

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية المعادلة ذات المجهول الثنائية (x, y) التالية:

$$2011x - 1432y = 31 \dots\dots\dots (1)$$

- أ- اثبت أن العدد 2011 أولي.
- ب- باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1)
- (2) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7 ثم جد باقي القسمة الاقليدية للعدد $1444^{2020^{1954}}$ على 7.
- ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $5[7] \equiv 2022^{2n} + 1444^n + 1962^n$
- (3) N عدد طبيعي يكتب $2\gamma\alpha\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α, β, γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متناقصة تماما والثنائية (β, γ) حل لـ (1)
- عين α, β, γ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 - \ln x$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها
- ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين a و b حيث $e^{-1} < a < e^{-2}$ و $3 < b < 4$
- د- أنشئ (C_f)

(2) بين أن كل المستقيمت الموازية للمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ تقطع (C_f) في نقطة وحيدة

(3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = m^2 x$ حلا وحيدا .

(4) لتكن النقطتان M و N من المنحنى (C_f) فاضلتهما على الترتيب x و $\frac{1}{x}$.

أ- عين بدلالة x احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[MN]$

ب- استنتج أن النقطة I تنتمي الى مستقيم يوازي (D)

(5) لتكن الدالة Φ المعرفة على المجال $]3; 4[$ بـ: $\Phi(x) = x - f(x)$

أ- بين أنه من أجل $3 \leq x \leq b$ فإن: $\Phi(x) \geq x$ و $3 \leq \Phi(x) \leq b$

ب- احسب التكامل $I = \int_3^b (\Phi(x) - x) dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج- بين أنه من أجل كل $x \in [3; b]$ فإن: $|I| \leq (b - 3)^2$

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ :}$$

(1) بإستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \geq n \quad \bullet$$

$$u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2 \quad \bullet$$

(2) لتكن (v_n) و (w_n) متتاليتين معرفتين على \mathbb{N}^* كالتالي : $v_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ و $w_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$

أ- بين أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n - v_n = \frac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$

ب- إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n < w_n$ و $0 < w_n - v_n < \frac{1}{n}$

ج- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{2n} \times u_{2n+2}}$ ، $v_n = \frac{1}{w_n} - 1$

د- إستنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n) .

هـ - بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) متجاورتان ، ثم أحسب نهاية كل منهما

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

f / \mathbb{I} و دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

(1) أ- بين أن الدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

ج- بين أنه من أجل كل $x > 0$: $e^{-x}(x+1) - 1 < 0$

د- إستنتج اتجاه تغير الدالة f

(2) n عدد طبيعي غير معدوم.

ولتكن الدالة F_n المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $F_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^{-t} dt$

أ- بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $F_1(x)$

ب- بين أنه من أجل كل $n \geq 1$: $F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}$ ، و $F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}$

د- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $-\frac{x}{2} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$

هـ- احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$ وفسر النتيجة.

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx \quad \text{ب-} \quad \text{متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \quad \text{/II}$$

(1) أ- احسب الحد الأول u_0

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على \mathbb{N} ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} + u_n = f(n)$ ثم احسب $\lim u_n$.

$$(2) \quad (S_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \text{ب-} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^{-x}}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{1}{1+e^x} \quad \text{أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x$$

$$\text{ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n > 1 \quad S_n = (-1)^{n-1} u_n + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right) - \ln 2$$

ج- بين أن (S_n) متقاربة واحسب نهايتها.

$$\text{/III} \quad g \text{ دالة معرفة على } [0; +\infty[\quad \text{ب-} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & ; x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

(C_g) المنحنى البياني للدالة g في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(0; \bar{i}, \bar{j})$

$$(1) \quad \text{أ- بين أنه من أجل كل } x \geq 0 \quad 1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$$

ب- بين أن الدالة g مستمرة على يمين $x_0 = 0$

ت- ادرس قابلية اشتقاق الدالة g على يمين $x_0 = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\text{ج- بين أنه من أجل كل } x \in]0; +\infty[\quad 0 \leq g(x) \leq \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt$$

د- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$(4) \quad \text{أ- بين أنه من أجل كل } x \in]0; +\infty[\quad \text{قابلة للاشتقاق ولدينا: } g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g

ج- أنشئ جدول تغيرات الدالة g

د- اكتب معادلة المماس (Γ) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$

هـ- أنشئ كل من (Γ) و (C_g)