الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسّية

①

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 11

التمريـــــن

(I) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

3) أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- عين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ – برر اجابتك.

4) أ- بين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

أ- بين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7) بين أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

8) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .

9) مثل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ، (C_f)

10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m عدد واشارة المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|)=\ln(|m|)x+2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=f(3x-2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

1) ماهو اتجاه تغير الدالة g ؟

2) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=0$ ثم بين أن:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=3f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

4) تحقق من:

$$y=\frac{3\alpha^2}{4}x-\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

هي معادلة للمستقيم (d).

حل التمريـــن

(I)

1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x-2e^x+3x+6}{e^x+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(x-2+\frac{3x+6}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-2+\frac{3x+6}{e^x}}{1+\frac{3}{e^x}}\right] = +\infty$$

2) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x+3) - e^x(4e^x)}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x+3)^2+12e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

$$= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

3) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ولدينا

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$
$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها ، اذن :

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ب- تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية وتغير اشارتها

ومنه $f''(\ln 3) = 0$

4) أ- تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_1] &= \lim_{x\to-\infty}\left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} - x + 2\right]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{4e^x}{e^x+3}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب- تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_2] &= \lim_{x\to+\infty}\left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} - x + 2\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[4 - \frac{4e^x}{e^x+3}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12}{e^x+3}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- <u>الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_1) :</u>

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$: لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x+3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة البسط

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y_1$	$-$	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	

- <u>الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_2) :</u>

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_2]$: لدينا:

$$f(x) - y_2 = 4 - \frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{12}{e^x+3} > 0$$

ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	

6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0)\\ &= \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3}\right)^2 (x) + 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0+3}\\ &= \frac{1}{2}x + 1\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

7) تبيين أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

تذكير

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$ أو $$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

- نبين أن $(\ln 3 + x) \in D_f$ و $(\ln 3 - x) \in D_f$:

لدينا: $x \in D_f$ معناه $x \in]-\infty;+\infty[$

ومنه $(\ln 3 + x) \in]-\infty;+\infty[$ و $(\ln 3 - x) \in]-\infty;+\infty[$

- نبين أن $f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = 2\ln 3$

$$f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = \left(\ln 3 + x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3}\right) + \left(\ln 3 - x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3}\right)$$
$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} + \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3}\right)$$
$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{12e^{x}}{3e^{x} + 3} + \frac{12e^{-x}}{3e^{-x} + 3}\right)$$
$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^{x}}{e^{x} + 1} + \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1}\right)$$
$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{4 + 4e^{x} + 4 + 4e^{-x}}{1 + e^{x} + e^{-x} + 1}\right)$$
$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2}\right)$$
$$= 2\ln 3$$

