الخليل للرياضيات

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات

سلسلة تمارين رقم [00]

حول:

النهايات ودراسة الدوال

[مع حلول مقترحة]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[02 أوت 2021]

التمرين 01 :

من أجل دالة f، احسب النهايات التالية:

❶ $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$

❷ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{x-2}\right)$

❸ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$

❹ $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$

❺ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$

❻ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$

❼ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$

❽ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x}+\dfrac{3x+1}{x^2+x}\right)$

❾ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

حل التمرين 01 :

حساب النهايات:

❶
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)=\frac{\sqrt{4}}{1-4}$$
$$=\boxed{\frac{2}{3}}$$

---

❷
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(2-x)(2+x)}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-(x-2)(2+x)}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(-(2+x)\right)$$
$$=-(2+2)$$
$$=\boxed{-4}$$

---

❸
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-2)(x-1)}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-(x-2)(1-x)}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(-(x-2)\right)$$
$$=-(1-2)$$
$$=\boxed{1}$$

❹ $$\lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)=\lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\right)$$
$$=\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{3+\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{1}{3+\sqrt{3}}$$
$$=\boxed{\frac{1}{6}}$$

---

❺ $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\frac{1^2+1}{|1^2-1|+1}$$
$$=\boxed{2}$$

---

❻ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\frac{0^2+0}{|0^2-1|+1}$$
$$=\frac{0}{2}$$
$$=\boxed{0}$$

---

❼ $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\frac{(-1)^2+(-1)}{|(-1)^2-1|+1}$$
$$=\frac{0}{1}$$
$$=\boxed{0}$$

---

❽ $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x+2}{x^2+x}+\frac{3x+1}{x^2+x}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2}{2}$$
$$=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

---

❾ $$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$$
$$=\sqrt{1^2-1}+\sqrt{1^2-3+2}$$
$$=\boxed{0}$$

التمرين 02 :

عيّن النهايات التالية:

❶ $$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

❷ $$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)$$

❸ $\lim_{x \to +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x}\right)^3$ ❹ $\lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}\right)$

---

❺ $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x}{x+3}}\right)$ ❻ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}\right)$

---

❼ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cos x}{x - 1}\right)$ ❽ $\lim_{x \to -\infty} \left(3x + 4 + \frac{\sin x}{x}\right)$

حل التمرين 02 :

تعيين النهايات التالية:

❶ $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{x - 1}}\right) = \boxed{+\infty}$

لأنّ:

$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \left(\sqrt{x} - 1\right) = 0^+$ و $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

---

❷ $\lim_{\substack{> \\ x \to 3}} \left(\frac{\sqrt{x + 1}}{(x - 3)^2}\right) = \boxed{+\infty}$

لأنّ:

$\lim_{\substack{> \\ x \to 3}} \left((x - 3)^2\right) = 0^+$ و $\lim_{\substack{> \\ x \to 3}} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{0^+}\right) = +\infty$

---

❸ $\lim_{x \to +\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{x}\right)^3 = \boxed{+\infty}$

لأنّ: $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

❹ $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)=\frac{0}{0}\ (\text{ح.ع.ت})$$

إزالة حالة عدم تعيين:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)$$
$$=\boxed{\frac{1}{4}}$$

---

❺ $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{2x}{x+3}}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{2x}{x}}\right)$$
$$=\boxed{\sqrt{2}}$$

---

❻ $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)$$
$$=\boxed{0}$$

---

❼ $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\cos x}{x-1}\right)=0$$

لأنّ:

$$-1\leq \cos x\leq 1$$

---

❽ $$\lim_{x\to -\infty}\left(3x+4+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to -\infty}(3x)$$
$$=-\infty$$

لأن:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0 \text{ و } -1\leq \sin x\leq 1$$

التمرين 03 :

برهن أنّ المنحني الممثل للدالة f على المجال I يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات التالية:

❶	$f(x)=\frac{1}{x-2}$	$I=]2;+\infty[$ ،
❷	$f(x)=2-\frac{1}{x^2}$	$I=]-\infty;0[$ ،
❸	$f(x)=\frac{2x}{1-x}$	$I=]1;+\infty[$ ،
❹	$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+x-2}$	$I=]-\infty;-2[$ ،
❺	$f(x)=\frac{-x+1}{x^2+1}$	$I=\mathbb{R}$ ،
❻	$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$	$I=\mathbb{R}$ ،

حل التمرين 03 :

❶ لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=2$

---

❷ لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=2$

وآخر مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=0$

---

❸ لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{-x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{2x}{1-x}\right)=-\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=-2$

وآخر مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=1$

4 لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right)=1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ <}}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=+\infty \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=1$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=-2$

---

5 لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x+1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-x+1}{x^2+1}\right)=0 \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=0$

---

6 لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right)=0 \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=0$

التمرين 04 :

برهن أنّ المستقيم (D) مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

1 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ ، $I=]2;+\infty[$ ، $D: y=x$

