تمارين محلولة

5min Maths

الأعداد المركبة

للشعب العلمية

من تقديم الأستاذ شعبان أسامة

5min maths.com

تمارين محلولة في الأعداد المركبة

التمرين الأول:

I. المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^4-6z^3+24z^2-18z^2+63=0.....(E)$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صرفين مترافقين.

II . نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-i\sqrt{3}, z_B-3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ و $z_C=3+2i\sqrt{3}$.

1.عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

2.عين زاوية الدوران r الذي مركزه A و يحول B الى C ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3.عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4. أ-عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث:
$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

ب-عين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T.

التمرين الثاني:

نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.أ- نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب: $a=2$, $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$. حدد قيس الزاوية $A\hat{B}C$.

ب-استنتج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

2.لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2 \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، نضع A_n النقطة التي لاحقتها z_n .

أ-بين أن النقط A_3, A_2 و A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1=A$ ، $A_2=B$ و $A_4=C$).

ب-قارن أطوال القطع $[A_1A_2],[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

3.أ-بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1}-\omega=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$.

ب-استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته و عناصره المميزة.

ج- بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6}=A_n$ ثم حدد لاحقة A_{2012} .

د-حدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$.

التمرين الثالث:

I- نعتبر العدد المركب $Z=2+\sqrt{3}+i$.

1.بين أن طويلة Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2.تحقق من أن : $Z=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3.أ-باستعمال قوانين موافير بين أن : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$.

ب-بين ان: $Z=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$) ثم أكتب العدد المركب Z على شكله المثلثي.

ج-بين أن: $Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$.

II- نعتبر في المستوى المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega=\sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2.

1.بين أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

2.حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$.

التمرين الرابع:

في كل حالة من الحالات الخمس الآتية اقترحت أربع اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل:

❶. z عدد مركب يحقق $\bar{z}+|z|=6+2i$ ، الشكل الجبري للعدد هو:

أ- $\frac{8}{3}-2i$ ، ب- $-\frac{8}{3}-2i$ ، ج- $\frac{8}{3}+2i$ ، د- $-\frac{8}{3}+2i$.

❷. في المستوى المركب، مجموعة النقط M ذات الاحقة $z=x+iy$ التي تحقق: $|z-1|=|z+i|$ هي المستقيم ذو المعادلة:

أ- $y=x-1$ ، ب- $y=-x$ ، ج- $y=-x+1$ ، د- $y=x$.

❸. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه n من الشكل :

أ- $3k+1$ ، ب- $3k+2$ ، ج- $3k$ ، د- $6k$ ، حيث $k\in\mathbb{N}$.

❹. نعتبر المعادلة $(E):z=\frac{6-z}{3-z}$ مع $z\in\mathbb{C}$ ، حل للمعادلة (E) هو :

أ- $-2-i\sqrt{2}$ ، ب- $2+i\sqrt{2}$ ، ج- $1-i$ ، د- $-1-i$.

❺. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = \sqrt{3}$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ هي:

أ- $-i$ ، ب- $2i$ ، ج- $\sqrt{3}+i$ ، د- $\sqrt{3}+2i$

التمرين الخامس:

ليكن z و z' عددان مركبان يحققان: $|z| = |z'| = 1$ و $z.z'+1 \neq 0$.

بين أن العدد $Z = \frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي.

التمرين السادس:

1.عين العددين الحقيقين a و b بحيث: $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$.

2.أ-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z: $z^2 - 4z + 16 = 0$.

ب-استنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

3.نعتبر العدد المركب z_k المعرف كما يلي: $z_k = \left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح.

أ-بين أن: $z_k = \frac{i}{2^{k-1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ ثم استنتج أن: $z_{2013} = 0$

ب-أكتب العدد $-2^{2015} z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي يطلب تحديده.

4.المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B ذات الاحقتين على الترتيب: $z_A = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2-2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_c = 5 - 2^{2015} z_{2015}$

أ-تحقق أن: $z_c = \frac{3}{2} z_B + z_B$.

ب-بين أن: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -2^{2015} z_{2015}$ ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B معينا عناصره المميزة ثم جد العبارة المركبة له.

5.لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $z_0 = \sqrt{3} - i$ من أجل كل عدد طبيعي n: $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$ حيث z_n لاحقة A_n.

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = A_0A_1 \\ u_n = A_nA_{n+1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n.(A_0A_1 يمثل الطول بين النقطتين)

أ-بين أن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q.

ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج-أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين السابع:

1.حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

2.استنتج حلول المعادلة: $\left(\frac{1}{\bar{z}}+1\right)^2-2\left(\frac{1}{\bar{z}}+1\right)+2=0$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z .

3.في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ ' $z_B=1-i$ و $z_C=1+\sqrt{3}$.

أ-أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي للعددين $\frac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$.

ب-عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-1-i|-|z-1+i|=0$.

ج-عين طويلة و عمدة العدد المركب L حيث: $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

د-عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4.عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$.

التمرين الثامن:

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الاحقة z النقطة M' ذات الاحقة z' حيث: $z'=\frac{1}{2}(1+i)z+1$

1.برر أن f تشابه مباشر يطلب تعين عناصره المميزة.

