التمرين الأوّل:

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_0 وأساسها r حيث $u_3=3$ و $u_6=9$

1) أوجد الأساس r و حدّها الأوّل u_0.

2) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) هل العدد 37 حدا من حدود المتتالية (u_n)؟ إذا كان حدا ما رتبته ؟

4) أحسب المجموع S؛ حيث: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{20}$

5) احسب المجموع S_n؛ حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

الحل:

1) **إيجاد الأساس r و حدّها الأوّل u_0.**

(u_n) متتالية حسابية ومنه $u_6=u_3+3r$ يعني $9=3+3r$ أي $r=2$.

ولدينا $u_3=u_0+3r$ يعني $3=u_0+6$ أي $u_0=-3$.

2) **كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n.**

$u_n=u_0+nr$ ومنه $u_n=-3+2n$.

3) **هل العدد 37 حدا من حدود المتتالية (u_n)؟**

37 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه يوجد عدد طبيعي k بحيث $u_k=37$ أي $-3+2k=37$ ومنه $k=20$ إذن العدد 37 حد من حدود المتتالية (u_n) وهو الحد الحادي والعشرون.

4) **حساب المجموع S؛ حيث:** $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{20}$

$$S=\frac{21}{2}(u_0+u_{20})=\frac{21}{2}\left(-3+(-3+2\times 20)\right)=357$$

5) **حساب المجموع S_n؛ حيث:** $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

$$S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)=\frac{n+1}{2}(-3-3+2n)$$
$$=(n+1)(-3+n)$$

التمرين الثاني:

a، b و c ثلاثة أعداد متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث : $a+b+c=9$

1. أ) احسب b ثمّ اكتب a و c بدلالة r.

ب) علما أنّ $a\times c=-16$

ـ عيّن الأساس r ثمّ استنتج a و c.

2. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0=-2$ و أساسها 5.

أ) عبّر عن الحد العام u_n بدلالة n.

ب) احسب u_{15} ثمّ استنتج المجموع : $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{15}$.

3. (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n-8u_n=0$.

ـ احسب المجموع : $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_{15}$.

الحل:

1. أ) حساب b و كتابة a و c بدلالة r.

لدينا $a+b+c=9$ و حسب الوسط الحسابي لدينا $a+c=2b$ ومنه $3b=9$ أي $b=3$.

وعليه $a=b-r$ أي $a=3-r$ و $c=b+r$ أي $c=3+r$.

ب) تعيين الأساس r ثمّ استنتاج a و c.

لدينا $a\times c=-16$ معناه $(3-r)(3+r)=-16$ يكافئ $9-r^2=-16$ يكافئ $r^2=25$ ومنه $r=5$ أو $r=-5$ وبما أن المتتالية متزايدة فإنّ $r=5$.

2. أ) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

$u_n = u_0 + nr$ ومنه $u_n = -2+5n$.

ب) حساب u_{15} **ثمّ استنتاج المجموع :** $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{15}$.

$$u_{15} = -2 + 5\times 15 = 73$$

$$S = \frac{16}{2}\left(u_0 + u_{15}\right) = 8\left(-2+73\right) = 568$$

3. (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n - 8u_n = 0$.

ـ حساب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{15}$

لدينا $v_n - 8u_n = 0$ ومنه $v_n = 8u_n$

إذن $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{15} = 8u_0 + 8u_1 + 8u_2 + \ldots + 8u_{15}$

$$= 8\left(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{15}\right) = 8S = 4544$$

<u>التمرين الثالث:</u>

(u_n) متتالية معرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

1- احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثمّ أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

3- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

<u>الحل:</u>

1- حساب u_1 ، u_2 ، u_3

$$u_1 = \frac{u_0}{u_0+1} = \frac{1}{2}\text{، } u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\text{، } u_3 = \frac{u_2}{u_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}.$$

يبدو أنّ $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2- برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

$u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ ونبرهن أن $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1}$ أي نبرهن $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$ ومنه $u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+2}$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

3- دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) **واحسب نهايتها.**

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $n+2 > n+1$ معناه $\dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{n+2}$ أي $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الرابع:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$.

1) احسب الحدود u_1، u_2، u_3

2) أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ $u_n < 2$.

ب - بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ - بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل.

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

4) احسب المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج المجموع T_n ؛ حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$

الحل:

1) حساب الحدود u_1، u_2، u_3

$$u_1 = \frac{3u_0 + 2}{4} = \frac{3\times 1 + 2}{4} = \frac{5}{4} \text{ ، } u_2 = \frac{3u_1 + 2}{4} = \frac{3\times\frac{5}{4} + 2}{4} = \frac{23}{16} \text{ ، } u_3 = \frac{3u_2 + 2}{4} = \frac{3\times\frac{23}{16} + 2}{4} = \frac{121}{64}.$$

2) أ - برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ $u_n < 2$.

لدينا $u_0 < 2$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أنّ $u_n < 2$ من أجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن أن $u_{n+1} < 2$.

لدينا $u_n < 2$ معناه $3u_n < 6$ يكافئ $3u_n + 2 < 8$ يكافئ $\frac{3u_n + 2}{4} < 2$ أي $u_{n+1} < 2$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n < 2$ وهذا حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع.

ب - تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ليكن n عددا طبيعيا.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{4} - u_n = \frac{2 - u_n}{4}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 2$ ومنه $2 - u_n > 0$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ - استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

3) أ) تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل.

ليكن n عددا طبيعيا.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 2}{4} - 2 = \frac{3u_n - 6}{4} = \frac{3(u_n - 2)}{4} = \frac{3}{4}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1$.

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية إذن $v_n = v_0\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n.

لدينا $v_n = u_n - 2$ ومنه $u_n = v_n + 2$ أي $u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$.

جـ - تعيين نهاية المتتالية (u_n) ؟

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\right] = 2$ ، بما أنّ $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

4) حساب المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ **واستنتاج المجموع T_n ؛ حيث:** $T_n = u_0 + u_1 + \ldots u_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}\right)$$

$$S_n = 4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$$

استنتاج المجموع T_n ؛ حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \ldots u_n$

$$T_n = u_0 + u_1 + ..u_n = (v_0+2)+(v_1+2)+\ldots+(v_0+2) = 2(n+1)+v_0+v_1+\ldots+v_n$$

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + ..u_n = (v_0+2)+(v_1+2)+\ldots+(v_0+2) \\ &= 2(n+1)+v_0+v_1+\ldots+v_n \\ &= 2(n+1)+4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right) \end{aligned}$$

التمرين الخامس:

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 6$ والعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3. ماذا تخمن بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
2. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$.
3. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 3$.
4. أ - برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

   ب - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.
5. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

   أ - عيّن العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

   ب - أُكتب v_n بدلالة n ، واستنتج كتابة u_n بدلالة n . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

   جـ - نضع $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ ، احسب S_n بدلالة n .

الحل:

1. **حساب** u_1 ، u_2 و u_3.

$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3}\times 6 + 2 = 4$ ، $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3}\times 4 + 2 = \frac{10}{3}$ ، $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3}\times\frac{10}{3} + 2 = \frac{28}{9}$.

التخمين بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة.

aziz_mus1@hotmail.fr

2. التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-3=\frac{1}{3}(u_n-3)$.

$u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)$.

3. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq 3$.

لدينا $u_0\geq 3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $u_n\geq 3$ ونبرهن صحة الخاصية $u_{n+1}\geq 3$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-3=\frac{1}{3}(u_n-3)$ وحسب الفرضية لدينا $u_n\geq 3$ معناه $u_n-3\geq 0$ يكافئ $\frac{1}{3}(u_n-3)\geq 0$
ومنه $u_{n+1}-3\geq 0$ أي $u_{n+1}\geq 3$ ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq 3$.

4. أ ـ برهان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+2-u_n=\frac{-2}{3}u_n+2$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq 3$ معناه $\frac{-2}{3}u_n\leq -2$ يكافئ $\frac{-2}{3}u_n+2\leq 0$ أي $u_{n+1}-u_n\leq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

ب ـ استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

5. أ ـ تعيين العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}+\alpha=\frac{1}{3}u_n+2+\alpha\\&=\frac{1}{3}(v_n-\alpha)+2+\alpha\\&=\frac{1}{3}v_n+2+\frac{2}{3}\alpha\end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ إذا وفقط إذا كان $2+\frac{2}{3}\alpha=0$ أي $\alpha=-3$.

فيكون حدها الأول $v_0=u_0-3=6-3=3$.

ب ـ كتابة v_n بدلالة n،

$$v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=3\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n.

$$u_n=v_n+3=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\right)=3$.

التمرين السادس:

1. (u_n) متتالية حسابية متناقصة معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل u_0 و أساسها r.

أ ـ عيّن u_2 ثم r علما أنّ: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=24\\u_1^2+u_2^2+u_3^2=210\end{cases}$

ب ـ اكتب u_n بدلالة n، ثمّ احسب المجموع: $S_n=u_0+u_2+....+u_n$

aziz_mus1@hotmail.fr

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: $v_n = e^{14-3n}$ حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري.

أ - بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل؛ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. ماذا تستنتج ؟

ب - احسب المجموع: $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$؛ ثمّ احسب الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

جـ - احسب $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

الحل:

أ - تعيين u_2 ثم r.

لدينا (u_n) متتالية حسابية إذن $2u_2 = u_1 + u_3$ ولدينا $u_1 + u_2 + u_3 = 24$ ومنه $3u_2 = 24$ أي $u_2 = 8$.

لدينا $u_1 = u_2 - r = 8 - r$ و $u_3 = u_2 + r = 8 + r$.

$u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = 210$ معناه $(8-r)^2 + 8^2 + (8+r)^2 = 210$ يكافئ $r^2 = 9$ أي $r = 3$ أو $r = -3$.

من أجل $r = 3$ نجد $u_3 = 11$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متناقصة ومنه $r = -3$.

ب - كتابة u_n بدلالة n، وحساب المجموع: $S_n = u_0 + u_2 + ... + u_n$

$u_n = u_2 + (n-2)r$ ومنه $u_n = 8 - 3(n-2)$ أي $u_n = 14 - 3n$.

$$S_n = u_0 + u_2 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(14 + 14 - 3n)$$

$$.S_n = \frac{n+1}{2}(28 - 3n)$$

2. أ - تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل؛ وحساب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

$v_{n+1} = e^{14-3(n+1)} = e^{14-3n-3} = e^{14-3n} \times e^{-3} = e^{-3} v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-3}$ وحدها الأول $v_0 = e^{14-3\times 0} = e^{14}$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{14-3n} = 0$. نستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة.