2 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ، $I=]-\infty;-1[$ ، $D: y=x-1$

3 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$ ، $D: y=x+4$

4 $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$ ، $D: y=x+2$

حل التمرين 04 :

1 لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{x^2 - 1}{x} - x \\ &= \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} \\ &= \frac{-1}{x} \end{aligned}$$

ومنه:

x	$-\infty$ $\quad$ 0	2 $\quad$ $+\infty$
$f(x) - y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)

ومنه (C_f) يقع تحت (D) في المجال I

---

2 لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x + 1} - (x - 1) \right) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - (x - 1)(x + 1)}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 1}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x + 1} = 0 \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

ومنه:

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

---

3 لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x-2}-(x+4)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-(x+4)(x-2)}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-x^2+2x-4x+8}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{11}{x-2}\right)$$
$$=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+4$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{11}{x-2}=0\Rightarrow x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$$

ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ 2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)

ومنه (C_f) فوق (D) في المجال I

---

4 لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1}{x^2}-(x+2)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1-x^2(x+2)}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1-x^3-2x^2}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=0\Rightarrow x\neq 0$$

ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

التمرين 05 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
2. اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

حيث: a، b و c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

3. استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)
4. حدد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل.
5. مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحني (C_f) .

حل التمرين 05 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

- $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

- $$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=+\infty$$

لأنّ:

$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}(x+1)=0^-$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{0^-}\right)=+\infty$.

- $$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=-\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)$$

$$= +\infty$$

❷ اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x+1} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2 + x(a+b) + b + c}{x+1} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

أي:

$$f(x) = x - \frac{3}{x+1}$$

- استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

بما أنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = -\infty$

فإنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{3}{x+1} - x\right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{3}{x+1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x$.

❸ تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - x = \frac{-3}{x+1} &\Rightarrow f(x) - x = \frac{3}{-x-1} \\ &\Rightarrow -x - 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow x \neq -1 \end{aligned}$$

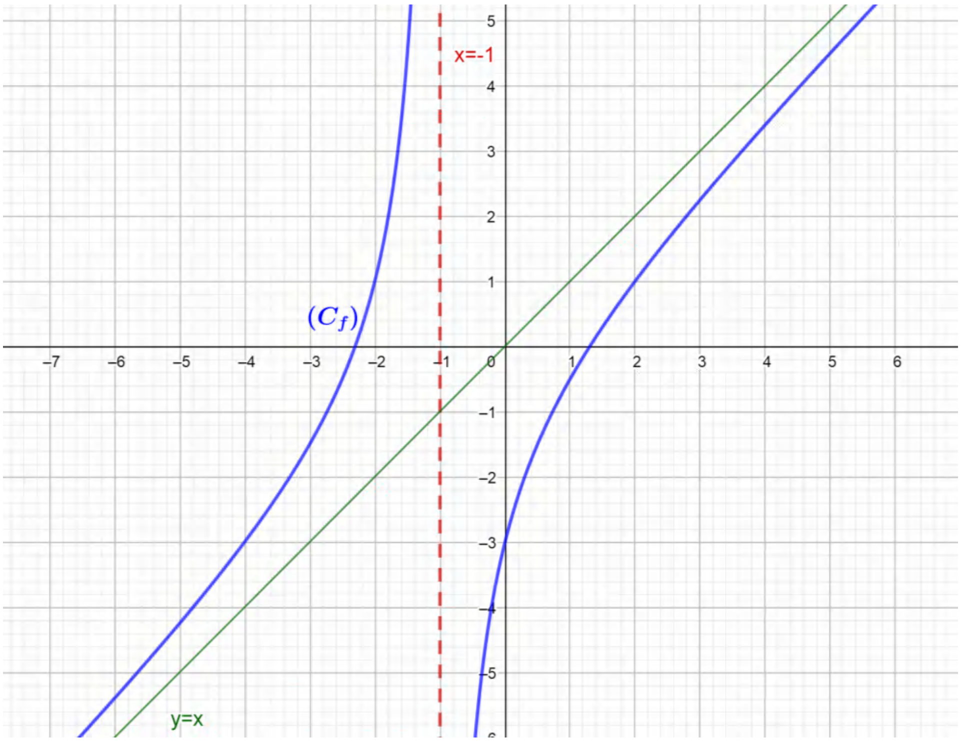
ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)

❹ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحني (C_f) .



التمرين 06 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$، وليكن ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.

❷ عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات.

❸ برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

❹ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

❺ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

❻ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$.

حل التمرين 06 :

❶ دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- تعيين النهايات:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) \right)$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0$$
$$\Rightarrow 3x(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ \text{أو} \\ x + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases}$$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

❷ تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

تذكير

لتعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$.
- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب نقوم بحساب $f(0)$.

- مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

لدينا:

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$$

نلاحظ أنّ 1 حل للمعادلة $f(x) = 0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b$$
$$\Rightarrow f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a - 1 = 3 \\ b - a = 0 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = (x-1)(x^2+4x+4)$$

ومنه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+4x+4) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x - 1 = 0$ ومنه: $x = 1$

ولدينا: $x^2 + 4x + 4 = 0$: لحلها نستعمل المميز Δ:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x = -\frac{4}{2}$ أي $x - 2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي : $s = \{1; -2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور التراتيب:

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

إذن (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0; -4)$

❸ برهان أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

تذكير

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

لدينا:

$x \in \mathbb{R}$ معناه: $-\infty < x < +\infty$ معناه: $-\infty < -x < +\infty$ معناه $-\infty < \underbrace{2(-1) - x}_{2\alpha - x} < +\infty$

معناه $(2(-1) - x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$f(2(-1)-x)+f(x)=(-2-x)^3+3(-2-x)^2-4+x^3+3x^2-4$$
$$=-(-2-x)^2(2+x)+3(2+x)^2-8+x^3+3x^2$$
$$=-(4+x^2+4x)(2+x)+12+3x^2+12x-8+x^3+3x^2$$
$$=-8-4x-2x^2-x^3-8x-4x^2+4+6x^2+12x+x^3$$
$$=-4$$
$$=2(-2)$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

❹ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

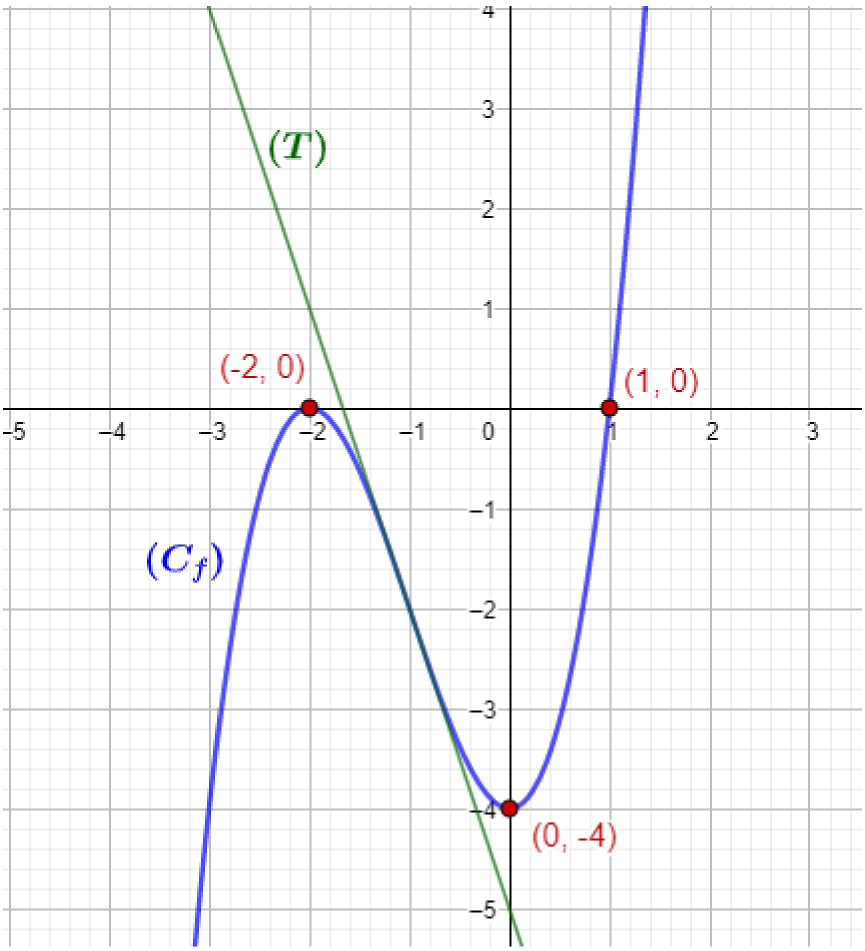
$$(T): y=f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)$$
$$(T): y=\big(3(-1)^2+6(-1)\big)(x+1)+(-1)^3+3(-1)^2-4$$
$$(T): y=-3x-3-2$$
$$(T): y=-3x-5$$

ومنه معادلة المماس (T) هي $y=-3x-5$.

❺ التمثيل البياني كل من (T) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الاحداثيات.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y=-3x-5$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



الخليل للرياضيات

6 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x^3+3x^2-4-m=0 \Rightarrow f(x)=m$$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=m$ وعليه المناقشة أفقية:

لما	$m<-4$	أي	$x<-4$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما	$m=-4$	أي	$x=-4$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر مضاعف
لما	$-4<m<0$	أي	$-4<x<0$	المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب
لما	$m=0$	أي	$x=0$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب
لما	$m>0$	أي	$x>0$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

التمرين 07 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$$

حيث a و b ، و(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1 عين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .

2 نفرض أنّ $a=-1$ ، $b=1$:

أ/ ادرس تغيرات الدالة f.

ب/ احسب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$.

ج/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

د/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ).