2.نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $A_{n+1}=f\left(A_n\right)$.

أ-عين لاحقات النقط A_1, A_2, A_3 .

ب-من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $u_n=\Omega A_n$. حيث Ω مركز التحويل النقطي f .

بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ هندسية ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ج-ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0,1$ ؟

3.ما طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$ ؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n، طبيعة المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$.

4. من أجل كل عدد طبيعي n، نرمز بالرمز I_n الى طول الخط المنكسر الذي يشمل النقط $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

وعليه: $I_n=A_0A_1+A_1A_2+...+A_{n-1}A_n$.

عبرعن I_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

التمرين التاسع:

من أجل كل عدد مركب يختلف عن $-1+i$ ، نضع: $z'=\dfrac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z=x+iy$.

نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب

$-1+i$ ، $\dfrac{1}{2}i$ و $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$.

1.حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\overline{z'}=-2$

2.حدد $\operatorname{Re}(z')$ و $\operatorname{Im}(z')$ بدلالة x و y .

3.حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

4.حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'|=2$.

5.بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في C .

التمرين العاشر:

نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$ ، حيث α وسيط حقيقي.

1.أ-احسب $P(1)$.

ب-عين الاعداد الحقيقية c,b,a حيث $P(z)=(z-1)\left(az^2+bz+c\right)$.

2.حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

3.ليكن z_3,z_2,z_1 حلول المعادلة $P(z)=0$ حيث $z_1=1$.

أ-عين طويلة و عمدة الأعداد z_3,z_2,z_1 .

ب-من أجل أي قيمة للوسيط α تكون كل من $|z_2+1|,|z_1|$ و $|z_3-1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

التمرين الحادي عشر:

من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n=(1+i)^n+(1-i)^n$.

1.عين الشكل المثلثي للعدد S_n .

2.بين انه من أجل كل عدد طبيعي n ، S_n عدد حقيقي.

التمرين الثاني عشر:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

1.أكتب العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

2. n عدد طبيعي، L_n هو العدد المركب المعرف بما يلي : $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ ، أحسب L_n بدلالة n ثمّ إستنتج قيمة L_{2018} يكتب على الشكل الجبري .

3.تحقق أنّ : $z_C = i\, z_A$ ثمّ إستنتج طبيعة المثلث OAC.

4.لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg(3+i\sqrt{3}-z)-\arg(-\sqrt{3}+3i-z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، تحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ عين طبيعتها .

5. نعتبر النقطة D ذات اللاحقة $z_D = \overline{z_C}$ ، بيّن أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

6. لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 3-\sqrt{3}$ ، S التشابه المستوي المباشر الذي مركزه E ويحول النقطة A إلى النقطة C. عين نسبة وزاوية التشابه S ، ثمّ إستنتج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ يطلب تعيين عناصرها.

التمرين الثالث عشر:

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.

2.المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2-2i$ ، $z_B = 4$ ، $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_D = -z_A$ و $z_E = -6-2i$.

أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي ، ثمّ إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S.

ب) تحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$.

ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z+4|=8$
تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة .

د) تحقق أنّ $S(D)=E$ ، ثمّ بيّن أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S.

حلول التمارين

حل التمرين الأول:

I. لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^4-6z^3+24z^2-18z+63=0.....(E)$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صرفين مترافقين

لدينا\: $z^4-6z^3+24z^2-18+63=0.....(E)$.

نفرض أن: αi و $-\alpha i$ هما الحلان الصرفيان المترافقان مع $\alpha\in\mathbb{R}$.

و عليه لدينا من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z)=(z-\alpha i)(z+\alpha i)(az^2+bz+c)$$
$$P(z)=(z^2+\alpha^2)(az^2+bz+c)$$
$$P(z)=az^4+bz^3+(\alpha^2a+c)z^2+\alpha^2bz+c\alpha^2$$

بالمطابقة ينتج: $\begin{cases} a=1\\ b=-6\\ \alpha^2a+c=24\Rightarrow a=1,b=-6,\alpha^2=3,c=21\\ \alpha^2b=-18\\ \alpha^2c=63\end{cases}$ $\alpha^2=3\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\sqrt{3}\\ \alpha=-\sqrt{3}\end{cases}$

اذن:

$$P(z)=(z^2+3)(z^2-6z+21)$$
$$P(z)=0\Rightarrow\begin{cases}(z^2+3)=0\Rightarrow z=i\sqrt{3},z'=-i\sqrt{3}\\ (z^2-6z+21)=0\Rightarrow z=3-2i\sqrt{3},z'=3+2i\sqrt{3}\end{cases}$$
$$S=\{-i\sqrt{3},3-2i\sqrt{3},i\sqrt{3},3+2i\sqrt{3}\}$$

II. نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-i\sqrt{3}, z_B=-3+2i\sqrt{3}$ و $z_C=3+2i\sqrt{3}$.

1. عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

$$z_C-z_A=3+3i\sqrt{3}=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

و عليه
$$z_B-z_A=-3+3i\sqrt{3}=6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$
$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}=e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