ب - حساب المجموع: $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$؛ **ثمّ الجداء** $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

$$T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(e^{-3}\right)^{n+1}}{1 - e^{-3}} \right) = e^{14} \left(\frac{1 - e^{-3(n+1)}}{1 - e^{-3}} \right)$$

لدينا $v_n = e^{14-3n} = e^{u_n}$ ومنه $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times ... \times e^{u_n}$

$$P_n = e^{u_0 + u_1 + ... + u_n} = e^{S_n} = e^{\frac{n+1}{2}(28-3n)}$$

جـ - $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{14} \left(\frac{1 - e^{-3(n+1)}}{1 - e^{-3}} \right) = \frac{e^{14}}{1 - e^{-3}}$ لأن $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-3(n+1)} = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{n+1}{2}(28-3n)} = 0$ لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2}(28 - 3n) = -\infty$.

التمرين السابع:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}.$$

1. أ - احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأوّل u_1.

ب - أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ - احسب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$؛ ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

2. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n + u_n$.

أ - احسب v_2 و v_3.

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

- بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ - اكتب w_n بدلالة n، ثمّ استنتج v_n بدلالة n.

الحل:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}.$$

1. أ - حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأوّل u_1.

لدينا $u_1 \times u_3 = u_2^2$ ومنه $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ تعني $u_2^3 = 216$ أي $u_2 = 6$.

لدينا $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{q}$ و $u_3 = qu_2 = 6q$.

$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32$ معناه $\frac{6}{q} + 12 + 6q = 32$ بضرب طرفي المعادلة بالعدد q نجد $6 + 12q + 6q^2 = 32q$ أي

$6q^2 - 20q + 6 = 0$ بعد حساب المميز نجد $q = 3$ أو $q = \frac{1}{3}$.

من أجل $q = \frac{1}{3}$ نجد $u_3 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة وعليه $q = 3$.

ب - كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2(3)^{n-1}$$

جـ - حساب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$؛

$$S_n = u_1\left(\frac{3^n - 1}{3-1}\right) = 2\left(\frac{3^n - 1}{2}\right) = 3^n - 1$$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

$S_n = 728$ معناه $3^n - 1 = 728$ معناه $3^n = 729$ يكافئ $\ln 3^n = \ln 729$ ويكافئ $n \ln 3 = \ln 729$ أي $n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$

2. أ - حساب v_2 و v_3.

$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 3 + 2 = 5$ ؛ $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$.

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

- تبيين أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{u_{n+1}} - \frac{2}{3}$ ولدينا (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ إذن $u_{n+1} = 3u_n$

ومنه $w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$w_{n+1}=\frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}\right)$$

$$w_{n+1}=\frac{1}{2}w_n$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ - كتابة w_n بدلالة n،

$$w_n=w_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

استنتاج v_n بدلالة n.

لدينا $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ يكافئ $v_n=u_n\left(w_n+\frac{2}{3}\right)$ يكافئ $v_n=2(3)^n\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}\right)$ أي $v_n=(3)^{n-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+4\right)$

التمرين الثامن:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما ومعرّفة بـ: $u_0=e^2$ و $u_8=9u_{10}$.

1) عيّن أساس هذه المتتالية واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2) احسب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $P_n=u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$.

3) المتتالية (w_n) معرّفة على بـ: $w_n=\ln(u_n)$.

أ - برهن أنّ (w_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب - احسب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث: $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$.

ج - احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

الحل:

1) تعيين أساس هذه المتتالية وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

تذكر الحد العام لمتتالية هندسية أساسها q. $u_n=u_pq^{n-p}$.

لدينا $u_{10}=u_8\times q^2$

$u_8=9u_{10}$ معناه $u_8=9\times u_8\times q^2$ يكافئ $1=9q^2$ يكافئ $q^2=\frac{1}{9}$ وبما أن حدود المتتالية موجبة تماما فإن $q=\frac{1}{3}$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا $u_n=u_0q^n=e^2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{1}{3}<1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

2) حساب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $P_n=u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=e^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ومنه:

$$P_n=e^2\left(\frac{1}{3}\right)^0\times e^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\times e^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\ldots\times e^2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$P_n=\left(e^2\right)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{0+1+2+\ldots+n}=e^{2(n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

3. أ - برهان أنّ (w_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$w_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln\left(\frac{1}{3}u_n\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\ln(u_n)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)+w_n$$

إذن (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ وحدها الأول $w_0=\ln(u_0)=\ln e^2=2$.

بما أن (w_n) متتالية حسابية أساسها سالب فهي متتالية متناقصة.

ب ـ حساب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث: $S_n=w_0+w_1+...+w_n$ **.**

$$S_n=\frac{n+1}{2}(w_0+w_n)=\frac{n+1}{2}\left(2+2+n\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$S_n=\frac{n+1}{2}(4-n\ln 3)$$

ج ـ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2}(4-n\ln 3)}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2}}{n}\times\frac{4-n\ln 3}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}\times\frac{4-n\ln 3}{n}=\frac{1}{2}\times(-\ln 3)=-\frac{\ln 3}{2}$$

التمرين التاسع:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0=e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها.
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n=\ln(u_n)$.
   أ ـ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
   ب ـ اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).
4. نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$.
   أ ـ احسب S_n ثم P_n بدلالة n.
   ب ـ عين العدد الطبيعي n حتى يكون $P_n=e^{\frac{7}{4}}$.

الحل:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0=e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

لدينا $u_0>1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $u_n>1$ ومنه $\sqrt{u_n}>1$ أي $u_{n+1}>1$ وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

2. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أنّ $u_n>1$ فإنّ $u_n{}^2>u_n$ ومنه $u_n>\sqrt{u_n}$ أي $u_n>u_{n+1}$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج تقاربها.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n=\ln(u_n)$.

أ ـ تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ليكن n عددا طبيعيا

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$v_{n+1}=\ln u_{n+1}=\ln\sqrt{u_n}=\ln u_n^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln u_n=\frac{1}{2}v_n$؛ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأوّل $v_0=\ln u_0=\ln e=1$.

ب ـ كتابة v_n **و** u_n **بدلالة** n

$v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n=e^{v_n}=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

حساب نهاية المتتالية (u_n).

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$.

4. نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$.

أ ـ حساب S_n **ثم** P_n **بدلالة** n .

$$S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times...\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+...+v_n}$$

$$P_n=e^{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

ب ـ تعيين العدد الطبيعي n **حتى يكون** $P_n=e^{\frac{7}{4}}$.

$P_n=e^{\frac{7}{4}}$ معناه $e^{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}=e^{\frac{7}{4}}$ يكافئ $2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{7}{4}$ يكافئ $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{7}{8}$ يكافئ $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{8}$ أي

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^3$ وعليه $n=3$.

التمرين العاشر:

1) f دالة معرّفة على $[0;1]$ بـ: $f(x)=\frac{7x+2}{x+8}$ ، (C) تمثيلها البياني.

أ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f .

ب ـ بيّن أنّه لما $0\le x\le 1$ فإنّ $0\le f(x)\le 1$

جـ ـ تحقّق أنّه لما $0\le x\le 1$ فإنّ: $f(x)-x=\frac{(1-x)(x+2)}{x+8}$ ، واستنتج وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=f(u_n)=\frac{7u_n+2}{u_n+8}\end{cases}$.

أ ـ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 1$.

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

جـ ـ هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-1}$.

أ - برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{2}$.

ب - عيّن v_n بدلالة n، ثمّ بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{-2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1}$.

جـ - احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د - احسب بدلالة n، كلا من S_n و P_n حيث: $S_n = v_0+v_1+...+v_n$ و $P_n = v_0\times v_1\times...\times v_n$.

الحل:

أ - دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

f دالة تقبل الإشتقاق على $[0;1]$ ولدينا $f'(x)=\dfrac{7(x+8)-(7x+2)}{(x+8)^2}=\dfrac{54}{(x+8)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ لدينا $f'(x)>0$ ومنه دالة متزايدة تماما على $[0;1]$.

ب - تبيان أنّه لما $0\le x\le 1$ فإنّ $0\le f(x)\le 1$

من أجل $0\le x\le 1$ لدينا $f(0)\le f(x)\le f(1)$ أي $\dfrac{1}{4}<f(x)<1$ وبالتالي $0\le f(x)\le 1$.

جـ - التحقّق أنّه لما $0\le x\le 1$ فإنّ: $f(x)-x=\dfrac{(1-x)(x+2)}{x+8}$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;1]$.

$$f(x)-x=\frac{7x+2}{x+8}-x=\frac{7x+2-x(x+8)}{x+8}$$

$$f(x)-x=\frac{-x^2-x-6}{x+8}=\frac{(1-x)(x+2)}{x+8}$$

استنتاج وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا $1-x>0$ و $x+2>0$ و $x+8>0$ ومنه $f(x)-x>0$ نستنتج أن (C) موجود فوق (Δ).

2) أ - برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 1$.

لدينا $0\le u_0\le 1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $0\le u_n\le 1$ من أجل عدد طبيعي n ولنبرهن أنّ $0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا $0\le u_n\le 1$ وحسب نتيجة السؤال 1) ب. فإن $0\le f(u_n)\le 1$ أي $0\le u_{n+1}\le 1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 1$.

ب - استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ لدينا $f(x)-x>0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 1$ فإن $f(u_n)-u_n\ge 0$ أي $u_{n+1}-u_n\ge 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ - برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{2}$.

ليكن n عددا طبيعيا:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{7u_n+2}{u_n+8}+2}{\frac{7u_n+2}{u_n+8}-1}=\frac{\frac{9u_n+18}{u_n+8}}{\frac{6u_n-6}{u_n+8}}$$

$$v_{n+1}=\frac{9u_n+18}{6u_n-6}=\frac{9(u_n+2)}{6(u_n-1)}=\frac{9}{6}v_n=\frac{3}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$.

ب ـ تعيين v_n **بدلالة** n.

ولدينا $v_n=v_0\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ولدينا $v_0=\frac{u_0+2}{u_0-1}=-2$ ومنه $v_n=-2\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

تبيان أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}$.