ه/ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

حل التمرين 07 :

1 تعيين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 :

الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 معناه:

$$\begin{cases} f(3)=-8 \\ f'(3)=0 \end{cases}$$

لدينا:

$$f'(x)=x^2+2ax-3$$

ومنه:

الخليل للرياضيات

$$f'(3)=0 \Rightarrow 3^2+2a(3)-3=0$$
$$\Rightarrow 6a=-6$$
$$\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

و لدينا:

$$f(3)=-8 \Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3+a(3)^2-3(3)+b=-8$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3+(-1)(3)^2-3(3)+b=-8$$
$$\Rightarrow 9-9+9+b=-8$$
$$\Rightarrow \boxed{b=1}$$

إذن:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$$

❷ نفرض أنّ $a=-1$ ، $b=1$:

أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

- تعيين النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right)$ $=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)=+\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x)=x^2-2x-3$$

لدينا:

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز Δ:

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(-3)=16$$

ومنه:

$$x=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2}=3$$

أو

$$x=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2}=-1$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f'(x)=0$ هي : $s=\{-1;3\}$

- <u>جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

-

ب/ حساب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$:

- $f(5)=\frac{1}{3}(5)^3-(5)^2-3(5)+1=\frac{8}{3}$
- $f(0)=\frac{1}{3}(0)^3-(0)^2-3(0)+1=1$
- $f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=\frac{8}{3}$
- $f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)^2-3(-2)+1=\frac{1}{3}$

ج/ كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 :

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$(T): y=(1^2-2(1)-3)(x-1)-\frac{8}{3}$$
$$(T): y=-4x+4-\frac{8}{3}$$
$$(T): y=-4x+\frac{4}{3}$$

ومنه معادلة المماس (Δ) هي: $y=-4x+\frac{4}{3}$.

د/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ):

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)-y_{(\Delta)} &= \frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1+4x-\frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3} &= (x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma) \\ &= \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x-\alpha x^2-\beta x-\gamma \\ &= \alpha x^3+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x-\gamma \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta - \alpha = -1 \\ \gamma - \beta = 1 \\ -\gamma = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = (x-1)\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(x-1)(x^2 - 2x + 1)$$
$$= \frac{1}{3}(x-1)(x-1)^2$$
$$= \frac{1}{3}(x-1)^3$$

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

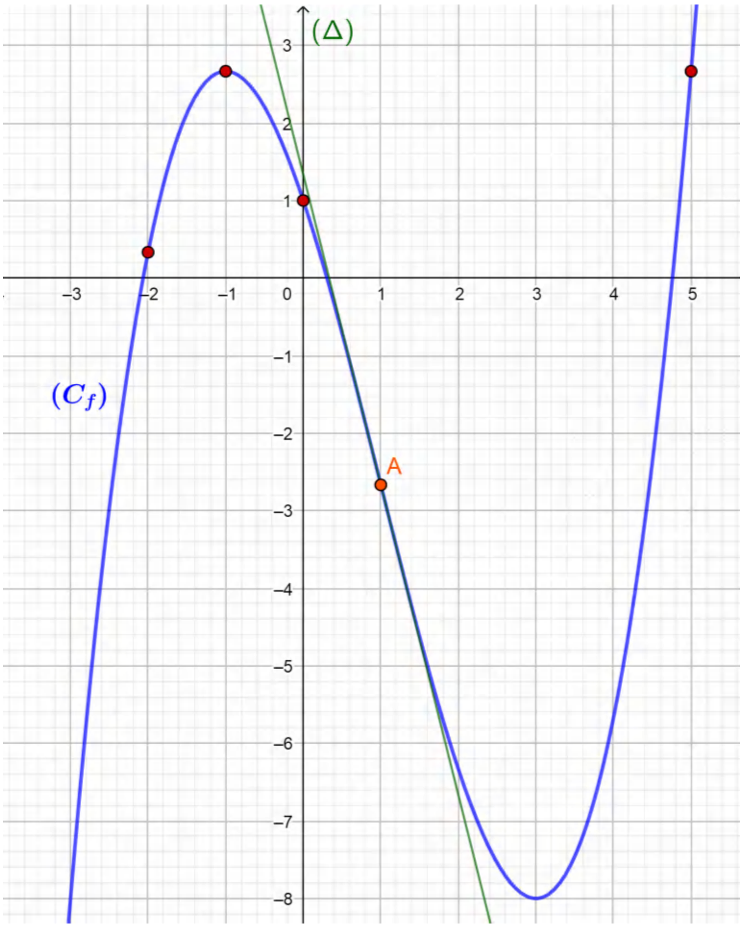
ومنه الوضعية النسبية:

- (C_f) فوق Δ لما: $x \in]1; +\infty[$.
- (C_f) يقطع Δ لما: في النقطة A ذات الاحداثيات $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$
- (C_f) تحت Δ لما: $x \in]-\infty; 1[$.