2. تعين زاوية الدوران r الذي مركزه A و يحول B الى C ،

لدينا: $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$
$$z_C - z_A = (z_B - z_A)e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

و هذا يعني: أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} == e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$ تعني: ان:

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow (AC = AB)$$
$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

و بهذا نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3.تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = i\sqrt{3}$$

4.أ-تعين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

لدينا: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ومنه: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$ باستعمال علاقة شال نجد: $\overrightarrow{GM'} - \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{MG}$

وبالتالي: $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ نستنتج أن النقطة M' هي صورة نقطة M بالتحاكي الذي مركزه النقطة G و نسبته -2

من العلاقة: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ يكون لدينا:

أي:
$$z' - z = (z_A - z) + (z_B - z) + (z_C - z)$$
$$z' = -2z + (z_A + z_B + z_C)$$
$$z' = -2z + 3z_G$$

ب-تعين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T.

أي:
$$z_D = -2z_A + 3z_G$$
$$z_D = 5i\sqrt{3}$$

حل التمرين الثاني:

1.أ-تحدد قيس الزاوية $A\hat{B}C$. نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب: $a = 2, b = 3 + i\sqrt{3}$ و $c = 2i\sqrt{3}$.

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)$$

لدينا:

$$\frac{c-b}{a-b}=\frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}}$$

$$=-i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$$

ب-استنتاج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

بما أن المثلث ABC قائم في B فان $[AC]$ يمثل قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و بالتالي: $\omega=\frac{a+c}{2}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

2.لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2 \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نضع A_n النقطة التي لاحقتها z_n .

أ-بين أن النقط A_2, A_3 و A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1=A$ ، $A_2=B$ و $A_4=C$).

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_0+2=2=a$$

$$z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(2)+2=1+i\sqrt{3}+2=3+i\sqrt{3}=b$$

$$z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)+2=2+2i\sqrt{3}$$

$$z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_3+2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2=2i\sqrt{3}=c$$

ب-مقارنة أطوال القطع $[A_1A_2],[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

$$A_3A_4=|z_4-z_3|=2\quad A_2A_3=|z_3-z_2|=2\quad A_1A_2=|z_2-z_1|=2$$

اذن: $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4$

3.أ-اثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$.

ليكن n من $\mathbb{N}$:

$$z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2-1-i\sqrt{3}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1-i\sqrt{3}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$$

ب-استنتاج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته و عناصره المميزة.

بما أن : $z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$

أي: $z_{n+1}-\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n-\omega)$

فان A_{n+1} هي صورة A_n بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج-اثبات أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6}=A_n$

نضع: $v_n=z_n-\omega$ لدينا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $e^{\frac{i\pi}{3}}$ و حدها الأول $v_0=-\omega$ اذن: $v_n=-\omega\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n=-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$

$z_n=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$

ومنه:

$$z_{n+6}=\omega-\omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}}=\omega-\omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}e^{i2\pi}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}=z_n$$

$$e^{i2\pi}=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1$$

$$z_{2012}=\omega-\omega e^{\frac{i(2012)\pi}{3}}=z_2=3+i\sqrt{3}$$

د-تحدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$:

نضع $d_n=A_nA_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|$

بحساب d_{n+1} نجد: $d_{n+1}=d_n$ اذن : (d_n) متتالية ثابتة و منه: $d_n=d_1=A_1A_2=2$

$A_nA_{n+1}=2$

حل التمرين الثالث:

I- نعتبر العدد المركب $Z=2+\sqrt{3}+i$.

1.بين أن طويلة Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$|Z|=|2+\sqrt{3}+i|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

2.التحقق من أن : $Z=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$Z=2+\sqrt{3}+i=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i.2\frac{1}{2}=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

3.أ- اثبات أن : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$.

نعلم أن:

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

و منه:

$$\cos^2(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\frac{e^{2i\theta}+2e^{2i\theta}.e^{-2i\theta}+e^{-2i\theta}}{4}=\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left[\cos(2\theta)+1\right]$$

$$\Rightarrow 1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$$

ب-اثبات ان: $Z=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

(نذكر أن : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

لدينا:

$$Z=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)$$

$$=2\times 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i2\times 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

كتابة العدد المركب Z على شكله المثلثي: بما أن:

$$4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0\Rightarrow |Z|=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$Z=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

ج-اثبات أن: $Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$.

و منه حسب موافر:

$$Z^6=\left(|Z|\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\right)^6$$

$$=|Z|^6\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^6$$

$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6\left[\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega=\sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2.

1.البرهان على أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

أي: $$\begin{aligned} d-\omega &= 2(p-\omega) \\ d &= 2p-\omega \\ d &= \left(4+\sqrt{3}\right)+2i \end{aligned}$$ اذن : لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

2.تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$.

$|z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$ تكافئ : $|z-d|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

اذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي دائرة مركزها النقطة D و نصف قطرها $4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

حل التمرين الرابع:

❶. z عدد مركب يحقق $\bar{z}+|z|=6+2i$ ،

يكفي التعويض في الشكل الجبري في العلاقة المعطاة نجد: $\frac{8}{3}+2i+\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+4}=\frac{8}{3}+2i+\frac{10}{3}=6+2i$

الشكل الجبري للعدد هو: $\frac{8}{3}-2i$ الاجابة (أ)

❷. ليكن عدد مركب z ، نضع $z=x+iy$.