لدينا $v_n=\frac{u_n+2}{u_n-1}$ معناه $v_n(u_n-1)=u_n+2$ يكافئ $u_n(v_n-1)=v_n+2$ ومنه $u_n=\frac{v_n+2}{v_n-1}$ أي $u_n=\frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}$

جـ ـ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(-2+\frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(-2-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2+\frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}}{-2-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}}$$

بما أنّ $\frac{3}{2}>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}=0$ وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

د ـ حساب بدلالة n، **كلا من** S_n **و** P_n **حيث:** $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

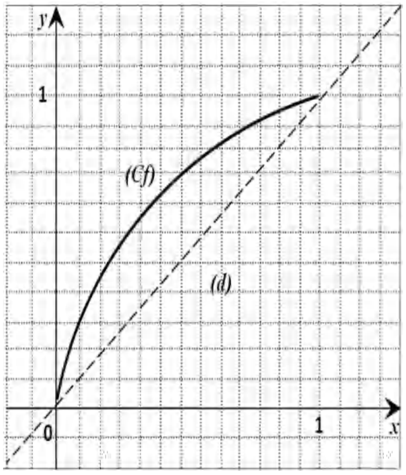
$$S_n = v_0\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right) = -2\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}}\right).$$

$$S_n = -4\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right) = 4\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = -2\left(\frac{3}{2}\right)^0 \times -2\left(\frac{3}{2}\right)^1 \times \ldots \times -2\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$P_n = (-2)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{0+1+\ldots+n} = (-2)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين الحادي عشر:



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل، $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ ـ أعد رسم هذا الشكل، ثمّ مثّل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب ـ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

جـ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

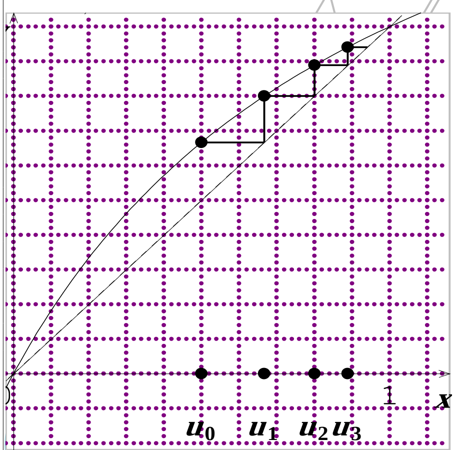
أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، يطلب حساب حدّها الأوّل v_0.

ب) احسب نهاية (u_n).

جـ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}$

الحل:

أ ـ **تمثيل الحدود** u_0، u_1، u_2 **و** u_3



ب ـ لدينا $u_0<u_1<u_2<u_3$ يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

2) أ) إثبات أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;1]$.

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ لدينا $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهان بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $0<u_0<1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $0<u_n<1$ من أجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن صحة الخاصية $0<u_{n+1}<1$.

لدينا $0<u_n<1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ ولدينا $f(0)=0$ ، $f(1)=1$

و $f(u_n)=u_{n+1}$ إذن $0<u_{n+1}<1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

جـ) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ليكن n عددا طبيعيا

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\frac{u_n-u_n^2}{u_n+1}=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$ ومنه $u_n>0$ و $1-u_n>0$ و $u_n+1>0$ إذن $\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

أ) برهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأوّل v_0.

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{\frac{2u_n}{u_n+1}-1}{\frac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{\frac{2u_n-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{\frac{u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2u_n}{u_n+1}}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{u_n}=\frac{1}{2}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$.

ب) حساب نهاية (u_n).

لدينا $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}-\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

إذن $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-1}{u_n}=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n-1=0$ أي $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

$$S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}=\frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^0}+\frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^1}+\frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$S_n=-\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2^1}}+\frac{1}{\frac{1}{2^2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{1}{2^n}}\right)=-\left(1+2^1+2^2+\ldots+2^n\right)$$

$$S_n=-\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)=1-2^{n+1}$$

☜ **تذكير:**

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

التمرين الثاني عشر:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{1}{u_n}$.

1. ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ المعرّفة كما يلي: $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$.
2. تحقق أنّه إذا كان: $\sqrt{2}\le x\le 2$ فإنّ: $\sqrt{2}\le f(x)\le 2$.
3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ: $\sqrt{2}\le u_n\le 2$.
4. برهن أنّه إذا كان: $\sqrt{2}\le x\le 2$ فإنّ: $f(x)\le x$.
5. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.
6. تحقّق أنّ (u_n) متقاربة، ثمّ عيّن نهايتها.

الحل:

1. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2}{2x^2}=\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{2x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ لدينا $x-\sqrt{2}>0$ و $x+\sqrt{2}>0$ و $2x^2>0$ ومنه $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

2. **التحقق أنّه إذا كان: $\sqrt{2}\le x\le 2$ فإنّ: $\sqrt{2}\le f(x)\le 2$.**

لدينا f دالة متزايدة تماما على المجال $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

إذا كان $\sqrt{2}\le x\le 2$ فإنّ $f\left(\sqrt{2}\right)\le f(x)\le f(2)$ ومنه $\sqrt{2}\le f(x)\le\frac{3}{2}$ وبالتالي $\sqrt{2}\le f(x)\le 2$.

3. **برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ: $\sqrt{2}\le u_n\le 2$.**

لدينا $u_0=2$ ومنه $\sqrt{2}\le u_0\le 2$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض أن $\sqrt{2}\le u_n\le 2$ وحسب نتيجة السؤال 2 فإنّ $\sqrt{2}\le f(u_n)\le 2$ أي $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le 2$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\sqrt{2}\le u_n\le 2$.

4. **برهان أنّه إذا كان: $\sqrt{2}\le x\le 2$ فإنّ: $f(x)\le x$.**

لدينا $f(x)-x=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}=\frac{2-x^2}{2x}=\frac{\left(\sqrt{2}+x\right)\left(\sqrt{2}-x\right)}{2x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[\sqrt{2};2\right]$ لدينا $\sqrt{2}+x>0$ و $\sqrt{2}-x\le 0$ و $2x>0$ ومنه $f(x)-x\le 0$ أي $f(x)\le x$.

5. **استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.**

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $\sqrt{2}\le u_n\le 2$ ومنه $f(u_n)\le u_n$ أي $u_{n+1}\le u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

6. **التحقّق أنّ (u_n) متقاربة، و تعيين نهايتها.**

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\sqrt{2}$ فهي متقاربة

تعيين نهايتها

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ حيث ℓ عدد حقيقي ولدينا $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ وعليه

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ ومنه $\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$ يكافئ $\ell = \frac{\ell^2+2}{2\ell}$ يكافئ $\ell^2 - 2 = 0$ ومنه $\ell = \sqrt{2}$ أو $\ell = -\sqrt{2}$ وبما أنه من

أجل كل عدد طبيعي n، $\sqrt{2} \le u_n \le 2$ فإن $\ell = \sqrt{2}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

التمرين الثالث عشر:

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث حدّها الأوّل $u_0 = 1$ وبالعلاقة التراجعية $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$

لكل n من $\mathbb{N}^*$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. أ ـ عيّن α حتّى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

ب ـ ما طبيعة المتتالية (u_n) إذا كان $\alpha = 1$.

2. نفرض أنّ $\alpha \ne 1$ و $\alpha \ne -1$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{1-\alpha}$

أ ـ برهن أنّ (v_n) هي متتالية هندسية، يطلب تعيين حدّها الأوّل v_0 وأساسها q.

ب ـ عيّن قيّم α حتّى تكون المتتالية (v_n) متقاربة، ثمّ احسب نهاية المتتالية (v_n).

الحل:

1. أ ـ تعيين α حتّى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(u_n) ثابتة معناه $u_0 = u_{n-1} = u_n$ معناه $u_0 = \alpha u_0 + 2$ يكافئ $1 = \alpha + 2$ أي $\alpha = -1$.

ب ـ طبيعة المتتالية (u_n) إذا كان $\alpha = 1$.

من أجل $\alpha = 1$ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = u_{n-1} + 2$ ومنه $u_n - u_{n-1} = 2$ إذن المتتالية (u_n) حسابية أساسها 2.

2. أ ـ برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين حدّها الأوّل v_0 وأساسها q.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{1-\alpha} = \alpha u_n + 2 - \frac{2}{1-\alpha} = \alpha u_n + \frac{2-2\alpha-2}{1-\alpha}$$

$$v_{n+1} = \alpha u_n - \frac{2\alpha}{1-\alpha} = \alpha\left(u_n - \frac{2}{1-\alpha}\right) = \alpha v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$ وحدها الأول $\frac{-1-\alpha}{1-\alpha} = 1 - \frac{2}{1-\alpha} = u_0 - \frac{2}{1-\alpha} = v_0$.

ب ـ تعيين قيّم α حتّى تكون المتتالية (v_n) متقاربة.

لدينا $v_n = v_0\alpha^n = \frac{-1-\alpha}{1-\alpha}\alpha^n$ المتتالية (v_n) متقاربة من أجل قيم α من المجال $]-1;1[$.

حساب نهاية المتتالية (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1-\alpha}{1-\alpha}\alpha^n = 0$ لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$.

التمرين الرابع عشر:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرّفة كما يلي: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1. أحسب u_1، u_2، u_3.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ من أجل كل n، حيث α و β عددان حقيقيان.

ـ عيّن العددين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

3. نفرض فيما يلي: $\alpha = 6$ و $\beta = -23$.

أ ـ اكتب عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب ـ نضع : $\pi_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

ـ احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة π_n.

الحل:

1. حساب u_1 ، u_2 ، u_3.

$u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 2\times 0 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}\times 3 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$ ، $u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 2\times 1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}\times\frac{11}{3} - 2 + \frac{5}{3} = \frac{19}{9}$ ،

$u_3 = \frac{2}{3}u_2 - 2\times 2 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}\times\frac{19}{9} - 4 + \frac{5}{3} = \frac{-25}{27}$.

2. ـ تعيين العددين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$ ولدينا $u_n = v_n - \alpha n - \beta$ إذن

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - \alpha n - \beta) - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3}\alpha n - \frac{2}{3}\beta - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}\alpha n - 2n + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + n\left(\frac{1}{3}\alpha - 2\right) + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{1}{3}\alpha - 2 = 0$ و $\frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0$ يكافئ $\alpha = 6$ و $\frac{1}{3}\beta + 6 + \frac{5}{3} = 0$ وعليه $\alpha = 6$ و $\beta = -23$.

3. أ ـ كتابة عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n.

$v_0 = u_0 + 6\times 0 - 23 = -20$ ومنه $v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = -20\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

لدينا $u_n = v_n - \alpha n - \beta = v_n - 6n + 23$ ومنه $u_n = -20\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6n + 23$.

ب ـ نضع : $\pi_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

ـ حساب S_n بدلالة n

$$S_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) = -20\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right) = -60\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

استنتاج عبارة π_n.

$$\pi_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (v_0 - 6\times 0 + 23) + (v_1 - 6\times 1 + 23) + \ldots + (v_n - 6n + 23)$$

$$\pi_n = (v_0 + v_0 + \ldots + v_n) - 6(0 + 1 + \ldots + n) + 23(n+1)$$

$$\pi_n = -60\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 6\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 23(n+1)$$

$$\pi_n = -60\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 3\left(n(n+1)\right) + 23(n+1).$$

$$\pi_n = -60\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+(n+1)(-3n+23)$$

التمرين الخامس عشر:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين بـ: $u_0=3$ و $v_0=4$، ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ و $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}$.

1. احسب u_1، v_1، u_2 و v_2.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $w_n=v_n-u_n$.
- بيّن أنّ المتتالية (w_n) هندسية وعيّن نهايتها.
3. ادرس اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n)، ثمّ استنتج أنّهما متجاورتان.
4. نعتبر أنّ (t_n) هي المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $t_n=\dfrac{1}{3}(u_n+2v_n)$.

