

تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدريب

نص التمرين :

- ليكن P عددا أوليا أكبر من أو يساوي 7 .
- نريد في هذا التمرين البرهنة على أن العدد $n = P^4 - 1$ يقبل القسمة على 240 .
- (1) أ) بين أن : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv -1[3]$.
 ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3 .
- (2) أ) بملاحظة أن P عدد فردي بين أنه يوجد عدد طبيعي k حيث : $P^2 - 1 = 4k(k+1)$.
 ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16 .
- (3) بين أن 5 قاسم للعدد n .
- (4) نعتبر a ، b و c أعداد طبيعية .
 أ) برهن أنه إذا كان c قابلا للقسمة على a و b مع هذين الأخيرين أوليان فيما بينهما فإن c يقبل القسمة على $a \times b$
 ب) إستنتج مما سبق أن العدد n يقبل القسمة على 240 .
- (5) هل توجد أعداد أولية : P_1 ، P_2 ، ، P_{15} كلها أكبر من أو تساوي 7 بحيث يكون العدد :
 $A = P_1^4 + P_2^4 + \dots + P_{15}^4$ أولياً ؟

حل مقترح للتمرين :

- (1) أ) بما أن P عدد أولي أكبر من أو يساوي 7 إذن P لا يقبل القسمة على 3 أي أن باقي قسمة P على 3 هو :
 1 أو 2 أي يكون : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv 2[3]$ و منه : $P \equiv -1[3]$ هو المطلوب .
 ب) بما أن : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv -1[3]$ فإن : $P^4 \equiv 1[3]$ و منه : $P^4 - 1 \equiv 0[3]$ أي : $n \equiv 0[3]$.
 إذن : n يقبل القسمة على 3 .
- (2) أ) بما أن P عدد فردي فإن : $P = 2k+1$ مع $(k \in \mathbb{N})$ أي : $P^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ و منه يكون :
 $P^2 - 1 = 4k^2 + 4k$ إذن نجد : $P^2 - 1 = 4k(k+1)$ هو المطلوب .
 ب) نعلم أن الجداء $k(k+1)$ زوجي إذن : $k(k+1) = 2\alpha$ أي : $P^2 - 1 = 4 \times 2\alpha$ و منه : $P^2 = 8\alpha + 1$.
 - لنحسب P^4 : $P^4 = (8\alpha + 1)^2 = 64\alpha^2 + 16\alpha + 1$ أي : $P^4 - 1 = 64\alpha^2 + 16\alpha$ و منه : $n = 16(4\alpha^2 + \alpha)$.
 إذن : n يقبل القسمة على 16 .
- (3) نعلم أن العدد P لا يقبل القسمة على 5 إذن : $P \equiv \pm 1[5]$ أو $P \equiv \pm 2[5]$ أي : $P^4 \equiv 1[5]$ أو $P^4 \equiv 16[5]$.
 أي : $P^4 \equiv 1[5]$ و منه : $P^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي : $n \equiv 0[5]$ و بالتالي فإن 5 قاسم للعدد n .
- (4) أ) نفرض c يقبل القسمة على كل من a و b أي يكون : $c = k.a$ و $c = k'.b$ و منه : $k.a = k'.b$.
 لكن : a و b أوليان فيما بينهما ، إذن : نستخدم مبرهنة غوص .

لدينا b يقسم $k.a$ و b أولي مع a ، إذن : b يقسم k و بالتالي : $k = \alpha \times b$.

لدينا : $c = k.a$ أي : $c = \alpha \times b \times a$ و منه : c يقبل القسمة على الجداء $a \times b$.

ب) لدينا : n يقبل القسمة على 3 و على 5 و هما أوليان فيما بينهما ، إذن : n يقبل القسمة على 3×5 أي على 15

و من جهة أخرى لدينا : n يقبل القسمة على 16 الذي هو أولي مع 15 و بالتالي فإن : n يقبل القسمة على

15×16 ، إذن : n يقبل القسمة على 240 .

(5) بما أن الأعداد : P_1 ، P_2 ، ، P_{15} أولية و أكبر من أو تساوي 7 إذن يكون :

$$\cdot P_1^4 + P_2^4 + \dots + P_{15}^4 - 15 \equiv 0 [240] \quad \text{بالجمع نجد} \quad \begin{cases} P_1^4 - 1 \equiv 0 [240] \\ P_2^4 - 1 \equiv 0 [240] \\ \vdots \\ P_{15}^4 - 1 \equiv 0 [240] \end{cases}$$

أي : $A - 15 \equiv 0 [240]$ أي : $A - 15 = 240\beta$ و منه : $A = 240\beta + 15$ أي : $A = 15(16\beta + 1)$.

إذن : العدد A ليس أوليا و بالتالي لا توجد الأعداد P_1 ، P_2 ، ، P_{15} .