$|z-1|=|z+i|$ معناه:

أي: $$\begin{aligned} |z-1|^2 &= |z+i|^2 \\ (x-1)^2+y^2 &= x^2+(y+1)^2 \\ x^2-2x+1+y^2 &= x^2+y^2+2y+1 \\ y &= -x \end{aligned}$$

الاجابة (ب)

❸. n عدد طبيعي،

$$\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$$

أي:

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

العدد $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي معناه : $2^n\sin\frac{n\pi}{3}=0\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=k\pi$ ، $n=3k,\left(k\in\mathbb{N}\right)$ الاجابة (ج).

❹. حل للمعادلة (E):

و منه: $z=\frac{6-z}{3-z}\Leftrightarrow\frac{z(3-z)}{3-z}=\frac{6-z}{3-z}\Leftrightarrow 3z-z^2=6-z$

$\Rightarrow z^2-4z+6=0\Rightarrow\begin{cases}z_1=2+i\sqrt{2}\\ z_2=2-i\sqrt{2}\end{cases}$ الاجابة **(ب)**

❺. لتكن A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A=i$ و $z_B=\sqrt{3}$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. اللاحقة z_c للنقطة C بحيث يكون ABC مثلثا متقايس الأضلاع مع $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ هي:

ABC مثلث متقايس الأضلاع اذا كانت C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

$$z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$$

$$z_C-i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$$

بعد النشر نجد: $z_C=\sqrt{3}+2i$ الاجابة (د).

حل التمرين الخامس:

ليكن z و z' عددان مركبان يحققان: $|z|=|z'|=1$ و $z.z'+1\neq 0$.

العدد $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي معناه: $Z=\overline{Z}$

اذن: $\overline{Z}=\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)}=\frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{zz'}}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}.\frac{1}{z'}}=\frac{z+z'}{1+zz'}$ لأن: $\overline{z}=\frac{1}{z}$ و $\overline{z'}=\frac{1}{z'}$.

$=Z$

وبالتالي: العدد $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي

حل التمرين السادس:

1.تعين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$.

لدينا: بالمطابقة تجد:
$$(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}\Rightarrow a^2+2ai-1=2+2i\sqrt{3}$$
$$2ai=2i\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}$$

بنفس العملية:
$$(b-i)^2=22i\sqrt{3}\Rightarrow b^2-2bi-1=2-2i\sqrt{3}$$
$$-2bi=-2i\sqrt{3}\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

و بالتالي: $a=b=\sqrt{3}$.

2.أ-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

أي:
$$z^2-4z+16=0$$
$$\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$$
$$z_1=2+2i\sqrt{3},z_2=2-2i\sqrt{3}$$
$$S=\left\{2+2i\sqrt{3};2-2i\sqrt{3}\right\}$$

ب-استنتاج حلول المعادلة: $z^4-4z^2+16=0$.

نضع: $z'=z^2$ المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$ تصبح: $z'^2-4z'+16=0$

معناه مما سبق:
$$z_1^2=z'_1=2+2i\sqrt{3}$$
$$z_2^2=z'_2=2-2i\sqrt{3}$$

علينا حساب الجذران التربيعيان لكل من : z_1' و z_2'.

نلاحظ من السؤال 1. لدينا : الجذر التربيعي للعدد $2+2i\sqrt{3}$ هو : $\sqrt{3}+i$ أو $-\sqrt{3}-i$

الجذر التربيعي للعدد $2-2i\sqrt{3}$ هو : $\sqrt{3}-i$ أو $-\sqrt{3}+i$.

و بالتالي: $S=\left\{\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}-i;\sqrt{3}-i;-\sqrt{3}+i\right\}$.

3. أ- لدينا:
$$z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

اثبات أن:

$$z_k = \left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$z_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$= z_k = \frac{1}{2^k}2i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

$$z_k = \frac{i}{2^{k-1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

استنتاج أن: $z_{2013} = 0$

$$z_{2013} = \frac{i}{2^{2013-1}}\sin\left(\frac{2013\pi}{3}\right) = \frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi) = 0$$

ب-كتابة العدد $-2^{2015} z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n.

$$-2^{2015} z_{2015} = -2^{2015} z_{2015} = -2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\left(\frac{2015\pi}{3}\right)$$

$$= -2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+671\pi = -2i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \sqrt{3}i$$

و بالتالي: $n = 3$

4. $z_A = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2-2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_c = 5-2^{2015} z_{2015}$

أ-التحقق أن: $z_c = \frac{3}{2} z_B + z_B$.