ه/ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعيّن بعض النقط المساعدة $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ و $f(5)$.
- نعيّن النقطة A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمماس (Δ)
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y = -4x + \frac{4}{3}$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



التمرين 08 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y=x-3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.
2. ادرس تغيرات الدالة f.
3. اثبت أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2).
4. مثّل بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ، ثم المنحني (C_f) .
5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)+3x-m=0$.
6. g دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$:

أ/ بين أنّ الدالة g زوجية.

ب/ ادرس قابلية اشتقاق g عند 0.

ج/ بيّن أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم مثّل بيانيا (C_g) في المعلم السابق.

حل التمرين 08 :

❶ تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c:

لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3. معناه:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c-(x-3)(x-2)}{x-2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c-x^2+2x+3x-6}{x-2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a-1)x^2+(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0$$

هذه النهاية لا تحقق إلا إذا كان: $(a-1=0)$ ومنه $\boxed{a=1}$

وعليه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(b+5)=0$$

$$\Rightarrow b+5=0$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-5}$$

لدينا:

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2ax^2-4ax+bx-2b-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{ax^2-4ax-2b-c}{(x-2)^2}$$

ومنه:

$$f'(3)=0 \Rightarrow \frac{a(3)^2-4a(3)-2b-c}{\left((3)-2\right)^2}=0$$

$$\Rightarrow 9a-12a-2b-c=0$$

$$\Rightarrow -3a-2b-c=0$$

بتعويض قيمة a و b نجد:

$$\Rightarrow -3(1) - 2(-5) - c = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f:

- تعيين النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}}\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}\right) = -\infty$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}}(x-2) = 0^- \text{ و } \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}}\left(\frac{6}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}}\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}\right) = +\infty$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}}(x-2) = 0^+ \text{ و } \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}}\left(\frac{6}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}\right) = +\infty$$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2} = \frac{(1)x^2 - 4(1)x - 2(-5) - (7)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

لحل المعادلة السابقة نستعمل المميز Δ:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

ومنه:

$$x = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$$

أو

$$x = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي: $s = \{1; 3\}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

❸ اثبات أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3):

(C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) معناه أنّ المعادلة $f'(x) = -3$ تقبل حلان:

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = -3 &\Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = -3 \\ &\Rightarrow x^2-4x+3+3(x-2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2-4x+3+3x^2+12-12x = 0 \\ &\Rightarrow 4x^2-16x+15 = 0 \end{aligned}$$

نحسب المميز Δ ونستخرج الحلين، فنجد: $\Delta = 16$ ومنه:

$$x_2 = \frac{5}{2} \quad ; \quad x_1 = \frac{3}{2}$$

ولدينا:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad ; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

إذن احداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 مع المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب:

$$M_2\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \quad ; \quad M_1\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$$

ولدينا:

$$(D_1): y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(D_1): = \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\left(\frac{3}{2}\right)+3}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)-2\right)^2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+7}{\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$(D_1): = -3x+\frac{9}{2}-\frac{7}{2}$$

$$(D_1): = -3x+1$$

$$(D_2): y = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\left(\frac{5}{2}\right)\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$(D_2): y = -3x+\frac{15}{2}+\frac{3}{2}$$