أ - برهن أنّ (t_n) متتالية ثابتة.

ب - عيّن ℓ، النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

جـ - أوجد عبارتي u_n و v_n بدلالة n، ثمّ أوجد مرّة ثانية نهايتي (u_n) و (v_n).

الحل:

1. **حساب** u_1، v_1، u_2 **و** v_2.

$u_1=\dfrac{u_0+v_0}{2}=\dfrac{3+4}{2}=\dfrac{7}{2}$، $v_1=\dfrac{u_1+v_0}{2}=\dfrac{\frac{7}{2}+4}{2}=\dfrac{\frac{15}{2}}{2}=\dfrac{15}{4}$، $u_2=\dfrac{u_1+v_1}{2}=\dfrac{\frac{7}{2}+\frac{15}{4}}{2}=\dfrac{\frac{29}{4}}{2}=\dfrac{29}{8}$،

$v_2=\dfrac{u_2+v_1}{2}=\dfrac{\frac{29}{8}+\frac{15}{4}}{2}=\dfrac{\frac{59}{8}}{2}=\dfrac{59}{16}$.

2. - تبيان أنّ المتتالية (w_n) **هندسية.**

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}$$

$$w_{n+1}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2}=\frac{\frac{v_n-u_n}{2}}{2}=\frac{w_n}{4}=\frac{1}{4}w_n$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$.

تعيين نهاية المتتالية (w_n).

لدينا $w_0=v_0-u_0=4-3=1$ ومنه $w_n=w_0\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

بما أنّ $-1<\dfrac{1}{4}<1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$.

3. **دراسة اتجاه تغيّر المتتاليتين** (u_n) **و** (v_n).

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{w_n}{2}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2}$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

من أجل كل عدد طبيعي n، $\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_{n+1} - v_n}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} = \frac{\frac{u_n - v_n}{2}}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{4}$$

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

استنتاج أنهما متجاورتان.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ وبما أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) إتجاهين مختلفين فهما متجاورتان.

4. أ ـ برهان أنّ (t_n) متتالية ثابتة.

ليكن n عددا طبيعيا

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + 2\left(\frac{u_{n+1} + v_n}{2}\right)\right)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n\right) = \frac{1}{3}(u_n + v_n + v_n)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

$$t_{n+1} = t_n$$

إذن (t_n) متتالية ثابتة حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $t_n = t_0 = \frac{1}{3}(u_0 + 2v_0) = \frac{1}{3} \times 11 = \frac{11}{3}$.

ب ـ تعيين ℓ، النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

بما أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ.

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ معناه $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ معناه $\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(\ell + 2\ell)$ يكافئ $\frac{11}{3} = \frac{1}{3} \times 3\ell$ أي $\ell = \frac{11}{3}$.

جـ ـ ايجاد عبارتي u_n و v_n بدلالة n،

لدينا $w_n = v_n - u_n$ معناه $\left(\frac{1}{4}\right)^n = v_n - u_n$ ولدينا $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ معناه $\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ أي $11 = u_n + 2v_n$ نحصل

على الجملة $\begin{cases} 11 = u_n + 2v_n \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n = v_n - u_n \end{cases}$ بجمع المعادلتين نجد $3v_n = 11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ أي $v_n = \frac{1}{3}\left(11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

من المعادلة الأولى لدينا $u_n = 11 - 2v_n$ أي $u_n = 11 - \frac{2}{3}\left(11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

ايجاد مرّة ثانية نهايتي (u_n) و (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(11+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{11}{3}$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[11-\frac{2}{3}\left(11+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right] = 11-\frac{2}{3}\times 11 = \frac{11}{3}$.

التمرين السادس عشر:

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n+6}$.

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3) **أ)** برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 6-u_n \le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

1) تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل.

$v_{n+1} = \frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}} = \frac{5^{n+1}\times 5}{6^n\times 6} = \frac{5}{6}\times\frac{5^{n+1}}{6^n} = \frac{5}{6}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5^{n+1}}{6^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5\times 5^n}{6^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

II) **1) برهان بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 6$.**

لدينا $1 \le u_0 \le 6$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $1 \le u_n \le 6$ من أجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن صحة الخاصية $1 \le u_{n+1} \le 6$.

لدينا $1 \le u_n \le 6$ معناه $5 \le 5u_n \le 30$ يكافئ $11 \le 5u_n+6 \le 36$ يكافئ $\sqrt{11} \le \sqrt{5u_n+6} \le \sqrt{36}$ وهذا يعني أن $1 \le u_{n+1} \le 6$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فانه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإنّ $1 \le u_n \le 6$.

2) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ليكن n عددا طبيعيا

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{5u_n+6}-u_n = \frac{\left(\sqrt{5u_n+6}-u_n\right)\left(\sqrt{5u_n+6}+u_n\right)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{5u_n+6-u_n^2}{\sqrt{5u_n+6}+u_n} = \frac{(u_n+1)(6-u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

بما أنّ $1 \le u_n \le 6$ فإنّ $\sqrt{5u_n+6}+u_n > 0$ و $u_n+1 > 0$ و $6-u_n \ge 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n \ge 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة.

3) أ) برهان أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$6-u_{n+1}=6-\sqrt{5u_n+6}=\frac{\left(6-\sqrt{5u_n+6}\right)\left(6+\sqrt{5u_n+6}\right)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$$

$$6-u_{n+1}=\frac{36-(5u_n+6)}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\frac{30-5u_n}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $\sqrt{5u_n+6}>0$ معناه $6+\sqrt{5u_n+6}>6$ يكافئ $\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}<\frac{1}{6}$ وبما أن $5(6-u_n)\geq 0$

فإن $\frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}\leq\frac{5}{6}(6-u_n)$ إذن $6-u_{n+1}\leq\frac{5}{6}(6-u_n)$.

ب) تبيان أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0\leq 6-u_n\leq v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لدينا $6-u_0=5$ و $v_0=5$ إذن $0\leq 6-u_0\leq v_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $6-u_n\leq v_n$ ومنه $\frac{5}{6}(6-u_n)\leq\frac{5}{6}v_n$ أي $\frac{5}{6}(6-u_n)\leq v_{n+1}$ ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n،

$6-u_{n+1}\leq\frac{5}{6}(6-u_n)$ إذن $6-u_{n+1}\leq v_{n+1}$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $6-u_n\leq v_n$.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq 6$ معناه $6-u_n\geq 0$ ومنه $0\leq 6-u_n\leq v_n$.

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $0\leq 6-u_n\leq v_n$ و بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ فإنه حسب النهايات بالحصر $\lim\limits_{n\to+\infty}6-u_n=0$ وهذا يعني أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$.

التمرين السابع عشر:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1. احسب الحدود u_1، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
2. أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq n+3$.
   ب ـ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
   ج ـ استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل ؛ هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة؟
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n-n$.
   أ ـ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
   ب ـ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
   جـ ـ احسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.
4. لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $t_n=\ln(v_n)$.
   أ ـ بين أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
   ب ـ احسب بدلالة n المجموع $A_n=t_0+t_1+t_2+...+t_n$ واستنتج بدلالة n الجداء $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$.

الحل:

1. احسب الحدود u_1، u_2 و u_3.

$u_1=\frac{2}{3}u_0+\frac{1}{3}\times 0+1=\frac{2}{3}\times 2+1=\frac{7}{3}$، $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}+\frac{1}{3}+1=\frac{26}{9}$،

$u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{1}{3}\times 2+1=\frac{2}{3}\times\frac{26}{9}+\frac{2}{3}+1=\frac{97}{27}$.

لدينا $u_0<u_1<u_2<u_3$ يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. أ ـ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le n+3$.

لدينا $u_0 \le 0+3$ لأن $u_0 = 2$ و $0+3=3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_n \le n+3$ ونبرهن أن $u_{n+1} \le (n+1)+3$ أي نبرهن أن $u_{n+1} \le n+4$.

لدينا $u_n \le n+3$ معناه $\frac{2}{3}u_n \le \frac{2}{3}n+2$ يكافئ $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n \le \frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n$ أي $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n \le n+2$ يكافئ

$\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1 \le n+3$ أي $u_{n+1} \le n+3$ وبما أن $n+3 \le n+4$ فإن $u_{n+1} \le n+4$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le n+3$.

ب ـ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n = -\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1 = \frac{1}{3}(-u_n+n+3)$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le n+3$ يعني $-u_n+n+3 \ge 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n \ge 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

ج ـ استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل

لدينا $u_0 = 2$ والمتتالية (u_n) متزايدة إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \ge 2$ ومنه (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لا يمكن القول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3. أ ـ تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1}-n-1$ معناه $3v_{n+1} = 3u_{n+1}-3n-3$ يكافئ $3v_{n+1} = 2u_n+n+3-3n-3$ يكافئ $3v_{n+1} = 2u_n-2n$ يكافئ $3v_{n+1} = 2(u_n-n)$ معناه $3v_{n+1} = 2v_n$ أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0-0 = 2$.

ب ـ $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ولدينا $v_n = u_n-n$ معناه $u_n = v_n+n$ أي $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $-1<\frac{2}{3}<1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\right) = +\infty$

جـ ـ حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = v_n+n$.

$$S_n = (v_0+0)+(v_1+1)+(v_2+2)+...+(v_n+n)$$

$$S_n = (v_0+v_1+v_2+...+v_n)+(0+1+2+...+n)$$

لدينا (v_n) متتالية هندسية ومنه $v_0+v_1+v_2+...+v_n = v_0\left(\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) = 2\left(\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right) = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

ولدينا $0+1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

إذن $S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\dfrac{n(n+1)}{2}$

أ ـ تبيان أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$t_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{2}{3}v_n\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln(v_n) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)+t_n$$

إذن (t_n) متتالية حسابية أساسها $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ وحدها الأول $t_0=\ln(v_0)=\ln 2$.

ب ـ حساب بدلالة n المجموع $A_n=t_0+t_1+t_2+...+t_n$

$$A_n=\frac{n+1}{2}(t_0+t_n)=\frac{n+1}{2}\left(\ln 2+\ln 2+n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right).$$

$$A_n=\frac{n+1}{2}\left(\ln 4+n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

استنتاج بدلالة n الجداء $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$.

لدينا $\ln(P_n)=\ln(v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n)=\ln(v_0)+\ln(v_1)+\ln(v_2)+...+\ln(v_n)$

$\ln(P_n)=t_0+t_1+t_2+...+t_n=A_n$

ومنه $P_n=e^{A_n}$ أي $P_n=e^{\frac{n+1}{2}\left(\ln 4+n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)}$.

<u>التمرين الثامن عشر:</u>

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي:

$u_0=e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n=\sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثمّ احسب حدّها الأوّل.