لدينا: $z_c = 5-2^{2015} z_{2015} = 5+i\sqrt{3}$ و لدينا كذلك:

أي:

$$z_C = \frac{3}{2} z_B + z_B$$

$$z_C = \frac{3}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+\left(2-2i\sqrt{3}\right) = 5+i\sqrt{3}$$

ب-اثبات أن:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -2^{2015} z_{2015}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}} = \frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$= i\sqrt{3} = -2^{2015} z_{2015}$$

تعين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_B - z_C = i\sqrt{3}\left(z_A - z_C\right)$$

$$\begin{cases} |z_B - z_C| = \sqrt{3}|z_A - z_C| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CB = \sqrt{3}CA \\ \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اذن : التحويل النقطي f هو تشابه مباشرمركزه C ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

العبارة المركبة: تكتب من الشكل:

$$Z' = a'Z + b'$$

$$\begin{cases} a' = i\sqrt{3} \\ b' = z_C(1-a') \Rightarrow b' = 8 - 4i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow Z' = i\sqrt{3}Z + 8 - 4i\sqrt{3}$$

5.نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = A_0.A_1 \\ u_n = A_nA_{n+1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q.

لدينا:

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} + 8 - 4i\sqrt{3} - i\sqrt{3}z_n - 8 + 4i\sqrt{3}\right|$$

و بالتالي:

$$u_{n+1} = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} - i\sqrt{3}z_n\right| = \left|i\sqrt{3}\left(z_{n+1} - z_n\right)\right| = \left|i\sqrt{3}\right|\left|\left(z_{n+1} - z_n\right)\right| = \sqrt{3}u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{3}u_n$$

اذن: $q = \sqrt{3}$ هو أساس هذه المتتالية و حدها الأول:

$$u_0 = A_0.A_1 = |z_1 - z_0| = \left|i\sqrt{3}z_0 + 8 - 4i\sqrt{3} - z_0\right|$$

نعلم أن:

$$z_0 = \sqrt{3} - i$$

$$u_0 = \left|i\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - i\right) + 8 - 4i\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - i\right)\right| = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$$

ب-استنتاج عبارة u_n بدلالة n: $u_n = u_0 \times q^n = \left(\sqrt{3}\right)^n\sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$

ج- حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$S_n = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}\left(\frac{1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)}\right) = \left[\frac{\sqrt{128 - 32\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}}\right]\left(1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)$$

حل التمرين السابع:

1.حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$$z^2-2z+2=0$$

أي: $\Delta=-4=4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2i$

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i \\ z_2=\overline{z_1}=1+i \end{cases} \Rightarrow S=\{1+i;1-i\}$$

2.استنتاج حلول المعادلة: $\left(\dfrac{1}{z}+1\right)^2-2\left(\dfrac{1}{z}+1\right)+2=0$:

نضع: $z'=\dfrac{1}{z}+1$ المعادلة تصبح: $z'^2-2z'+2=0$ تكافئ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

$$\begin{cases} z'_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i \\ z'_2=\overline{z'_1}=1+i \end{cases}$$

و منه: $\dfrac{1}{z}+1=1-i \Rightarrow \dfrac{1}{z}=-i \Rightarrow \dfrac{1}{z}=i \Rightarrow z_3=-i$

$$z_4=\overline{z_3}=\overline{-i}=i$$

$$S=\{-i;i\}$$

.3

لدينا: $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i$ و $z_C=1+\sqrt{3}$.

أ-أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي:

$$\begin{cases} |z_A|=\sqrt{2} \\ \arg(z_A)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow z_A=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B=\overline{z_A}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

استنتاج الشكل الأسي للعددين $\dfrac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$:

$$\frac{1}{z_B}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

و بالتالي: $(z_A)^{2019}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019}=\left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{2019\pi}{4}}$

$$(z_A)^{2019}=\left(\sqrt{2}\right)^{2019}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب-تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-1-i|-|z-1+i|=0$.

$$|z-1-i|-|z-1+i|=0$$

$$|z-1-i|=|z-1+i|$$

لدينا: $|z-(1+i)|=|z-(1-i)|$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة $[AB]$.

$$|z_M-z_A|=|z_M-z_B|$$

$$AM=BM$$

ج-تعين طويلة و عمدة العدد المركب L حيث: $L=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$

$$L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+i-1-\sqrt{3}}{1-i-1-\sqrt{3}}=\frac{i-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}}=\frac{\left(i-\sqrt{3}\right)}{\left(-i-\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)}{\left(-\sqrt{3}+i\right)}$$

$$L=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\begin{cases}|L|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1\\ \arg(L)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

و منه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=1\Rightarrow CA=CB\\ \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

د-تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC:

$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{1+i+1-i+1+\sqrt{3}}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ و منه نجد: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

4.تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$.

بما أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1)(B;1)(C;1)\}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

باستعمال علاقة شال لدينا: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

و منه:

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ تصبح:

$$\left(3\overrightarrow{MG}\right)\left(-\overrightarrow{AB}\right)=0$$
$$-3\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}\right)=0\Rightarrow\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}=0$$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له.

حل التمرين الثامن:

1.لدينا: $M(z)\xrightarrow{f}M'(z')$ حيث: $z'=\frac{1}{2}(1+i)z+1$

العبارة المركبة للتحويل النقطي f هي من الشكل: $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب

لدينا: $a=\frac{1}{2}(1+i)$ و منه: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ نستنتج أن: $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$.