8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$

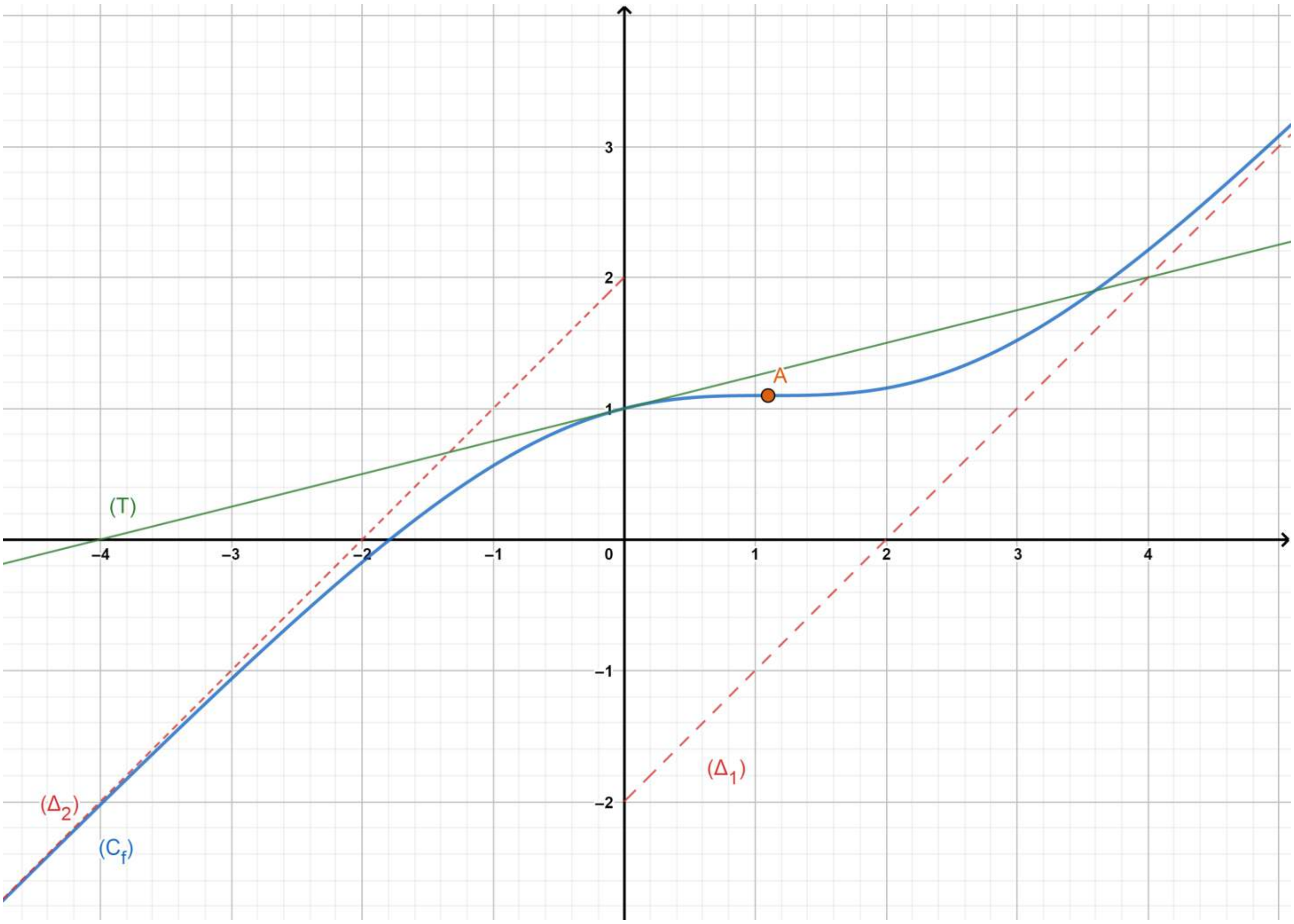
- حصر α :

α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



10) المناقشة البيانية:

$$f(-|x|)=\ln(|m|)x+2$$

نضع $h(x)=f(-|x|)$

ومنه:

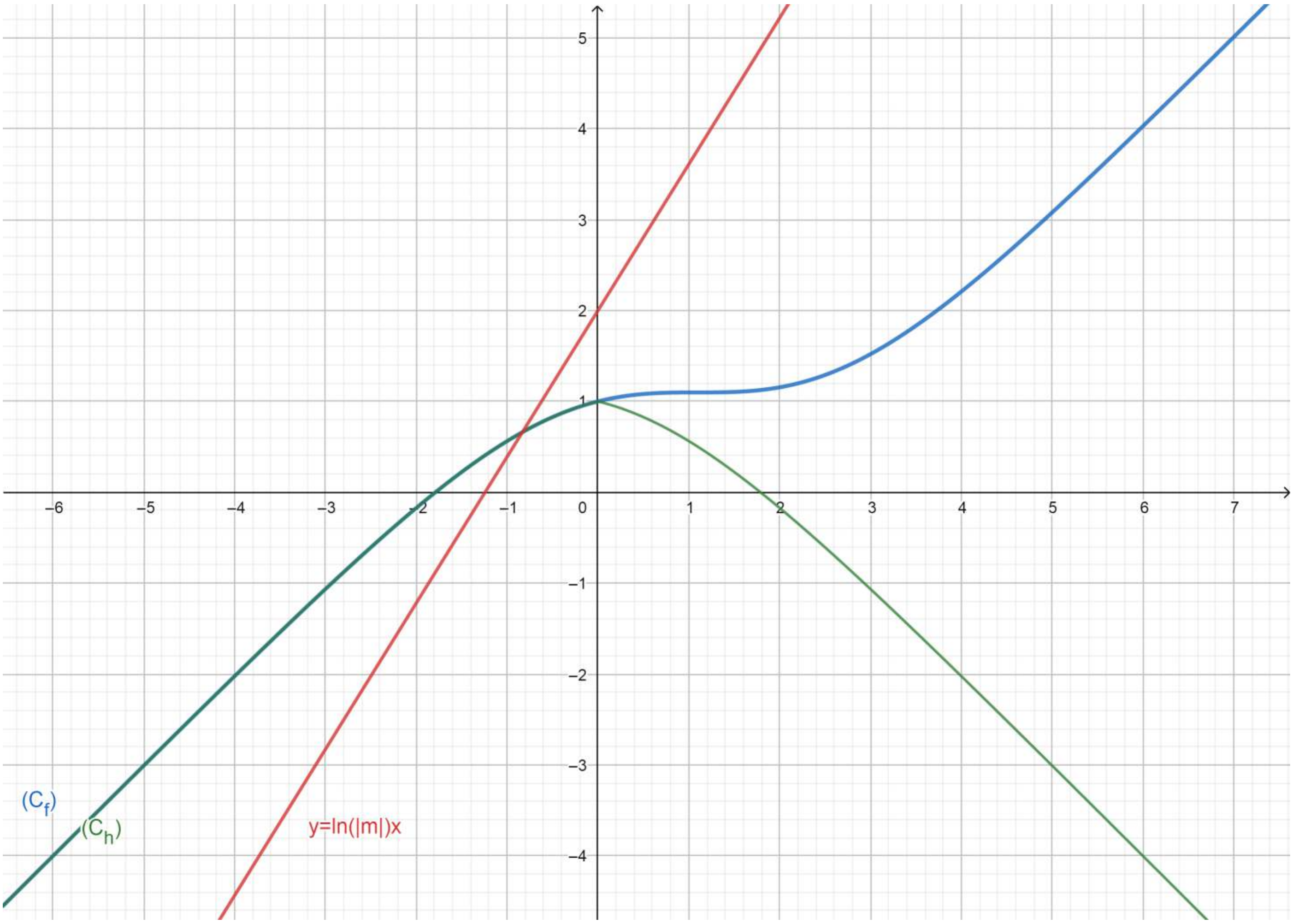
$$h(x)=\begin{cases} f\big(-(x)\big); x\geq 0 \\ f\big(-(-x)\big); x\leq 0 \end{cases}=\begin{cases} f(-x); x\geq 0 \\ f(x); x\leq 0 \end{cases}$$

لما $0 \leq x$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $0 \geq x$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) و المنحني (C_h) و المستقيم $y=\ln|m|\,x$



ومنه المناقشة كالآتي:

لما: $\ln|m| \leq 1$ أي: $|m| \leq e$ أي: $-e \leq m \leq e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $\ln|m| > 1$ أي: $|m| > e$ أي لما: $m \in]-\infty; e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

(II) لدينا: $g(x) = f(3x-2)$

1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

لدينا الدالة k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزادية تماما على $\mathbb{R}$

2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$:

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبيين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x-2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned}(d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)+g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= 3f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= 3f'(\alpha)x-f'(\alpha)(a+2)\end{aligned}$$

4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha)=0 &\Rightarrow \alpha+2-\frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3}=0\\ &\Rightarrow \alpha+2=\frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3}\\ &\Rightarrow (\alpha+2)(e^{\alpha}+3)-4e^{\alpha}=0\\ &\Rightarrow ae^{\alpha}+3a+2e^{\alpha}+6-4e^{\alpha}=0\\ &\Rightarrow e^{\alpha}(a-2)=-(3a+6)\\ &\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{3\alpha+6}{2-\alpha}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}(d): y &= 3f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= 3\left(\frac{e^{\alpha}-3}{e^{\alpha}+3}\right)^2\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= 3\left(\frac{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha}-3}{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha}+3}\right)^2\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= \frac{3\alpha^2}{4}x-\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}\end{aligned}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►