2) اكتب v_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n؛ حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

4) احسب بدلالة n الجداء P_n؛ حيث: $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

<u>الحل:</u>

1) تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$،

ليكن n عددا طبيعيا.

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}\ln u_{n+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\ln u_{n+1}+1)=\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{\frac{u_n}{e}}+1\right)$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\ln(u_n)-\ln e)+1\right)$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(u_n)-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(u_n)+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، وحدها الأول $v_0=\frac{1}{2}\ln u_0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln e^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

2) كتابة v_n بدلالة n، ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n.

$v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $v_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$ يعني $\frac{1}{2}\ln u_n=v_n-\frac{1}{2}$ يكافئ $\ln u_n=2v_n-1$ يكافئ $u_n=e^{2v_n-1}$ أي $u_n=e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n؛ حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$S_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) = 3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

لدينا $-1<\frac{1}{2}<1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=3$.

4) حساب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $P_n = u_0\times u_1\times\ldots\times u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = e^{2v_n-1}$ ومنه $P_n = u_0\times u_1\times\ldots\times u_n = e^{2v_0-1}\times e^{2v_1-1}\times\ldots+e^{2v_n-1}$

$$P_n = e^{(2v_0-1)+(2v_1-1)+\ldots+(2v_n-1)}$$

$$P_n = e^{2(v_0+v_1+\ldots+v_n)-(n+1)} = e^{2S_n-(n-1)} = e^{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-(n-1)}.$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-(n-1)\right]=-\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-(n-1)}=0$.

التمرين التاسع عشر:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=\frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $3<u_n<4$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n = \frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times\ldots\times(u_n-3)$.

أكتب P_n بدلالة n، ثمّ بيّن أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

الحل:

1) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $3<u_n<4$.

لدينا $3<u_0<4$ ومنه خاصية الإبتداء صحيحة

ليكن k عددا طبيعيا

نفرض أن $3<u_k<4$ إذن $0<u_k-3<1$ ومنه $0<\sqrt{u_k-3}<1$ يكافئ $3<3+\sqrt{u_k-3}<4$ أي $3<u_{k+1}<4$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3<u_n<4$.

2) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n = \frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.

$$u_{n+1}-u_n = 3+\sqrt{u_n-3}-u_n = \sqrt{u_n-3}-(u_n-3)$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n-3}-(u_n-3)\right)\left(\sqrt{u_n-3}+(u_n-3)\right)}{\left(\sqrt{u_n-3}+(u_n-3)\right)} = \frac{u_n-3-(u_n-3)^2}{\left(\sqrt{u_n-3}+(u_n-3)\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-3-\left(u_n^2-6u_n+9\right)}{\left(\sqrt{u_n-3}+\left(u_n-3\right)\right)}=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\left(\sqrt{u_n-3}+\left(u_n-3\right)\right)}.$$

استنتاج أنّ (u_n) متزايدة تماما.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]3;4[$ لدينا $-x^2+7x-12>0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3<u_n<4$ فإن $-u_n^2+7u_n-12>0$ ولدينا $u_n-3>0$ لأن $u_n>3$ و $\sqrt{u_n-3}>0$ ومنه $\sqrt{u_n-3}+\left(u_n-3\right)>0$ إذن $\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\left(\sqrt{u_n-3}+\left(u_n-3\right)\right)}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) تبرير لماذا (u_n) متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة.

4) أ) برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

$$v_{n+1}=\ln\left(u_{n+1}-3\right)=\ln\left(3+\sqrt{u_n-3}-3\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-3}\right)$$

$$v_{n+1}=\ln\left(\sqrt{u_n-3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{u_n-3}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\ln\left(u_0-3\right)=\ln\left(\frac{13}{4}-3\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

ب) كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$$v_n=\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا $v_n=\ln\left(u_n-3\right)$ يكافئ $u_n-3=e^{v_n}$ يكافئ $u_n=e^{v_n}+3$ أي $u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\ln\frac{1}{4}\right)}+3=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}+3=\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+3=4$.

كتابة P_n بدلالة n،

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n-3=e^{v_n}$.

ومنه $P_n=\left(u_0-3\right)\times\left(u_1-3\right)\times\ldots\times\left(u_n-3\right)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$

ولدينا
$$v_0+v_1+\ldots+v_n=\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right)=\left(\ln\frac{1}{16}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

إذن $P_n=e^{\left(\ln\frac{1}{16}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$.

تبيان أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{16}$.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ لأن $-1<\frac{1}{2}<1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\left(\ln\frac{1}{16}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}=e^{\ln\frac{1}{16}}=\frac{1}{16}$.

التمرين العشرون:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{-4}{u_n - 4}$.

1) احسب كلا من u_1، u_2 و u_3.

2) باستعمال البرهان بالتراجع بيّن أنّ: $u_n \neq 2$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

أ ـ بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب إيجاد أساسها و حدّها الأول

ب ـ اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ ـ هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

الحل:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{-4}{u_n - 4}$.

1) حساب كلا من u_1، u_2 **و** u_3.

$u_1 = \frac{-4}{u_0 - 4} = \frac{4}{3}$ ؛ $u_2 = \frac{-4}{u_1 - 4} = \frac{-4}{\frac{4}{3} - 4} = \frac{3}{2}$ و $u_3 = \frac{-4}{u_2 - 4} = \frac{-4}{\frac{3}{2} - 4} = 10$.

2) تبيان أنّ: $u_n \neq 2$.

من أجل $n = 0$ نجد $u_0 \neq 2$ ومنه مرحلة الإبتداء صحيحة

ليكن k عددا طبيعيا

نفرض أن $u_k \neq 2$ ونبرهن أن $u_{k+1} \neq 2$

لدينا $u_{k+1} - 2 = \frac{-4}{u_k - 4} - 2 = \frac{-4 - 2u_k + 8}{u_k - 4} = \frac{-2(u_k - 2)}{u_k - 4}$

لدينا حسب الفرضية $u_k \neq 2$ ومنه $u_{k+1} - 2 \neq 0$ أي $u_{k+1} \neq 2$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \neq 2$

3) **أ ـ تبيان أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب إيجاد أساسها و حدّها الأول**

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{-4}{u_n - 4} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{-2u + 4}{u_n - 4}} - \frac{1}{u_n - 2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 4}{-2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 4}{-2(u_n - 2)} + \frac{2}{-2(u_n - 2)} = \frac{-1}{2}$$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\frac{1}{2}$

وحدها الأوّل $v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{1 - 2} = -1$

ب ـ كتابة عبارة v_n بدلالة n، واستنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 + nr = -1 - \frac{1}{2}n$$

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ ومنه $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$ أي $u_n = \frac{1}{v_n} + 2 = \frac{2v_n + 1}{v_n}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

وعليه $u_n=\dfrac{2\left(-1-\dfrac{1}{2}n\right)+1}{-1-\dfrac{1}{2}n}=\dfrac{-n-1}{-1-\dfrac{1}{2}n}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}(2n+2)}{-\dfrac{1}{2}(2+n)}=\dfrac{2n+2}{2+n}$

جـ - المتتالية (u_n) متقاربة لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+2}{2+n}=2$

<u>التمرين الحادي والعشرون:</u>

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=-3$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n-8}{2u_n-9}$.

1) أ) مثل بيانيا الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-8}{2x-9}$.

ب) استعمل منحنى الدّالة f لتخمين تصرف المتتالية (u_n).

2) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<1$.

3) برهن أنّ (u_n) متزايدة وأنها متقاربة.

4) نعتبر المتتالية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=1-u_n$.

أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}<\dfrac{1}{7}v_n$، ثمّ استنتج أنّ: $0<v_n<4\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$.

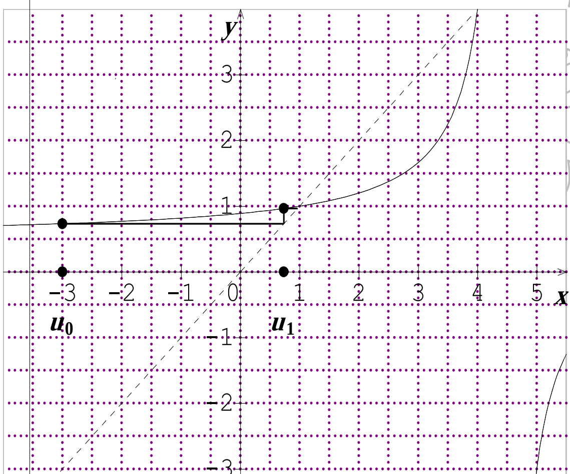
ب) ماهي نهاية المتتالية (v_n)؟

جـ) ماهي نهاية المتتالية (u_n)؟

<u>الحل:</u>

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=-3$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n-8}{2u_n-9}$.

1) أ) تمثيل بيانيا الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-8}{2x-9}$.



ب) حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

2) برهان بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<1$.

من أجل $n=0$ نجد $u_0<1$ ومنه مرحلة الإبتداء صحيحة.

ليكن k عددا طبيعيا.

نفترض أن $u_k<1$ ولنبرهن أنّ $u_{k+1}<1$.

لدينا حسب الفرضية $u_k<1$ إذن $u_{k+1}-1=\dfrac{u_k-8}{2u_k-9}-1=\dfrac{-u_k+1}{2u_k-9}$

$-u_k+1>0$ و $2u_k-9<0$ ومنه $u_{k+1}-1<0$ أي $u_{k+1}<1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<1$

3) برهان أنّ (u_n) متزايدة وأنّها متقاربة.

ليكن n عددا طبيعيا

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n-8}{2u_n-9}-u_n=\dfrac{-2u_n+10u_n-8}{2u_n-9}=\dfrac{-2(u_n-1)(u_n-4)}{2u_n-9}$

لدينا $u_n<1$ ومنه $u_n-1<0$ و $u_n-4<-3<0$ و $2u_n-9<0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

4) أ) برهان أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}<\dfrac{1}{7}v_n$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$v_{n+1}=1-u_{n+1}=1-\frac{u_n-8}{2u_n-9}=\frac{-(1-u_n)}{2u_n-9}$$

لدينا $u_n<1$ معناه $2u_n<2$ تكافئ $2u_n-9<-7$ تكافئ $\frac{1}{2u_n-9}>\frac{-1}{7}$ تكافئ $\frac{-1}{2u_n-9}<\frac{1}{7}$

وبما أنّ $1-u_n>0$ فإن $\frac{-(1-u_n)}{2u_n-9}<\frac{1}{7}(1-u_n)$ أي $v_{n+1}<\frac{1}{7}v_n$

استنتاج أنّ: $0<v_n<4\left(\frac{1}{7}\right)^n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}<\frac{1}{7}v_n$ ومنه
$$\begin{cases} v_1<\frac{1}{7}v_0\\ v_2<\frac{1}{7}v_1\\ v_3<\frac{1}{7}v_2\\ .\\ .\\ v_n<\frac{1}{7}v_{n-1}\end{cases}$$

بالضرب طرفا إلى طرف نجد $v_1\times v_2\times v_3\times\ldots\times v_n<\frac{1}{7}v_0\times\frac{1}{7}v_1\times\frac{1}{7}v_2\times\ldots\times\frac{1}{7}v_{n-1}$ ومنه $v_n<\left(\frac{1}{7}\right)^n v_0$ ولدينا

$v_0=1-u_0=4$ أي $v_n<4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

ولدينا من جهة أخرى $1-u_n>0$ ومنه $v_n>0$ إذن $0<v_n<4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

ب) تعيين نهاية المتتالية (v_n)؟

لدينا $\lim_{n\to+\infty}4\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$ إذن حسب النهايات بالمقارنة فإن $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$

جـ) حساب نهاية المتتالية (u_n)؟

لدينا $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}1-u_n=0$ أي $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

<u>التمرين الثاني والعشرون:</u>

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=(u_n-1)^2+1$.

1. عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نفرض فيما يلي أن $\alpha=\frac{3}{2}$.

2. أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<2$.

ب ـ بين أن (u_n) متتالية متناقصة؛ استنتج أنها متقاربة ثم عين نهايتها.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $v_n=\ln(u_n-1)$.

أ ـ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب ـ اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n ؛ تأكد من النهاية المحصل عليها في 2. ب.

جـ - نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \frac{v_2}{2^2} + ... + \frac{v_n}{2^n}$ بين أن $S_n = (-n-1)\ln 2$.

د - نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ احسب S'_n بدلالة n.

الحل:

1. تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(u_n) متتالية ثابتة معناه $u_0 = u_n = u_{n+1}$ معناه $u_0 = (u_0-1)^2 + 1$ يكافئ $u_0 - 1 - (u_0-1)^2 = 0$ يكافئ $(u_0-1)(1-(u_0-1)) = 0$ يكافئ $(u_0-1)(-u_0+2) = 0$ أي $(\alpha-1)(-\alpha+2) = 0$ ومنه $\alpha = 1$ أو $\alpha = 2$.

2. أ - برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 < u_n < 2$.

لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ ومنه $1 < u_0 < 2$

نفرض أن $1 < u_n < 2$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن أن $1 < u_{n+1} < 2$.

$1 < u_n < 2$ معناه $0 < u_n - 1 < 1$ ومعناه $0 < (u_n-1)^2 < 1$ ومنه $1 < (u_n-1)^2 + 1 < 2$ أي $1 < u_{n+1} < 2$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 < u_n < 2$.

ب - تبيان أن (u_n) متتالية متناقصة.

ليكن n عددا طبيعيا

$u_{n+1} - u_n = (u_n-1)^2 + 1 - u_n = (u_n-1)^2 - (u_n-1)$.

$u_{n+1} - u_n = (u_n-1)(u_n-1-1) = (u_n-1)(u_n-2)$

بما أن $u_n > 1$ فإنّ $u_n - 1 > 0$ وبما أن $u_n < 2$ فإن $u_n - 2 < 0$ إذن $(u_n-1)(u_n-2) < 0$ أي $u_{n+1} - u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج أنها متقاربة

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة ونهايتها عدد حقيقي ℓ.

تعيين نهايتها.

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ولدينا $u_{n+1} = (u_n-1)^2 + 1$ والدالة $x \mapsto (x-1)^2 + 1$ مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن $\ell = (\ell-1)^2 + 1$ ومنه $\ell = 1$ أو $\ell = 2$ ولدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ والمتتالية (u_n) متناقصة إذن $\ell = 1$ أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

أ - برهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1) = \ln\left((u_n-1)^2 + 1 - 1\right)$$

$$v_{n+1} = \ln(u_n-1)^2 = 2\ln(u_n-1) = 2v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0-1) = \ln\left(\frac{3}{2}-1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n ؛

$$v_n = (-\ln 2)2^n$$

لدينا $v_n = \ln(u_n-1)$ معناه $u_n = e^{v_n} + 1$ ومنه $u_n = e^{v_n} + 1 = e^{(-\ln 2)2^n} + 1$.

التأكد من النهاية المحصل عليها في 2. ب.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} (-\ln 2)2^n = -\infty$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} e^{(-\ln 2)2^n} = 0$ إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{(-\ln 2)2^n} + 1 = 1$.

جـ - نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \frac{v_2}{2^2} + ... + \frac{v_n}{2^n}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

تبيان أن $S_n=(-n-1)\ln 2$.

$$S_n=\frac{(-\ln 2)2^0}{2^0}+\frac{(-\ln 2)2^1}{2^1}+...+\frac{(-\ln 2)2^n}{2^n}$$

$$S_n=(-\ln 2)+(-\ln 2)+...+(-\ln 2)$$
$$S_n=(n+1)(-\ln 2)=(-n-1)\ln 2$$

د ـ نضع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ؛ $S'_n={v_0}^2+{v_1}^2+{v_2}^2+...+{v_n}^2$

احسب S'_n **بدلالة** n .

$$S'_n=\left((-\ln 2)2^0\right)^2+\left((-\ln 2)2^1\right)^2+\left((-\ln 2)2^2\right)^2+...+\left((-\ln 2)2^n\right)^2$$
$$S'_n=(\ln 2)^2\left(2^0\right)^2+(\ln 2)^2\left(2^1\right)^2+(\ln 2)^2\left(2^2\right)^2+...+(\ln 2)^2\left(2^n\right)^2$$
$$S'_n=(\ln 2)^2\left[\left(2^0\right)^2+\left(2^1\right)^2+\left(2^2\right)^2+...+\left(2^n\right)^2\right]$$
$$S'_n=(\ln 2)^2\left[\left(2^2\right)^0+\left(2^2\right)^1+\left(2^2\right)^2+...+\left(2^2\right)^n\right]$$
$$S'_n=(\ln 2)^2\left[4^0+4^1+4^2+...+4^n\right]$$
$$S'_n=(\ln 2)^2\left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\right)=(\ln 2)^2\left(\frac{4^{n+1}-1}{3}\right)$$

التمرين الثالث والعشرون:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=e^2-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة ؟ علل.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=3(1+u_n)$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ج) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$.

الحل:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=e^2-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) **حساب** u_1 ، u_2 **و** u_3 .

$u_1=(1+u_0)e^{-2}-1=e^2\times e^{-2}-1=0$ ، $u_2=(1+u_1)e^{-2}-1=e^{-2}-1$ ،

$u_3=(1+u_2)e^{-2}-1=\left(e^{-2}\right)e^{-2}-1=e^{-4}-1$.

2) **إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $1+u_n>0$.

لدينا $1+u_0=e^2$ ومنه $1+u_0>0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $1+u_n>0$ ونبرهن أنّ $1+u_{n+1}>0$.

لدينا $1+u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}$ ولدينا حسب الفرضية $1+u_n>0$ ومنه $1+u_{n+1}>0$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $1+u_n>0$.

3) **تبيين أن المتتالية** (u_n) **متناقصة.**

aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n=(1+u_n)e^{-2}-(1+u_n)$

$$u_{n+1}-u_n=(1+u_n)(e^{-2}-1)$$

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$ و $e^{-2}-1<0$ فإن $(1+u_n)(e^{-2}-1)<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}<u_n$.

لدينا $u_0=e^2-1$ و $u_1=0$ ومنه $u_1<u_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_{k+1}<u_k$ ونبرهن أن $u_{k+2}<u_{k+1}$.

لدينا $u_{k+1}<u_k$ معناه $1+u_{k+1}<1+u_k$ يكافئ $(1+u_{k+1})e^{-2}<(1+u_k)e^{-2}$ يكافئ

$(1+u_{k+1})e^{-2}-1<(1+u_k)e^{-2}-1$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$ وعليه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}<u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n>0$ أي $u_n>-1$ ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -1 وبما أنها متناقصة فهي متقاربة.

4) أ) **إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.**

$v_{n+1}=3(1+u_{n+1})=3\left((1+u_n)e^{-2}\right)=e^{-2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها e^{-2} وحدها الأوّل

$v_0=3(1+u_0)=3e^2$.

ب) **كتابة v_n و u_n بدلالة n .**

$$v_n=3e^2\left(e^{-2}\right)^n=3e^{-2n+2}$$

لدينا $v_n=3(1+u_n)$ ومنه $u_n=\frac{1}{3}v_n-1$ أي $u_n=e^{-2n+2}-1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-2n+2}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-2n+2}-1=-1$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3e^2\left(e^{-2}\right)^n$.

إذن $v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=3e^2\left(e^{-2}\right)^0\times3e^2\left(e^{-2}\right)^1\times\ldots\times3e^2\left(e^{-2}\right)^n$

$$v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=\left(3e^2\right)^{n+1}\left(e^{-2}\right)^{0+1+\ldots+n}=\left(3e^2\right)^{n+1}\left(e^{-2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=\left(3e^2\right)^{n+1}\times e^{-n(n+1)}=\left(3e^2\times e^{-n}\right)^{n+1}=\left(3e^{2-n}\right)^{n+1}$$

ومنه $\ln(v_0\times v_1\times\ldots\times v_n)=\ln\left(3e^{2-n}\right)^{n+1}=(n+1)\ln\left(3e^{2-n}\right)$

أي $\ln v_0+\ln v_n+\ldots+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln3)$

طريقة ثانية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=3e^{-2n+2}$ معناه $\ln v_n=\ln\left(3e^{-2n+2}\right)=\ln3+\ln e^{-2n+2}$

أي $\ln v_n=\ln3+2-2n$.

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(\ln3+2-2\times0)+(\ln3+2-2\times1)+\ldots+(\ln3+2-2n)$$

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(n+1)(\ln3+2)-2(0+1+\ldots+n)$$

$$\ln v_0+\ln v_1+\ldots+\ln v_n=(n+1)(\ln3+2)-2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)(\ln 3+2)-n(n+1)$$

$$.\ \ln v_0+\ln v_1+...+\ln v_n=(n+1)(\ln 3+2-n)$$

كما أنه يمكن الإستدلال على الخاصية بالتراجع.

التمرين الرابع والعشرون:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$.

1) عين إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$.

1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، v_0، v_1، v_2 و v_3.

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$ حيث: $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<v_n-u_n<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

الحل:

1) **تعيين إتجاه تغير الدالة** f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $f'(x)=\dfrac{4(x+1)-4x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2) **دراسة وضعية** (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم** (D).

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;+\infty[$.

$$f(x)-x=\frac{4x+1}{x+1}-x=\frac{4x+1-x^2-x}{x+1}$$

$$f(x)-x=\frac{-x^2+3x+1}{x+1}=\frac{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}-x\right)\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}+x\right)}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $\dfrac{\left(x+\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ مثل إشارة $\left(-x+\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

x	0	$\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) و (D) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$	(C_f) تحت (D)

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$.