و من جهة ثانية فان ω لاحقة النقطة Ω: $\omega=\frac{b}{1-a}=1+i$.

اذن التحويل النقطي f هو تشابه مباشر نسبته $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة Ω.

2. أ- نضع: $A_{n+1}=f\left(A_n\right)$ و منه $z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n+1$

و عليه:
$$z_1=\frac{1}{2}(1+i)z_0+1\Rightarrow z_1=1$$
$$z_2=\frac{1}{2}(1+i)z_1+1\Rightarrow z_2=\frac{1}{2}(3+i)$$
$$z_3=\frac{1}{2}(1+i)z_2+1\Rightarrow z_3=\frac{3}{2}+i$$

ب-من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $u_n=\Omega A_n$:

لدينا: $u_{n+1}=\Omega A_{n+1}$ و بما أن: $A_{n+1}=f\left(A_n\right)$ فان:
$$\begin{cases}\Omega A_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n\\ \left(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

و منه: $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$ نستنتج أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و حدها الاول $u_0=\sqrt{2}$.

و بالتالي: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ج- تنتمي كل النقط A_n الى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0,1$ اذا و فقط اذا $\Omega A_n\le 0,1$

يعني:
$$u_n\le 0,1\Rightarrow\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0,1$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le\frac{0,1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)$$
لأن: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$
$$\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

بالتقريب نجد: $n\ge 7,57$ و منه $n_0=8$.

3.أ- طبيعة المثلث ΩA_0A_1 :

المثلث ΩA_0A_1 قائم في A_1 و متساوي الساقين لان: $\Omega A_1=A_0A_1=1$ و كذلك $(A_0A_1)\perp(\Omega A_1)$.

من خواص التشابه المباشرنستنتج أن المثلث ΩA_nA_{n+1}. قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين.

4. لديناَ: $I_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$ و منه: $I_n=\Omega A_1+\Omega A_2+\ldots+\Omega A_n$

و بالتالي: $I_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

بما أن متتالية هندسية فان :

$$I_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

لأن $-1 < q < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

حل التمرين التاسع:

نضع: $z' = \dfrac{2z-i}{z+1-i}$ حيث $z = x+iy$.

1.حل المعادلة: $\overline{z'} = -2$ يعني: $\overline{\left(\dfrac{2z-i}{z+1-i}\right)} = -2$ معناه:

$$\frac{2\overline{z}-i}{\overline{z}+1-i} = -2 \Rightarrow 2\overline{z}-i = -2\left(\overline{z}+1-i\right)$$

أي : $\Rightarrow \overline{z} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}i$

$$z = -\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$$

2.تحدد $\mathrm{Re}(z')$ و $\mathrm{Im}(z')$ بدلالة x و y.

$$\mathrm{Re}(z') = \mathrm{Re}\left(\frac{2z-i}{z+1-i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2(x+iy)-i}{x+iy+1-i}\right) = \frac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(z') = \frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

3.تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

z' حقيقي معناه: $\mathrm{Im}(z') = 0$ يعني: $\dfrac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-1=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$

اذن مجموعة النقط M هي المستقيم ذا المعادلة $x+2y-1=0$ ما عدا النقطة $A(-1;1)$.

4.تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'| = 2$.

$|z'| = 2$ معناه:

$$\left|\frac{2z-i}{z+1-i}\right|=2\Rightarrow\frac{|2z-i|}{|z+1-i|}=2$$

و منه: $$\frac{\left|2\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|}{|z+1-i|}=2\Rightarrow\left|z-\frac{1}{2}i\right|=|z+1-i|$$

$$|z-z_B|=|z-z_A|$$

$$AM=AB$$

و منه مجموعة النقط M التي تحقق $|z'|=2$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

5.اثبات المثلث ABC متساوي الساقين و في قائم النقطة C.

لدينا: $\begin{cases}|z_A-z_C|=\frac{1}{4}\sqrt{10}\\|z_B-z_C|=\frac{1}{4}\sqrt{10}\\|z_A-z_B|=\frac{1}{2}\sqrt{5}\end{cases}$ و منه نستنتج أن $AC=BC$ اذن المثلث ABC متساوي الساقين....(1)

و لدينا : $AC^2+BC^2=BA^2$ اذن المثلث ABC قائم في C....(2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و في قائم النقطة C.

حل التمرين العاشر:

1. أ-احسب $P(1)$:

$$\begin{aligned}P(1)&=1^3-(1-2\sin\alpha)(1)^2+(1-2\sin\alpha)-1\\&=1-(1-2\sin\alpha)+(1-2\sin\alpha)-1\\&=0\end{aligned}$$

و منه: $P(1)=0$.

