$, عين المحل الهندسي للنقطة A_n لما n يمسح $\mathbb{N}^*$.

ب) لبن أن المنحنى (C_{f_n}) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ_n) معادلته $y = x - n$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ج) أدرس الوضع النسبي لكل من (C_{f_n}) و $(C_{f_{n+1}})$.

4) أ) شكل جدول تغيرات $f_1(x)$ (أي من أجل $n=1$).

ب) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث : $g(x) = f_1(x) - x + 1$.

- أوجد $g'(x)$ ثم $g"(x)$.

- أوجد إشارة $g"(x)$ ثم سكل جدول تغيرات $g'(x)$ ثم إستنتج إشارة $g'(x)$.

- شكل جدول تغيرات g ثم إستنتج إشارة $g(x)$.

- إستنتج وضعية (C_{f_1}) بالنسبة للمقارب (Δ_1).

- أنشئ (C_{f_1}) في المعلم السابق.

II) في هذا الجزء نهتم بحل المعادلة $f_n(x) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

1) تحقق أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n يحقق $f_n(u_n) = 1$ ثم بين أن : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_n+1}}$.

2) تحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $u_n > 1$ و أن u_n حلا للمعادلة $xlnx = n$ على $]0;+\infty[$.

3) إعتمادا على رتابة الدالة $x \mapsto xlnx$ بين أن (u_n) غير محدودة من الأعلى.

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $f_n(u_{n+1}) > 1$ و $f_{n+1}(u_n) > 1$.
5) بين أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين رقم −99− Meziane Maths :

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = ln(1+3e^x)$ و نسمي (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
1) أ) أدرس إتجاه تغير الدالة f .
ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
2) أ) برهن أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + ln3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
ب) حدد الوضعية النسبية بين (C_f) و (d).
3) أرسم كل من (d) و المنحنى (C_f) و أرسم كذلك المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ,n \in \mathbb{N}$
1) أ) مثل الحدود u_0 , u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 على محور الفواصل و ذلك بإستعمال (C_f) و المستقيم (Δ).
ب) ضع تخمينا حول رتابة المتتالية (u_n) و تقاربها.
2) أ) برهن بطريقتين مختلفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - u_n \geqslant ln3$.
ب) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).
ج) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n \geqslant ln(3^n)$.
د) إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{2} + e^{u_n}$.
1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 3$ مع تحديد حدها الأول .
2) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n = ln(3^{n+1} - 1) - ln2$.
3) بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{nln3} = 1$.
4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = e^{u_0} + e^{u_1} + e^{u_2} + \cdots + e^{u_n}$.

تمرين رقم −100− Meziane Maths :

I) g دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x - 2xlnx$.
1) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3) أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ حيث : $\begin{cases} f(x) = x - x^2ln(x) & ,x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
و (C_f) تمثيلها البياني.
1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) أ) برهن أن f مستمرة عند 0 بقيم أكبر (على اليمين).
ب) برهن أن f تقبل الإشتقاق عند 0 لقيم أكبر مع تحديد العدد المشتق من اليمين $f'_d(0)$.
ج) إستنتج معادلة نصف المماس (Δ) لـ (C_f) عند 0.
3) أ) بين أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = g(x)$.
ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4) أ) أدرس إشارة $d(x) = x^2lnx$ على المجال $]0;+\infty[$.
ب) إستنتج الوضع النسبي للماس (Δ) و (C_f).
5) أ) برهن أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]\sqrt{e};2[$.
ب) إستنتج أن : $\alpha^\alpha = e$.
ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة ذات الفاصلة α معادلته من الشكل : $y = (-1-\alpha)x + \alpha(1+\alpha)$.

6) أرسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$(وحدة الطول $4Cm$) كل من (Δ) , (T) و المنحنى (C_f).

III) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) أ) مثل الحدود بإستعمال (C_f) و المستقيم (Δ) u_0 , u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل (مبرزا خطوط الإنشاء)

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $0 < u_n \leqslant 1$.

3) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.