1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3.

ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) **و** (v_n).

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو العدد $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) **أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $2\le u_n<\alpha$ **و** $\alpha<v_n\le 5$.

لدينا $2\le u_0<\alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $2\le u_n<\alpha$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $2\le u_{n+1}<\alpha$.

$2\le u_n<\alpha$ معناه $f(2)\le f(u_n)<f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

بما أن $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(2)=3$ إذن $3\le u_{n+1}<\alpha$ أي $2\le u_{n+1}<\alpha$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n<\alpha$.

وكذلك لدينا $\alpha<v_0\le 5$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $\alpha<v_n\le 5$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $\alpha<v_{n+1}\le 5$.

$\alpha<v_n\le 5$ معناه $f(\alpha)<f(v_n)\le f(5)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

بما أن $v_{n+1}=f(v_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(5)=\dfrac{7}{2}$ إذن $\alpha<u_{n+1}\le\dfrac{7}{2}$ أي $\alpha<v_{n+1}\le 5$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha<v_n\le 5$.

ب) استنتاج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) **و** (v_n).

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;\alpha[$ ، $f(x)-x>0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n<\alpha$ فإن $f(u_n)-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة.

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ لدينا $f(x)-x<0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha<v_n\le 5$ فإن $f(v_n)-v_n<0$ أي $v_{n+1}-v_n<0$ وعليه المتتالية (v_n) متناقصة.

3) **أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $v_{n+1}-u_{n+1}\le \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{4v_n+1}{v_n+1}-\frac{4u_n+1}{u_n+1}=\frac{4v_nu_n+4v_n+u_n+1-4v_nu_n-v_n-4u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{3v_n-3u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}=\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\ge 2$ معناه $u_n+1\ge 3$ و $v_n\ge 2$ لأن $\alpha<v_n\le 5$ معناه $v_n+1\ge 3$

إذن $(v_n+1)(u_n+1)\ge 9$ يكافئ $\frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)}\le\frac{1}{3}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n>u_n$

فإنّ $\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

لدينا $v_0-u_0=5-2=3$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ أي $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ونبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1}$ أي نبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

لدينا $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ معناه $\frac{1}{3}(v_n-u_n)<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ أي $\frac{1}{3}(v_n-u_n)<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ ولدينا حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$ ومنه $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<\alpha$ و $v_n>\alpha$ ومنه $v_n>u_n$ أي $v_n-u_n>0$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $0<v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتاج أن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ حسب النهايات بالمقارنة نستنتج أن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

تحديد نهاية كل من (u_n) **و** (v_n).

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ .

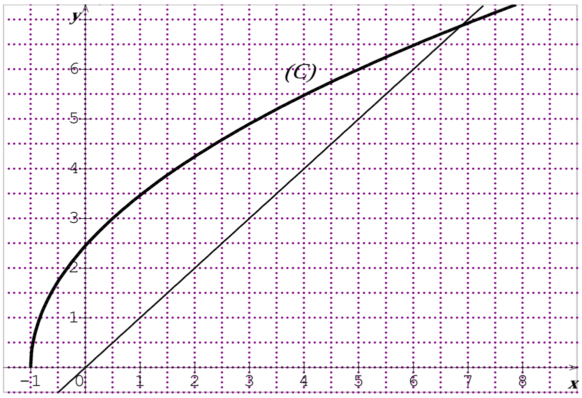
بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$ إذن $\ell=f(\ell)$

وحسب ماسبق $\ell=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

<u>التمرين الخامس والعشرون:</u>

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{6u_n+16}$.

1) h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3};+\infty\right[$ بـ: $h(x)=\sqrt{6x+16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل)



أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<8$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}.$$

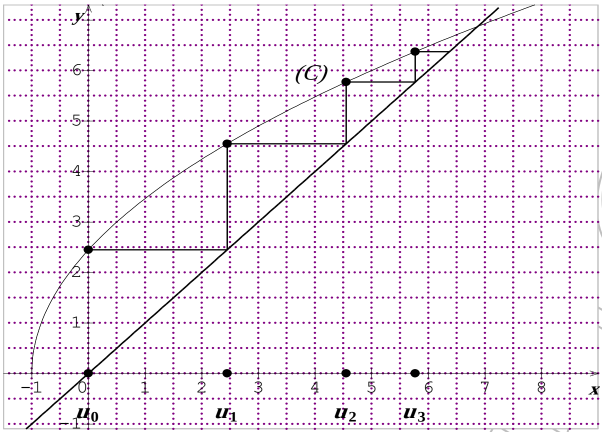
جـ) استنتج اتجاه تغير (u_n).

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

الحل:

1) **أ) تمثيل الحدود** u_0 ، u_1 ، u_2 **و** u_3.



ب) حسب تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

2) **أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $0\le u_n<8$.

لدينا $0\le u_0<8$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

لنفرض أن $0\le u_n<8$ وعليه $0\le 6u_n<48$ يكافئ $16\le 6u_n+16<64$ يكافئ $4\le\sqrt{6u_n+16}<8$ لأن دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما ومنه $0\le\sqrt{6u_n+16}<8$ أي $0\le u_{n+1}<8$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0\le u_n<8$ وهذا حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع.

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{6u_n+16}-u_n=\frac{\left(\sqrt{6u_n+16}-u_n\right)\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}{\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{6u_n+16-u_n^2}{\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}=\frac{-\left(u_n^2-6u_n-16\right)}{\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-8)(u_n+2)}{\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}=\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}$$

. **جـ) استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية** (u_n).

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0\le u_n<8$.

ومنه $8-u_n>0$ و $u_n+2>0$ و $\sqrt{6u_n+16}+u_n>0$ إذن $\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

3) أ) **تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n** ، $0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<8$ ومنه $8-u_n>0$.

$$8-u_{n+1}=8-\sqrt{6u_n+16}=\frac{\left(8-\sqrt{6u_n+16}\right)\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}=\frac{64-(6u_n+16)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}$$

$$8-u_{n+1}==\frac{48-6u_n}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}=\frac{6(8-u_n)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}=\frac{6(8-u_n)}{\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\ge 0$ معناه $6u_n+16\ge 16$ ومنه $\sqrt{6u_n+16}\ge 4$ يكافئ $8+\sqrt{6u_n+16}\ge 12$

أي $\frac{1}{8+\sqrt{6u_n+16}}\le\frac{1}{12}$ وبما أن $8-u_n>0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $\frac{6(8-u_n)}{8+\sqrt{6u_n+16}}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$ أي

$8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$.

ب) **تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $0<8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $8-u_n>0$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا $8-u_0=8$ و $8\left(\frac{1}{2}\right)^0=8$ أي $8-u_0\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل عدد طبيعي n ولنبرهن صحة الخاصية $8-u_{n+1}\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ معناه $\frac{1}{2}(8-u_n)\le 8\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $\frac{1}{2}(8-u_n)\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$ فإن $8-u_{n+1}\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n :

$8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $0<8-u_n\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}8\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ يكون حسب النهايات بالمقارنة $\lim\limits_{n\to+\infty}8-u_n=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=8$.

التمرين السادس والعشرون:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2+3u_n^{\ 2}}{1+3u_n}$.

1. أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$.

ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$.

ج - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. أ ـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$.

ب ـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$.

ج ـ حدد نهاية المتتالية (u_n).

الحل:

1. أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$.

ليكن n عددا طبيعيا

$$2-u_{n+1} = 2-\frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{2+6u_n-2-3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n} = \frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$$

ب ـ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$.

لدينا $0<u_0<1$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض أن $0<u_n<2$ ونبرهن أن $0<u_{n+1}<2$.

لدينا من الفرضية $u_n>0$ معناه $2+3u_n^2>0$ و $1+3u_n>0$ ومنه $\frac{2+3u_n^2}{1+3u_n}>0$ أي $u_{n+1}>0$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $2-u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$ ومن الفرضية لدينا $u_n<2$ معناه $2-u_n>0$ و

$\frac{3u_n}{1+3u_n}>0$ لأن $u_n>0$ ومنه $\frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)>0$ ومنه $2-u_{n+1}>0$ أي $u_{n+1}<2$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<2$.

ج ـ تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ليكن n عددا طبيعيا

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n}-u_n = \frac{2+3u_n^2-u_n-3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{2-u_n}{1+3u_n}$$

ولدينا $0<u_n<2$ معناه $2-u_n>0$ و $1+3u_n>0$ ومنه $\frac{2-u_n}{1+3u_n}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

2. أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$.

لدينا $\frac{3u_n}{1+3u_n} = \frac{1+3u_n-1}{1+3u_n} = 1-\frac{1}{1+3u_n}$

ولدينا $u_n<2$ معناه $1+3u_n<7$ يكافئ $\frac{1}{1+3u_n}>\frac{1}{7}$ يكافئ $-\frac{1}{1+3u_n}<-\frac{1}{7}$ يكافئ $1-\frac{1}{1+3u_n}<\frac{6}{7}$ أي

$\frac{3u_n}{1+3u_n}<\frac{6}{7}$.

ب ـ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$.

aziz_mus1@hotmail.fr

$2-u_0=1$ و $\left(\frac{6}{7}\right)^0=1$ أي $2-u_0\le\left(\frac{6}{7}\right)^0$.

ليكن n عددا طبيعيا.

نفرض أن $2-u_n\le\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ونبرهن أن $2-u_{n+1}\le\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$.

من الفرضية $2-u_n\le\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ولدينا $\frac{3u_n}{1+3u_n}<\frac{6}{7}$ إذن $\frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)<\frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^n$ أي $2-u_{n+1}\le\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2-u_n\le\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

ج ـ تحديد نهاية المتتالية (u_n).

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $0<2-u_n\le\left(\frac{6}{7}\right)^n$ و بما أن $-1<\frac{6}{7}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}2-u_n=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

<u>التمرين السابع والعشرون:</u>

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C).

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

أ ـ باستعمال المنحنى (C) والمستقيم ذي المعادلة $y=x$ مثل على محور الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3.

ب ـ اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

4) أ ـ باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 3$.

ب ـ بين أن (u_n) متزايدة ؛ هل هي متقاربة؟ برر.

5) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_{n+1}\le\frac{3}{4}(3-u_n)$.

ب ـ استنتج أن $3-u_n\le 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جـ ـ حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

<u>الحل:</u>

1) درسة تغيرات الدالة f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ لدينا $x+3>0$ و $(x+1)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(x-1)$.