ب-تعين الاعداد الحقيقية c,b,a:

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-1)(az^2+bz+c)\\&=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b-a=-(1-2\sin\alpha)\\c-b=1-2\sin\alpha\\-c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\sin\alpha\\c=1\end{cases}$$

$$P(z)=(z-1)\left(z^2+(2\sin\alpha)z+1\right)$$

2.حل المعادلة $P(z)=0$:

$$P(z)=0 \Leftrightarrow P(z)=(z-1)\left(z^2+(2\sin\alpha)z+1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ z^2+(2\sin\alpha)z+1=0 \end{cases}$$

اذن:

$$z_1=1$$

$$z^2+(2\sin\alpha)z+1=0 \Rightarrow \Delta'=(i\cos\alpha)^2$$

$$\begin{cases} z'=-\sin\alpha+i\cos\alpha \\ z''=-\sin\alpha-i\cos\alpha \end{cases}$$

$$S=\{1;-\sin\alpha+i\cos\alpha;-\sin\alpha-i\cos\alpha\}$$

لأن: $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

3.ليكن z_3, z_2, z_1 حلول المعادلة $P(z)=0$ حيث $z_1=1$.

أ-تعين طويلة و عمدة الأعداد z_3, z_2, z_1:

$$z_1=1=1.e^{i0}$$

$$z_2=-\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$z_3=-\sin\alpha-i\cos\alpha=\overline{z_2}=1.e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

ب- الحدود $|z_2+1|, |z_1|$ و $|z_3-1|$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية معناه:

حسب خاصية الوسط الهندسي نجد:

يعني:

$$|z_1|^2=|z_2+1|\times|z_3-1|$$

$$\Leftrightarrow 1=|z_2.z_3-z_2+z_3-1|$$

$$\Leftrightarrow 1=|1-z_2+\overline{z_2}-1|$$

$$\Leftrightarrow 1=|-2i\cos\alpha|$$

$$\Leftrightarrow 1=2|\cos\alpha| \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\frac{1}{2} \\ \cos\alpha=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

و بالتالي: $\alpha=\frac{\pi}{3}$ أو $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

حل التمرين الحادي عشر:

لدينا:

$$\begin{cases} |1+i|=\sqrt{2} \\ \arg(1+i)=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

و بما أن : $1-i=\overline{1+i}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2.لدينا: نعلم أن: $\cos x=\cos(-x)$ و $\sin(-x)=-\sin x$ اذن:

$$S_n=(1+i)^n+(1-i)^n=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{in\frac{\pi}{4}}+e^{-in\frac{\pi}{4}}\right)$$

باستعمال خاصية موافر:

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

حل التمرين الثاني عشر:

لدينا : $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

1) كتابة العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B:

لدينا : $z_A=3+i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_A|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$

تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta_A=\arg(z_A)$

إذن : $\begin{cases}\cos\theta_A=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_A=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

الشكل الأسي للعدد z_A هو : $z_A=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B : $z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2) لدينا : العدد المركب $L_n=\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$

حساب L_n بدلالة n :

لدينا : $L_n=\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n=\left(\dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\dfrac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n=e^{i\times n\frac{\pi}{6}}+e^{-i\times n\frac{\pi}{6}}$

ومنه : $L_n=e^{in\frac{\pi}{6}}+e^{-in\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cos\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)$

أي $L_n = e^{i\frac{n\pi}{6}} + e^{-i\frac{n\pi}{6}} = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} + \cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}$

وبالتالي : $L_n = 2\cos\frac{n\pi}{6}$

إستنتاج قيمة L_{2018} :

$$L_{2018} = 2\cos\left(\frac{2018\pi}{6}\right) = 2\cos\left(336\pi + \frac{2\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

إذن $L_{2018} = 1$

3) **التحقق أنّ $z_C = i\,z_A$ ثمّ إستنتاج طبيعة المثلث OAC:**

لدينا : $i\,z_A = i\left(3+i\sqrt{3}\right) = 3i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i = z_C$

أي $z_C = i\,z_A$

إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

لدينا : $z_C = i\,z_A$ ومنه $\frac{z_C}{z_A} = i$ أي $\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = i$

إذن لدينا : $\left|\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right| = |i| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $OC = OA$ و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث OAC قائم ومتساوي الساقين

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$\arg\left(3+i\sqrt{3}-z\right) - \arg\left(-\sqrt{3}+3i-z\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

التحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ تعيين طبيعتها :

O تنتمي إلى (Γ) يعني $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right) - \arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

لدينا : $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right) - \arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right) = \arg\left(3+i\sqrt{3}\right) - \arg\left(-\sqrt{3}+3i\right)$

أي $\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right) - \arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \arg(z_A) - \arg(i\times z_A)$

ومنه : $\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right) - \arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right) = \arg(z_A) - \arg(z_A) - \arg(i) = -\frac{\pi}{2}$

ومنه $O \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة (Γ):

$\arg\left(3+i\sqrt{3}-z\right) - \arg\left(-\sqrt{3}+3i-z\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ يعني

$\arg(z_A - z) - \arg(z_C - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أي $\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي أحد أقطارها القطعة $[AC]$ والتي تشمل

النقطة O ماعدا النقطتين A و C

5) **تبيان أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان :**

لدينا : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} = \frac{\overline{z_C} - z_A}{i\, z_A - \overline{z_A}} = \frac{-i\,\overline{z_A} - z_A}{i\, z_A + i^2\,\overline{z_A}} = \frac{-\left(z_A + i\overline{z_A}\right)}{i\left(z_A + i\overline{z_A}\right)} = -\frac{1}{i} = i$