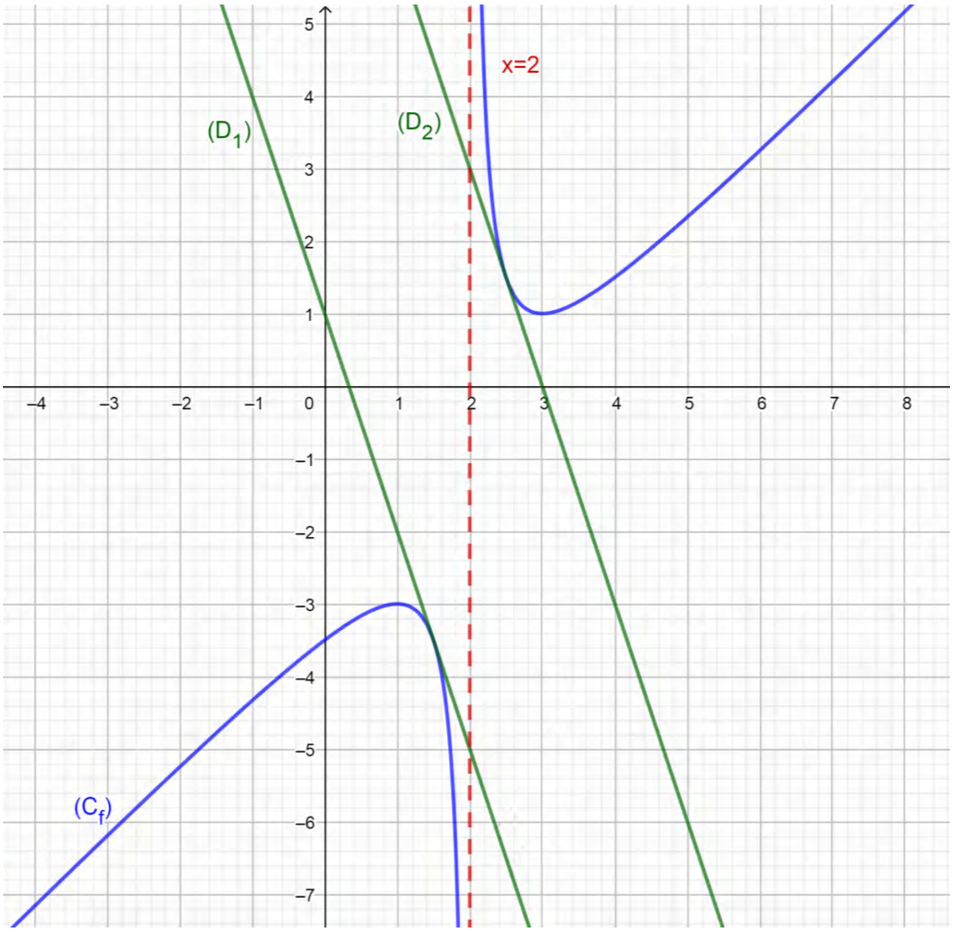
$$(D_2): y = -3x+9$$

ومنه معادلتي المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب: $y_{(D_1)} = -3x+1$ و $y_{(D_2)} = -3x+9$

❹ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب ذو المعادلة $x = 2$
- نرسم المماسين (D_1) و (D_2).
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



❺ المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذو المعادلة $y_m = -3x + m$

ومنه:

لما	$m < 1$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر موجب
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما	$1 < m < 9$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = 9$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما	$m > 9$	المعادلة تقبل حلان موجبان

❻

أ/ تبيين أنّ الدالة g زوجية:

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية.

ب/ دراسة قابلية اشتقاق g عند 0:

لدينا:

الخليل للرياضيات

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{\frac{|x|^2-5|x|+7}{|x|-2}+\frac{7}{2}}{x-0}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}+\frac{7}{2}}{x}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{2x^2-10x+14+7x-14}{x(2x-4)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{x(2x-3)}{x(2x-4)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{2x-3}{2x-4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

ولدينا:

- $$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{\frac{|x|^2-5|x|+7}{|x|-2}+\frac{7}{2}}{x-0}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{\frac{(-x)^2-5(-x)+7}{(-x)-2}+\frac{7}{2}}{x}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{\frac{x^2+5x+7}{-x-2}+\frac{7}{2}}{x}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{2x^2+10x+14-7x-14}{-2x(x+2)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{x(2x+3)}{-2x(x+2)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{2x+3}{-2(x+2)}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}$$

بما أن:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)\neq\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)$$

فالدالة g لا تقبل الاشتقاق عند 0

ج/ تبيين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) :

لدينا:

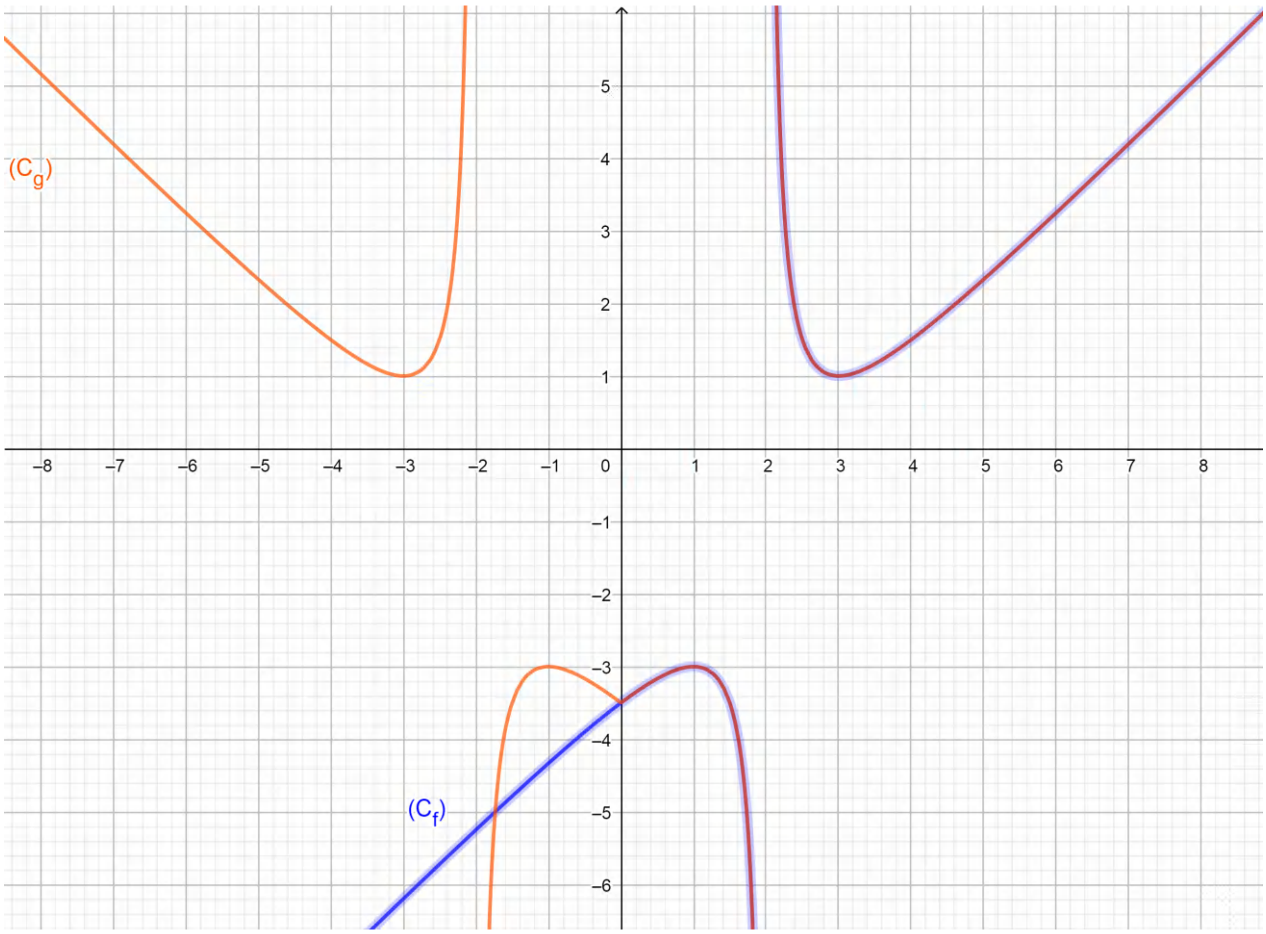
$$\begin{aligned} g(x) &= f(|x|) \\ &= \frac{|x|^2-5|x|+7}{|x|-2} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+7}{x-2} & ; \quad x \geq 0 \\ \dfrac{(-x)^2-5(-x)+7}{(-x)-2} & x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه لما $x \geq 0$ (C_f) ينطبق على (C_g)

ولما: $x \leq 0$ (C_f) يناظر (C_g) بالنسبة إلى محور التراتيب.

- تمثيل بيانيا (C_g) في المعلم السابق:

المنحني (C_f) والمنحني (C_g) والجزء الملون بالنفسجي يمثل تطابق (C_f) مع (C_g)



الخليل للرياضيات

التمرين 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم بيّن أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل:

$$f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

2. ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول التغيرات.
3. بين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب تعيين معادلته.
4. عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات.
5. ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
6. نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ)، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .
7. عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.
8. مثل بيانيا كل من (T)، (Δ) و (C_f) .

حل التمرين 09 :

1. تعيين العددين الحقيقين a و b:

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه:

$$\begin{cases} f(0)=\frac{7}{2} \\ f'(0)=0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(0)=\frac{7}{2} &\Rightarrow \frac{(0)^2+a(0)+b}{(0)^2+2(0)+2}=\frac{7}{2} \\ &\Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{7}{2} \\ &\Rightarrow b=7 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(2x+a)(x^2+2x+2)-(2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2} \\ &=\frac{2x^3+4x^2+4x+ax^2+2ax+2a-2x^3-2ax^2-14x-2x^2-2ax-14}{(x^2+2x+2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2-a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2+2x+2)^2}$$

بما أن $f'(0) = 0$ لدينا:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{(2-a)(0)^2 - 10(0) + 2a - 14}{((0)^2+2(0)+2)^2} = 0$$
$$\Rightarrow 2a - 14 = 0$$
$$\Rightarrow a = 7$$

اذن:

$$f(x) = \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}$$

- تبيين أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$

$$f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{x^2+2x+2+5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}$$

إذن:

$$f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f:

- تعيين النهايات:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)$
$$= 1$$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}\right) = 1$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$f'(x) = \frac{(2-a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2+2x+2)^2}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2+2x+2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 0$$
$$\Rightarrow -5x^2 - 10x = 0$$
$$\Rightarrow -5x(x + 2) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -5x = 0 \\ \text{أو} \\ x + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases}$$

- تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	1

❸ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x)\big) = 1$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

❹ تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- تقاطع (C_f) مع (xx'):

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 7x + 7 = 0$$

بعد حساب المميز Δ نجد: $\Delta = 21$ و:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{21}}{2} \cong -1.21 \\ x_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{21}}{2} \cong -5.79 \end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \{(-5.79; 0), (-1.21; 0)\}$$

- تقاطع (C_f) مع (yy'):

لدينا سابقا

$$f(0) = \frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{\left(0; \frac{7}{2}\right)\right\}$$

❺ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} - 1$$
$$= \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

لدينا: $(x^2+2x+2) > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$5x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- الوضعية النسبية:

- لما $x \in]-\infty; -1[$: (C_f) تحت (Δ).
- لما $x = -1$: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات $\omega(-1;1)$
- لما $x \in]-1; +\infty[$: (C_f) فوق (Δ)

❻ برهان أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) :

$$f(2\alpha - x) + f(x) = f(-2-x) + f(x)$$
$$= 1 + \frac{5(-2-x)+5}{(2+x)^2 + 2(-2-x)+1} + 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= 2 + \frac{-10-5x+5}{x^2+2x+2} + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= 2 - \frac{(5x+5)}{x^2+2x+2} + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= 2$$
$$= 2(1)$$

ومنه النقطة $\omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

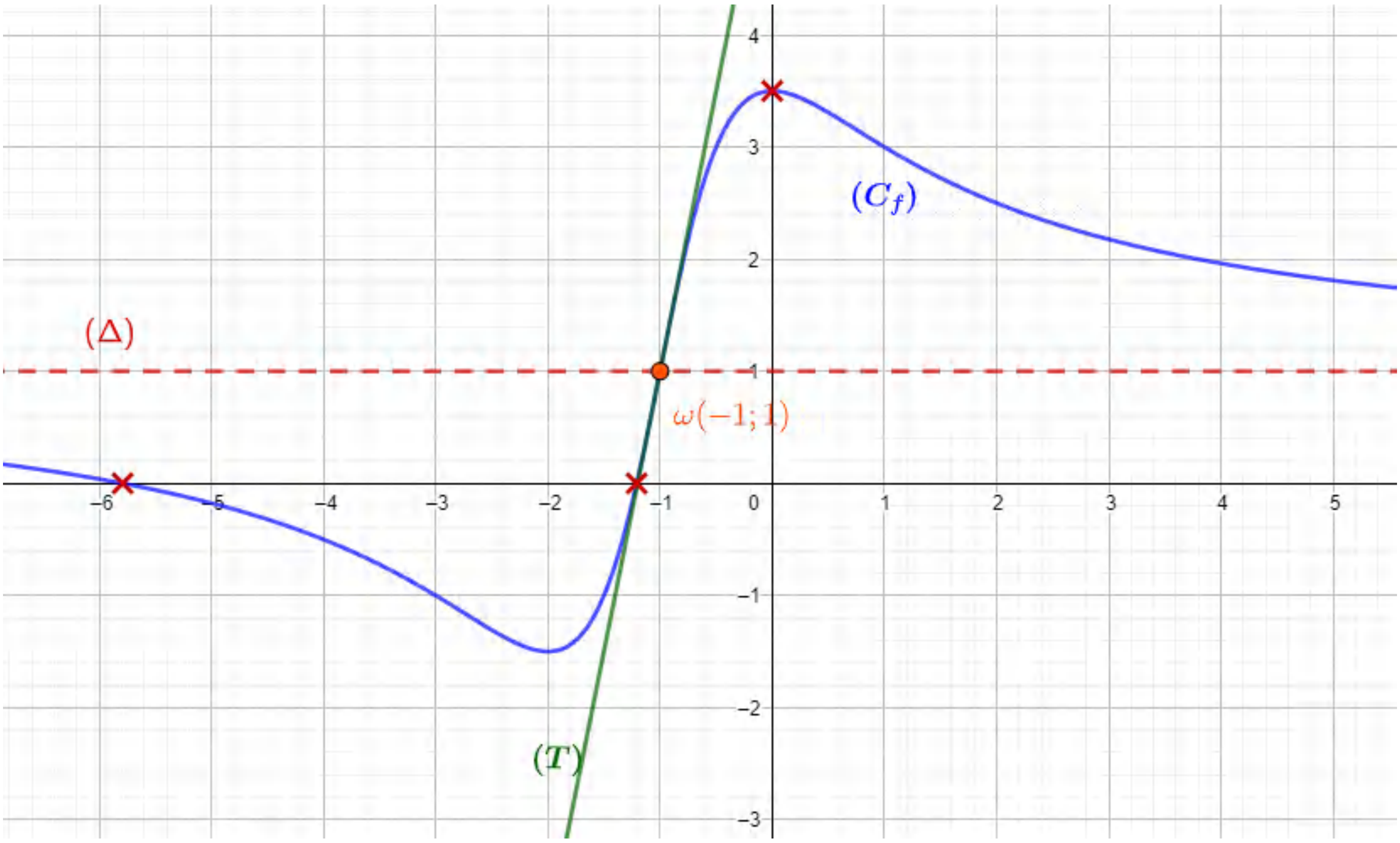
❼ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

$$(T): y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)$$
$$(T): y = \frac{-5+10}{(1-2+2)^2}(x+1) + 1$$
$$(T): y = 5x + 6$$

❽ التمثيل البياني لكل من (T)، (Δ) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = 1$
- نعين النقطة ω مركز تناظر المنحني (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $y = -5x + 6$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



◄ بالتوفيق في بكالوريا 2023 ►