من أجل كل $x\in]-1;1[$، $f'(x)<0$ ومن أجل كل $x\in]1;+\infty[$، $f'(x)>0$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-1;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+3 = 4$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x+1 = 0^+$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

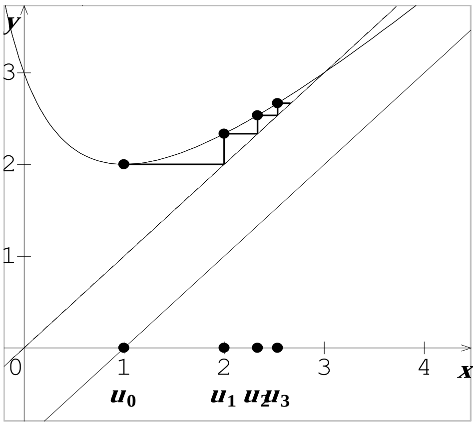
جدول تغيرات الدالة f .

x	-1 1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 2 ↗ $+\infty$

2) **تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C).**

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{x+1}-(x-1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3-x^2+1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C).



3) **أ ـ تمثيل على محور الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3.**

ب ـ اعطاء تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

حسب الشكل المقابل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

4) **أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 3$.**

لدينا $1 \le u_0 \le 3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض أن $1 \le u_n \le 3$ ونبرهن أن $1 \le u_{n+1} \le 3$.

لدينا $1 \le u_n \le 3$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;3]$ فإن

$f(1) \le f(u_n) \le f(3)$ أي $2 \le u_{n+1} \le 3$ وبالتالي $1 \le u_{n+1} \le 3$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 3$.

ب ـ تبيان أن (u_n) متزايدة ؛

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \ge u_n$.

لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$ ومنه $u_1 \ge u_0$ أي الخاصية محققة من أجل $n=0$.

ليكن n عددا طبيعيا

نفرض أن $u_{n+1} \ge u_n$ ونبرهن صحة الخاصية $u_{n+2} \ge u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} \ge u_n$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;3]$ إذن $f(u_{n+1}) \ge f(u_n)$ ولدينا $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ و

$f(u_n) = u_{n+1}$ ومنه $u_{n+2} \ge u_{n+1}$.

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \ge u_n$ أي المتتالية (u_n) متزايدة.

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3.

5) **أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_{n+1} \le \dfrac{3}{4}(3-u_n)$.**

$$3-u_{n+1} = 3-\frac{u_n^2+3}{u_n+1} = \frac{3u_n+3-u_n^2-3}{u_n+1} = \frac{u_n(3-u_n)}{u_n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}(3-u_n)$$

لدينا $\dfrac{u_n}{u_n+1} = \dfrac{u_n+1-1}{u_n+1} = 1-\dfrac{1}{u_n+1}$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

ولدينا $u_n \leq 3$ يعني $u_n + 1 \leq 4$ يكافئ $\frac{1}{u_n+1} \geq \frac{1}{4}$ يكافئ $-\frac{1}{u_n+1} \leq -\frac{1}{4}$ أي $1-\frac{1}{u_n+1} \leq \frac{3}{4}$ $\frac{u_n}{u_n+1} \leq \frac{3}{4}$

وبما أن $3-u_n \geq 0$ فإن $\frac{u_n}{u_n+1}(3-u_n) \leq \frac{3}{4}(3-u_n)$ أي $3-u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3-u_n)$.

ب - استنتاج أن $3-u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

نستعمل البرهان بالتراجع

لدينا $3-u_0 = 2$ و $2\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 2$ ومنه $3-u_0 \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^0$ أي الخاصية محققة من أجل $n=0$.

لنفرض أن $3-u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن أن $3-u_{n+1} \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

لدينا $3-u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ معناه $\frac{3}{4}(3-u_n) \leq 2\times\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $\frac{3}{4}(3-u_n) \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

ولدينا حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3-u_n)$ ومنه $3-u_{n+1} \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

اذن نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جـ - تحديد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 \leq 3-u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

وبما أن $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ أي $\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ إذن حسب النهايات بالمقارنة $\lim_{n\to+\infty} 3-u_n = 0$ أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

تمارين مقترحة

تمرين 01:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالشكل: $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{u_n^{\,2}+12}$

1. احسب الحدود الخمس الأولى.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n^{\,2}-4$.

أ ـ برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية.

ب ـ أوجد عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ ـ استنتج نهاية (v_n) ثمّ نهاية (u_n).

تمرين 02:

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $n\in\mathbb{N}$; $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-2) \end{cases}$.

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .
2. α عدد حقيقي، نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-\alpha$

أ ـ عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية.

ب ـ عبّر عن v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n .

ج ـ هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان ؟

د ـ احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+...v_n$.

والمجموع: $L_n=u_0+u_1+...u_n$.

ـ ما هي نهاية L_n عندما يؤول n إلى $+\infty$؟

تمرين 03:

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$

1) أ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ ، كما يلي: $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

ب) باستعمال الرّسم السابق، مثّل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

جـ) أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ) هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

ـ عيّن قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول

4) نضع $\alpha=-4$

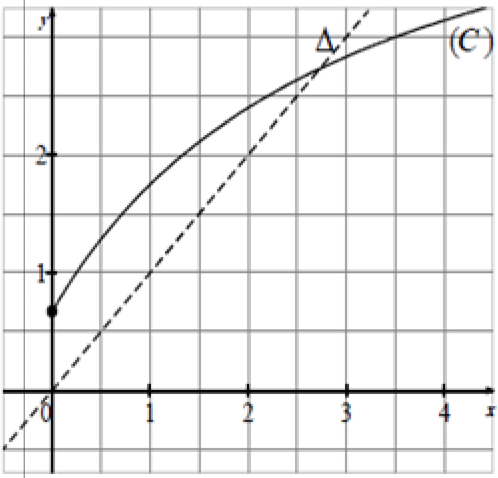
أ) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب) تحقق من صحة تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n).

جـ) احسب بدلالة n المجموعين: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+...u_n$

تمرين 04:

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr



في الشكل المقابل، (C) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1. أ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدّالة على المجال $[0;+\infty[$.

ب ـ بيّن أنّه إذا كان $x\in[0;3]$ فإنّ $f(x)\in[0;3]$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0=\dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

أ ـ أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب ـ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (u_n).

3. أ ـ برهن بالتراجع، أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<u_{n+1}<3$

ب ـ استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثمّ احسب نهايتها.

تمرين 05:

(u_n) متتالية معرّفة بـ: $u_0=1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+u_n}$.

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .
2. برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، أنّ: $0<u_n<2$.
3. أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة، ثمّ استنتج أنّها متقاربة، حدّد نهايتها.
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=1-\dfrac{2}{u_n}$.

أ ـ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية، عيّن أساسها وحدّها الأوّل.

ب ـ أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

ج ـ تحقّق من نهاية u_n المحسوبة في السؤال 3 .

د ـ احسب بدلالة n ، المجموع S_n ؛ حيث $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

تمرين 06:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث: $\begin{cases}u_1+u_3=30e\\ \ln(u_2)-\ln(u_4)+2\ln 3=0\end{cases}$.

حيث $\ln$ اللوغاريتم النيبيري ذو الأساس e .

1. عيّن u_1 و q أساس (u_n).
2. عبّر عن u_n بدلالة n .
3. أحسب بدلالة n ، المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$
4. (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\ln(u_{n+2})+\ln(u_{n+1})$.

أ ـ اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية.

ب ـ عيّن العدد الطبيعي n ، بحيث: $v_0+v_1+...+v_n=12+48\ln 3$.

تمرين 07:

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\alpha$ حيث α عدد حقيقي

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=4u_n-\dfrac{3}{2}$.

1- عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

aziz_mus1@hotmail.fr

2- نضع $\alpha = \frac{5}{2}$، برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$.

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

أ - برهن أنّ (v_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها، ثمّ عبّر عن v_n بدلالة n .

ب - نضع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ؛ احسب بدلالة n المجموع S_n .

جـ - عيّن عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثمّ احسب بدلالة n ، المجموع T_n ؛ حيث: $T_n = u_0 + u_1 + ...u_n$.

تمرين 08:

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1- احسب v_0 ، v_1 .

2- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

3- أ - بيّن أنّ: $S_n = u_n - 1$ علما أنّ: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

ب - اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ احسب نهاية v_n

جـ - برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1$ ، وبيّن أنّ (u_n) متقاربة.

4- المتتالية (w_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

أ - بيّن أنّ المتتالية (w_n) ثابتة يطلب تعيين قيمتها.

ب - بيّن مرّة ثانية أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1$.

تمرين 09:

a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a{u_n}^2$ ونعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = \frac{\ln u_n}{\ln a} + b$ ، حيث b عدد حقيقي

1) جد قيمة b التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية، عيّن عندئذ حدها الأول وأساسها.

2) استنتج بدلالة a و n الحد العام u_n .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$.

- بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن: $p_n = a^{2^{n+1}-(n+2)}$

4) ادرس حسب قيم a نهاية p_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

تمرين 10:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n u_n$.

أ - بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

ب - عيّن v_n بدلالة n .

جـ - بيّن أنّ (w_n) متتالية حسابية أساسها 5 ، ثمّ عيّن w_n بدلالة n .

د - احسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

هـ - عيّن u_n بدلالة n .

و - بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$.

ي - استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 11:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$.

1) أ - المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. دون حساب مثل على المستقيم $\left(O; \vec{i}\right)$ الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 وذلك باستعمال المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ والمنحنى (C) الممثل للدالة العددية f المعرّفة على المجال $]-3; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+4}{x+3}$.

ب - أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر وتقارب ونهاية المتتالية (u_n).

2) أ - أثبت أنّه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، فإنّ: $0 < u_n < 2$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

أ - أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب - احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. ثمّ تحقّق من نتيجة السؤال 2 - جـ .

تمرين 12:

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{5}{6} u_n + 335 \end{cases}$ ، حيث α عدد حقيقي.

1. عيّن العدد الحقيقي α الذي تكون من أجله المتتالية (u_n) ثابتة.

2. نضع فيما يلي: $\alpha = 2009$.

أ - أثبت، باستعمال البرهان بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2010$.

ب - بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n - 2010$.

أ - أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب - أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثمّ عبارة u_n بدلالة n .

جـ - احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

د - احسب، بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = v_0 + 6v_1 + 6^2 v_2 + ... + 6^n v_n$

تمرين 13:

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

1– برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 4$.

2– أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علّل إجابتك.

3– أ) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$.

ب) استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 14:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases}$ حيث n عدد طبيعي.

ولتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي: $v_n = u_n + n - 1$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

2) أ ـ اكتب v_n بدلالة n .

ب ـ استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

ـ بيّن أنّ: $S_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$ و $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right) - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

تمرين 15:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^{\,2} - 3}{u_n + 2} \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n > 3$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n).

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

5) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

Mostefai A/Elaziz

aziz_mus1@hotmail.fr