ومنه : $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ يعني $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي: المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان

6) **تعيين نسبة وزاوية التشابه S:**

لدينا : العبارة المركبة للتشابه S من الشكل : $z' = az + b$

ولدينا : $\begin{cases} S(A) = C \\ S(E) = E \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_C = a\, z_A + b \\ z_E = a\, z_E + b \end{cases}$ وبالتالي

$$a = \frac{z_C - z_E}{z_A - z_E} = \frac{-\sqrt{3} + 3i - 3 + \sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3}} = \frac{3i - 3}{i\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i}$$

ومنه : $a = \frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2i = i\sqrt{3}$ إذن : $a = i\sqrt{3}$

نسبة التشابه S : $k = |a| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ وزاوية التشابه S : $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2}$

إستنتاج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$:

لدينا : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و $\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه :

AEC و AOC مثلثان قائمان .

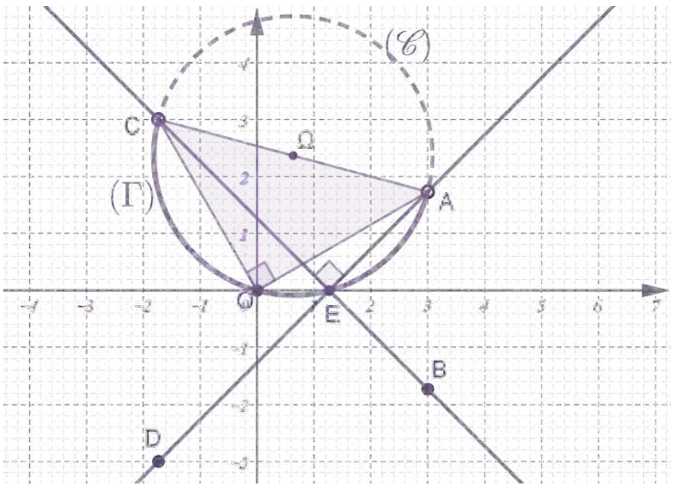
وبالتالي النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى

نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها Ω منتصف

القطعة $[AC]$ ونصف قطرها

$$r = O\Omega = |z_\Omega| = \left|\frac{z_C + z_A}{2}\right| = \left|\frac{iz_A + z_A}{2}\right|$$

$$r = \frac{\left|z_A(1+i)\right|}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$



حل التمرين الثالث عشر:

1) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)\left(z^2 - 4z + 8\right) = 0$:

$(z-4)\left(z^2 - 4z + 8\right) = 0$ تكافئ $z - 4 = 0$ أو $z^2 - 4z + 8 = 0$

$z - 4 = 0$ يعني $z = 4$

حل المعادلة $z^2 - 4z + 8 = 0$:

حساب المميز: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

$$z_1 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

$$z_2 = 2+2i$$

مجموعة حلول المعادلة : $S = \{4; 2-2i; 2+2i\}$

2) لدينا $z_A = 2-2i$ ، $z_B = 4$ ، $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_D = -z_A$ و $z_E = -6-2i$

أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي:

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+2i-2+2i}{4-2+2i} = \frac{4i}{2+2i} \times \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{8i+8}{8} = 1+i$

أي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1+i$

ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

إستنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S:

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ونسبته $k = \sqrt{2}$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$

ب) التحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$:

لدينا : $1-2+2 = 1 \neq 0$ ومنه مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$ موجود

لاحقته هي $\frac{z_A - 2z_B + 2z_C}{1-2+2} = \frac{2-2i-8+4+4i}{1} = -2+2i = z_D$

ومنه D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$

ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z+4| = 8$

التحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ):

$A \in (\Gamma)$ يعني $|(1+i)z_A + 4| = 8$

لدينا : $|(1+i)z_A + 4| = |(1+i)(2-2i)+4| = |4+4| = |8| = 8$ ومنه $A \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة:

لدينا : $|(1+i)z+4| = 8$ يكافئ $\left|(1+i)\left(z + \frac{4}{1+i}\right)\right| = 8$

أي $|1+i| \times \left|z + \frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right| = 8$ ومنه $\sqrt{2} \times |z+2-2i| = 8$

إذن $\left|z-(-2+2i)\right|=\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\left|z-z_D\right|=4\sqrt{2}$

أي $DM=4\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $R=4\sqrt{2}$

د) التحقق أنّ $S(D)=E$:

لدينا : $\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{-6-2i-2+2i}{-2+2i-2+2i}=\dfrac{-8}{-4+4i}=\dfrac{-8(-4-4i)}{(-4+4i)(-4-4i)}=\dfrac{32(1+i)}{16+16}$

ومنه $\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

وبالتالي : $S(D)=E$

تبيان أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S:

(Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $AD=R=4\sqrt{2}$

صورتها هي الدائرة (Γ') التي مركزها $E=S(D)$ ونصف قطرها $R'=\sqrt{2}AD=AE$ لأنّ

$\dfrac{AE}{AD}=\sqrt{2}$

هذا العمل يبقى عمل بشري و احتمال السهو فيه وارد فرجاء اذا كان هناك استفسار تواصل معي على :